ЛЕКСИКОНЪ

ЧИСТОЙ И ПРИКЛАДНОЙ

МАТЕМАТИКИ,

СОСТАВЛЕННЫЙ

ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ ЭКСТРАОРДИНАРНЫМЪ АКАДЕМИКОМЪ И ДОКТОРОМЪ НАУКЪ
ПАРИЖСКОЙ АКАДЕМІИ

В. Я. Буняковскимъ.

ТОМЪ I.

A - D.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
Въ Типографіи Императорской Академіи Наукъ.
1839.

Съ одобренія Императорской Академіи Наукъ печатать
Непремѣнный Секретарь *П. Фусъ.*
Октября 14 дня 1836 г.

ПАМЯТИ

НЮТОНА, ЭЙЛЕРА И ЛАГРАНЖА

СЕЙ СЛАБЫЙ ТРУДЪ

СЪ БЛАГОГОВѢНІЕМЪ ПОСВЯЩАЕТЪ

СОЧИНИТЕЛЬ.

ПРЕДУВѢДОМЛЕНІЕ.

Бѣдность нашей ученой литературы никогда еще не была такъ ощутительна какъ теперь, несмотря на довольно значительное число оригинальныхъ и переводныхъ сочиненій, пріобрѣтенныхъ ею въ послѣднее двадцатипятилѣтіе. Это кажущееся противорѣчіе объясняется тѣмъ, что любовь къ положительнымъ знаніямъ болѣе нежели когда нибудь начинаетъ развиваться въ нашемъ отечествѣ. Очень естественно, что при такомъ стремленіи настоящаго поколѣнія къ умственному образованію, число существующихъ у насъ учебныхъ и ученыхъ пособій должно было оказаться весьма недостаточнымъ. Любознательность породила новыя требованія, и сдѣлала насъ болѣе взыскательными къ достоинству произведеній, появляющихся въ области наукъ. Можетъ быть, иные скажутъ, что эта самая взыскательность есть одна изъ причинъ скудости нашей современной ученой литературы, и это потому, что не всякій рѣшается обнародовать свой трудъ, болѣе или менѣе несовершенный, опасаясь суда знатоковъ, правда, еще немногочисленныхъ. Но могла ли эта робость и недовѣрчивость къ собственнымъ силамъ замедлить ощутительнымъ образомъ нашу литературную дѣятельность? Будемъ откровенны и сознаемся, что главная причина нашей бѣдности по всѣмъ отраслямъ положительныхъ знаній есть незрѣлость умовъ, неразлучная съ состояніемъ народа, уже ознаменовавшаго себя воинскими и гражданскими доблестями, но недавно вступившаго на поприще умственнаго образованія. Это сознаніе не должно опечаливать насъ: развитіе ума человѣческаго подлежитъ тому же закону строгой постепенности, какъ и явленія въ вещественномъ мірѣ. Если примемъ въ соображеніе короткій промежутокъ времени, отдѣляющій насъ отъ поры невѣжества Русскаго народа, то утвердительно скажемъ, что возможное въ великомъ дѣлѣ просвѣщенія исполнено у насъ. И ежели бы чужеземецъ, считающій столѣтіями давность образованности своего отечества, упрекнулъ насъ въ застоѣ умственнаго развитія, то мы раскрыли бы передъ нимъ наши лѣтописи на тѣхъ эпохахъ, когда Англія озарялась геніемъ Бекона, Локка, Нютона, когда Франція гордилась Декартомъ, Паскалемъ, Ферматомъ, Германія — Кеплеромъ, Лейбницемъ, Италія — Галилеемъ: онъ увидѣлъ бы, что въ тѣ времена едва заводились у насъ типографіи для печатанія церковныхъ книгъ. Безпристрастное сравненіе Россіи XVIII вѣка съ Россіею XIX столѣтія, вполнѣ убѣдитъ его въ той истинѣ, что можетъ быть ни одинъ народъ, въ такое короткое время, не сдѣлалъ столь быстрыхъ успѣховъ въ просвѣщеніи, какъ народъ Русскій.

Сказанное о бѣдности Русской ученой литературы вообще, можетъ быть отнесено преимущественно къ литературѣ математической, состояніе которой составляетъ разительную противоположность съ особеннымъ влеченіемъ нашего юношества къ изученію точныхъ наукъ. Не находя на Русскомъ языкѣ удовлетворительныхъ пособій, любители Математики по необходимости должны прибѣгать къ иностраннымъ сочиненіямъ; но, уразумѣніе книгъ, написанныхъ не на родномъ языкѣ, сопряжено для большей части читателей съ непреодолимыми затрудненіями, съ одной стороны потому что въ обыкновенныхъ Лексиконахъ математическіе термины переданы съ большею неточностію, а съ другой, по причинѣ недостаточности Русской математической номенклатуры.

Можно сказать съ достовѣрностію, что при такихъ обстоятельствахъ, первая потребность для распространенія и усиленія математическихъ наукъ въ нашемъ отечествѣ, есть изданіе полнаго курса Математики и Математическаго Лексикона. Составленіе хорошаго и вмѣстѣ полнаго курса чрезвычайно трудно: легко убѣдиться въ этомъ, принявъ въ соображеніе, что ни на одномъ языкѣ не существуетъ еще такого руководства, которое не заключало бы въ себѣ важныхъ недостатковъ, или, по крайней мѣрѣ, пропусковъ. Въ ожиданіи полнаго курса Математики на отечественномъ языкѣ, я предпринялъ удовлетворить второму требованію изданіемъ Лексикона. Повторяю, необходимость такой книги становится у насъ со дня на день болѣе и болѣе ощутительною *). Спеціальный Лексиконъ, составленный съ добросовѣстностію и съ знаніемъ дѣла, можетъ замѣнить въ нѣкоторомъ отношеніи цѣлую библіотеку по излагае-

*) Чтобы не обвинили меня въ умышленномъ или неумышленномъ пропускѣ, я вынужденъ упомянуть объ одномъ опытѣ въ этомъ родѣ: я разумѣю *Военный и Математическій Словарь* Вельяшева-Волынцова, напечатанный въ 1808 году. Но, стоитъ только раскрыть это руководство, чтобъ удостовѣриться въ совершенномъ его ничтожествѣ въ отношеніи математическихъ наукъ. Объ этой книгѣ можно смѣло сказать, что если она не причинила вреда своими превратными понятіями о предметахъ, а также своимъ искаженнымъ языкомъ, то навѣрное не могла принести и никакой пользы. Сколько мнѣ извѣстно, другихъ опытовъ на Русскомъ языкѣ не было.

мой въ немъ наукѣ, конечно не для ученыхъ, но для людей, занимающихся предметомъ съ цѣлію изучить его основательно.

Съ такими мыслями о потребностяхъ нашей математической литературы, я приступилъ къ осуществленію предпріятія, которое давно сдѣлалось любимою моею мечтою. Еще на скамьяхъ аудиторій, слушая лекціи знаменитыхъ Европейскихъ геометровъ, я замышлялъ уже Математическій Лексиконъ. По мѣрѣ того, какъ кругъ наукъ расширялся передо мной, я болѣе и болѣе убѣждался въ трудности предпріятія; и теперь, отложилъ бы непремѣнно на нѣсколько лѣтъ изданіе моего Лексикона, если бы не былъ увѣренъ, что не смотря на всѣ его недостатки, онъ можетъ принести пользу моимъ соотечественникамъ. Увлекаясь съ одной стороны этимъ убѣжденіемъ, а съ другой ободряемый нѣкоторыми любителями Математики, которые конечно судили слишкомъ снисходительно о достоинствѣ моего труда, я рѣшился приступить къ его напечатанію, и представляю нынѣ на судъ ученыхъ первый томъ Лексикона.

Считаю необходимымъ войти въ нѣкоторыя подробности относительно цѣли, образа исполненія и средствъ, которыми я располагалъ при составленіи моего Математическаго Лексикона.

Главная цѣль изданія состояла въ томъ, чтобы доставить моимъ соотечественникамъ, занимающимся Математикою, и уже нѣсколько знакомымъ съ нею, такую книгу, въ которой они могли бы почерпнуть достаточныя свѣдѣнія о всѣхъ важнѣйшихъ теоріяхъ, какъ старыхъ такъ и новѣйшихъ. Для этого я объяснилъ въ моемъ Лексиконѣ всѣ термины *Чистаго Анализа*, *Аналитической* и *Начертательной Геометріи*, *Механики*, *Исчисленія Вѣроятностей*, значительное число словъ изъ *Астрономіи*, *Геодезіи*, *Прикладной Механики*, *Оптики*, *Гномоники*, *Опытной* и *Математической Физики* и изъ другихъ наукъ, болѣе или менѣе соприкосновенныхъ съ Математикою.

Второю цѣлію изданія было обогащеніе Русской математической номенклатуры, весьма неполной во многихъ отношеніяхъ. Я старался достигнуть этой цѣли во первыхъ, введеніемъ новыхъ словъ въ тѣхъ случаяхъ, — и число ихъ довольно значительно, — когда, для выраженія извѣстныхъ понятій, мы не имѣемъ никакихъ терминовъ, а во вторыхъ, умѣстнымъ употребленіемъ математическихъ реченій, получившихъ уже право гражданства въ нашемъ языкѣ. Когда, при переводѣ какого либо Французскаго термина, выставлено въ моемъ Лексиконѣ нѣсколько Русскихъ словъ, то *вообще* первое слово, по моему мнѣнію, должно быть предпочтено другимъ по какимъ либо причинамъ, напримѣръ, по своей опредѣлительности, или потому что оно болѣе свойственно духу Русскаго языка, и т. п. Впрочемъ, иногда слова бываютъ равносильныя;

тогда фразеологія покажетъ, въ какихъ случаяхъ должно употреблять одно, преимущественно предъ другимъ.

Наконецъ, третья цѣль состояла въ томъ, чтобы доставить любителямъ точныхъ наукъ, мало знакомымъ съ Французскимъ языкомъ, возможность читать и понимать Французскія математическія книги. Польза отъ этого очевидна: утвердительно можно сказать, что ни одинъ народъ не имѣетъ такой богатой математической литературы, какъ Французскій. Для достиженія этой цѣли я расположилъ Лексиконъ по Французскому алфавиту, и перевелъ всѣ термины на Русскій языкъ съ надлежащими объясненіями, и съ присовокупленіемъ фразеологіи, по возможности подробнѣйшей. Надѣюсь, что въ этомъ отношеніи онъ удовлетворитъ даже взыскательныхъ читателей. Въ немъ найдутъ они самый полный сводъ Французскихъ математическихъ словъ. Что касается до фразеологіи, то меня скорѣе могутъ упрекнуть въ излишней полнотѣ, чѣмъ въ противномъ недостаткѣ. Наконецъ, для удобности читателей, во-все незнающихъ Французскаго языка, будетъ помѣщенъ въ концѣ Лексикона полный алфавитный списокъ Русскихъ математическихъ словъ съ ихъ переводомъ на Французскій языкъ. При такомъ пособіи, пріискиваніе статей не будетъ представлять ни малѣйшаго затрудненія.

Когда какая либо теорія, по значительному объёму своему, не могла войти въ Лексиконъ со всѣми подробностями, то я дѣлалъ ссылки на книги или на отдѣльныя записки, въ которыхъ можно почерпнуть полныя свѣдѣнія о томъ предметѣ. То же самое наблюдалъ я вообще и въ разсужденіи различныхъ отраслей Чистой и Прикладной Математики. Такъ, напримѣръ, въ статьяхъ: *Алгебра*, *Астрономія*, *Исчисленіе Конечныхъ Разностей* и проч. читатели найдутъ указанія на лучшіе трактаты объ этихъ наукахъ. Впрочемъ, при изложеніи статей большаго объёма, я старался по возможности обозначать порядокъ предложеній и ходъ доказательствъ такъ, чтобы читатель, нѣсколько свѣдущій въ Математикѣ, могъ безъ труда пополнить самъ пропущенное за недостаткомъ мѣста. Подобный способъ изложенія имѣетъ безъ сомнѣнія весьма полезную сторону, ибо заставляетъ читателя прибѣгать иногда къ собственнымъ своимъ силамъ, а это самое ведетъ его къ болѣе основательному изученію предмета.

Въ составъ Лексикона вошла также Исторія различныхъ отраслей математическихъ наукъ. Равнымъ образомъ читатели найдутъ въ немъ историческія и хронологическія показанія о разныхъ теоріяхъ и задачахъ, относящихся къ чистому и прикладному анализу. Эти двѣ статьи, весьма важныя по моему мнѣнію, служатъ необходимымъ дополненіемъ къ курсамъ Математики, въ которыхъ, по большей части, во-все опущены какъ историческія, такъ и хронологическія свѣдѣнія.

Я уже сказалъ, что число новыхъ Русскихъ словъ, входящихъ въ мой Лексиконъ, довольно значительно. Они не отмѣчены въ текстѣ особеннымъ знакомъ; читатели, свѣдущіе въ Русской математической литературѣ, легко замѣтятъ ихъ. Опытность и время покажутъ, какія изъ предлагаемыхъ мною нововведеній могутъ быть приняты, и которыя изъ нихъ должны быть откинуты. Впрочемъ, я тогда только отступалъ отъ номенклатуры и языка Русскихъ писателей о Математикѣ, когда, по разумѣнію моему, измѣненія были необходимы.

Для удобнѣйшаго пріисканія статей, объясняющихъ чертежи, выставлены на сихъ послѣднихъ относящіяся къ нимъ страницы текста.

Что касается до средствъ, которыми я располагалъ при составленіи моего Лексикона, то въ этомъ отношеніи я не могъ терпѣть никакого недостатка. Съ одной стороны замѣчанія ученыхъ моихъ сослуживцевъ по Академіи, преимущественно же совѣты Г. Остроградскаго, а съ другой, богатство Библіотеки Императорской Академіи Наукъ, поставили меня въ возможность дать моему труду такую полноту, которой трудно было бы достигнуть, даже нѣсколькимъ дѣлателямъ, при обстоятельствахъ, менѣе благопріятныхъ. Вмѣняю себѣ въ пріятный долгъ изъявить предъ всѣми искреннюю благодарность тѣмъ Гг. Академикамъ, совѣтами которыхъ я пользовался при составленіи моего Лексикона.

Всякое сочиненіе, какъ дѣло человѣческое, имѣетъ свои недостатки. Я очень знаю, что мой трудъ, болѣе нежели многіе другіе, долженъ, по сущности своей, подать поводъ къ справедливымъ критическимъ замѣчаніямъ. Разнообразіе предметовъ, которые для полноты должны входить въ составъ Лексикона Чистой и Прикладной Математики, трудность соразмѣрить объёмъ статей съ относительною ихъ важностію и не упустить изъ виду единства въ изложеніи, рѣшительная невозможность избѣжать въ нѣкоторыхъ случаяхъ повтореній, необработанность нашего математическаго языка, — всё это заставляетъ меня думать, что несмотря на всѣ мои старанія, книга моя далёко еще не удовлетворитъ условіямъ хорошаго лексикографическаго руководства. Можетъ быть, отечественные математики найдутъ также, что нѣкоторые термины и реченія переданы не совсѣмъ удачно въ моемъ Лексиконѣ; заранѣе прошу ихъ быть снисходительными къ такимъ недостаткамъ. До сихъ поръ у насъ не было никакого авторитета для Русскаго математическаго языка; и такъ, можетъ ли первый опытъ установить терминологію науки, въ такой степени обширной и многосторонней, какъ Математика?

Сознаваясь съ откровенностію въ слабыхъ сторонахъ моего труда, я позволяю себѣ вмѣстѣ съ тѣмъ обратить вниманіе читателей на полноту моего Лексикона въ разсужденіи числа математическихъ терминовъ по предмету Чистаго Анализа, Геометріи, Умозрительной Механики и Исчисленія Вѣроятностей. Смѣло скажу, что въ этомъ отношеніи, Лексиконъ мой имѣетъ преимущество предъ всѣми доселѣ изданными на иностранныхъ языкахъ математическими словарями, и вотъ на чемъ я основываю это утвержденіе. При составленіи алфавитнаго списка математическихъ терминовъ, я имѣлъ въ виду почти всѣ Математическіе Лексиконы и списки словъ на Французскомъ и на Нѣмецкомъ языкахъ *). Сверхъ того, безпрерывныя справки съ Записками главныхъ Академій и Ученыхъ Обществъ, а также чтеніе отдѣльныхъ сочиненій, журналовъ и диссертацій по разнымъ предметамъ математическихъ наукъ, доставили мнѣ огромный итогъ терминовъ, сводомъ которыхъ я уже занимаюсь слишкомъ десять лѣтъ. При такихъ пособіяхъ нетрудно было составить самый полный сборникъ словъ и реченій математическихъ. Смѣю также надѣяться, что Лексиконъ мой не отсталъ и отъ современнаго состоянія науки.

Предпринятое мною сочиненіе будетъ состоять изъ *трехъ* томовъ: первый подвергается нынѣ суду отечественныхъ ученыхъ. Для втораго и третьяго, уже собрано у меня очень много матеріаловъ; но эти матеріалы требуютъ еще тщательной обработки и значительныхъ пополненій. Въ концѣ третьяго тома будутъ помѣщены нѣкоторыя дополненія ко всему изданію.

В. Буняковскій.

Апрѣля 17 дня 1839-го года.

---

*) Вотъ главныя изъ тѣхъ сочиненій, о которыхъ идетъ рѣчь: *Dictionnaire universel de Mathématique et de Physique*; par Saverien, Paris, 1753, 2 тома in-4°. *Encyclopédie méthodique*; Mathématiques; Paris, 1784, 3 тома in-4°. *Histoire des Mathématiques*; par J. F. Montucla, achevé par Jérôme de La-Lande; Paris, 4 тома in-4°; первые два изданы въ 1799 году, а 3-й и 4-й въ 1802. *Histoire générale des Mathématiques, depuis leur origine jusqu'à l'année* 1808; par Charles Bossut; Paris, 1810, 2 тома in-8°. Алфавитный списокъ математическихъ словъ, помѣщенный въ концѣ третьяго тома сочиненія: *Traité du Calcul Différentiel et Intégral*; par S. F. Lacroix, seconde édition; Paris, томъ 1-й напечатанъ въ 1810 году, 2 й 1814 г., 3-й 1819 г. in 4°, Mathematisches Wörterbuch; von Georg Simon Klügel, Leipzig, nebst Fortsetzung von Molweide und Grunert, 5 томовъ 1803 — 1831 года, in-8°. Supplemente zu Georg Simon Klügel's Wörterbuche der reinen Mathematik; von J. A. Grunert; 2 тома, 1833—1836 г. Недавно вышла во Франціи книга подъ заглавіемъ: *Dictionnaire des sciences mathématiques pures et appliquées*, par une société d'anciens élèves de l'École Polytechnique, sous la direction de A. S. de Montferrier; Paris, 1835 — 1836 г. 2 тома большой in-4°. Но этотъ Лексиконъ, по неполнотѣ своей и по странному, часто даже ошибочному воззрѣнію сочинителей на нѣкоторые предметы, не могъ мнѣ служить никакимъ пособіемъ.

ЛЕКСИКОНЪ
ЧИСТОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ.

А.

ABAISSEMENT. (Алг.) **ПОНИЖЕНІЕ.** Пониженіемъ уравненія называется дѣйствіе, посредствомъ котораго уменьшаютъ степень того уравненія; на сей конецъ употребляютъ приличныя преобразованія. Собственно говоря, *пониженіе* состоитъ въ разложеніи уравненія на нѣсколько другихъ, коихъ степени, порознь взятыя, ниже степени даннаго уравненія.

Такъ, напримѣръ, уравненіе четвертой степени

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

разлагается на два слѣдующія второй степени

$$x^2 - y'x + 1 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 - y''x + 1 = 0,$$

гдѣ y' и y'' изображаютъ корни уравненія

$$y^2 + y - 1 = 0.$$

Приведенный примѣръ относится къ уравненіямъ, извѣстнымъ подъ названіемъ *возвратныхъ* [Смот. RÉCIPROQUES (ÉQUATIONS)], которыя всегда могутъ быть понижены. Равнымъ образомъ пониженіе возможно въ уравненіяхъ имѣющихъ равные корни. Смот. ÉGALES (RACINES). И вообще, когда между корнями предложеннаго уравненія существуютъ какія либо извѣстныя отношенія, то степень его можетъ быть понижена. Такъ напримѣръ, двучленное уравненіе $x^p - 1 = 0$, гдѣ p изображаетъ простое число, можетъ быть разложено на нѣсколько другихъ низшей степени, потому что всѣ мнимые корни этого уравненія могутъ быть выражены посредствомъ одного изъ нихъ; дѣйствительно, если изобразимъ чрезъ ϱ который нибудь изъ сихъ корней, то остальные $p - 2$ будутъ: $\varrho^2, \varrho^3, \varrho^4 \ldots\ldots \varrho^{p-1}$. Смот. BINOMES (ÉQUATIONS).

ABAISSEMENT DE L'HORIZON VISIBLE. ПОНИЖЕНІЕ ВИДИМАГО ГОРИЗОНТА.

ABAISSEMENT DE NIVEAU. ПОНИЖЕНІЕ УРОВНЯ.

ABAISSER UNE ÉQUATION. (Алг.) **ПОНИЗИТЬ СТЕПЕНЬ УРАВНЕНІЯ,** или просто *понизить уравненіе*. Смот. выше.

ABAISSER UN CHIFFRE. (Ариѳ.). **СНЕСТИ, СПУСТИТЬ ЦИФРУ** (при дѣленіи). *Abaisser une tranche. Снести, спустить грань* (при извлеченіи корней).

ABAISSER UNE PERPENDICULAIRE. (Геом) **ОПУСТИТЬ ПЕРПЕНДИКУЛЯРЪ.** *Abaisser une perpendiculaire sur une droite*, или *mener une perpendiculaire à une droite*; *опустить перпендикуляръ на прямую*, или *провести перпендикуляръ къ прямой*; то есть, провести такую линію, которая, встрѣтивъ данную прямую, составляла бы съ нею два прямые угла. *D'un point donné abaisser une perpendiculaire à un plan*; *изъ данной точки опустить перпендикуляръ на плоскость.*

ABAQUE или **ABACUS. АБАКА.** Гладкая доска, на которой древніе чертили Геометрическія фигуры и производили вычисленія. При употребленіи, ее покрывали весьма мелкимъ пескомъ или пылью. — **СЧЁТЫ** такого рода, какіе употребляются въ Россіи и въ нѣкоторыхъ странахъ Азіи. Хотя обыкновенно на счётахъ производятъ только два первыя дѣйствія, *сложеніе* и *вычитаніе*, но легко удостовѣриться, что всякія выкладки, зависящія отъ другихъ ариѳметическихъ дѣйствій, равно возможны. Въ началѣ 1829 года, Генералъ-Маіоръ *Свободскій* показывалъ въ С. Петербургѣ опыты необыкновенной скорости вычисленія на счетахъ, и, при пособіи правилъ придуманныхъ имъ на сей конецъ, онъ рѣшалъ съ большою ловкостію самыя сложныя ариѳметическія задачи, требующія не только умноженій, дѣленій и возвышенія въ степени, но также извлеченія корней квадратныхъ и кубичныхъ. Ясно, что все искусство счисленія на счётахъ, состоитъ въ принаровленіи къ нимъ извѣстныхъ правилъ Ариѳметики. Читателей, желающихъ имѣть полное понятіе о *способѣ Г. Свободскаго*, мы отсылаемъ къ слѣдующимъ сочиненіямъ: *Ариѳметика на счётахъ*, соч. *Петра Тихомирова*, С. П. Б. 1830 года. Das Russische Rechenbrett, соч. M. Asmuß. Leipzig 1831. — *Abaque de Pythagore*, *Abaque Pythagorique*, *Пиѳагорова таблица умноженія*. Смотри PYTHAGORE (TABLE DE).

ABÉLIENNES (TRANSCENDANTES или **FONCTIONS).** (Анал.) **АБЕЛЕВЫ ФУНКЦІИ.** Въ самомъ обширномъ смыслѣ, интегралы какихъ ни есть алгебрическихъ функцій. Преимущественно же даютъ названіе *абелевыхъ функцій* интеграламъ вида $\int \frac{Pdx}{Q\sqrt{R}}$, гдѣ P, Q, R изображаютъ цѣлыя алгебрическія функціи перемѣнной x, предполагая притомъ, что степень функціи R выше 4-ой.

Сіи функціи названы именемъ знаменитаго Норвежскаго математика *Абеля* потому, что онъ предложилъ основную теорему весьма примѣчательную, относящуюся къ суммѣ приведенныхъ выше интеграловъ. *Лежандръ*, который называетъ Абелевы функціи *ультра-эллиптическими* (*fonctions ultra-élliptiques*), раздѣляетъ ихъ на классы, по степени функціи R, и каждый классъ, подобно эллиптическимъ функціямъ, подраздѣляетъ на три рода. См. ÉLLIPTIQUES (FONCTIONS). Когда R 2-ой степени, то интегралъ $\int \frac{Pdx}{Q\sqrt{R}}$ выражаетъ логариѳмическія и круговыя функціи; когда степень функціи R равна 3 или 4, то получаются эллиптическія функціи трехъ родовъ. Далѣе начинаются, собственно говоря, *Абелевы функціи*: если R 5-ой или 6-ой степени, то $\int \frac{Pdx}{Q\sqrt{R}}$ будетъ *абелева функція 1-го класса*; если R 7-ой или 8-ой степени, то имѣемъ абелеву функцію *2-го класса*, и такъ далѣе. Изслѣдованія, относящіяся къ теоріи сего рода функцій, помѣщены во второмъ прибавленіи къ: *Théorie des fonctions élliptiques*, соч. Лежандра; а также въ извѣстномъ журналѣ: Journal für die reine und angewandte Mathematik, изд. A. L. Crelle.

ABERRATION. (Астр.) **АБЕРРАЦІЯ, ОТСТУПЛЕНІЕ СВѢТА.** Видимое движеніе свѣтилъ, происходящее отъ соединенія движеній свѣта и земли около солнца. Перемѣна въ положеніи неподвижныхъ звѣздъ, происходящая отъ сихъ движеній, по причинѣ своей малости, не замѣчена древними; и въ новѣйшія времена это явленіе не было предусмотрѣно теоріею, хотя оно есть необходимое слѣдствіе двухъ извѣстныхъ причинъ. Мы одолжены симъ важнымъ открытіемъ знаменитому Англійскому Астроному *Брадлею*, который былъ приведенъ къ нему случайно въ 1727 году, посредствомъ многихъ, весьма точныхъ и большими инструментами сдѣланныхъ наблюденій, предпринятыхъ имъ съ цѣлію опредѣлить годовой параллаксъ звѣздъ. Теорія аберраціи объясняется легко слѣдующимъ образомъ: Положимъ, что изъ звѣзды A (черт. 1 листъ I) исходитъ лучъ свѣта, пробѣгающій въ извѣстное время, разстояніе AB, отдѣляющее ее отъ земли B. Если этотъ лучъ встрѣтитъ въ m центръ верхняго отверстія трубы mc, то предполагая трубу неподвижною, онъ будетъ поглощенъ внутреннею ея поверхностію, или отразится отъ нея, и слѣдовательно, не достигнетъ глаза c наблюдателя. Но ежели труба будетъ двигаться параллельно самой себѣ изъ c въ B, и перейдетъ это пространство въ то же самое время, въ какое лучъ переходитъ путь mB, то очевидно, частица свѣта будетъ свободно двигаться по оси трубы; она будетъ находиться въ 0, когда труба приметъ положеніе $m'c'$; въ $0'$, при положеніи $m''c''$, и наконецъ достигнетъ глаза наблюдателя въ точкѣ B, когда труба придетъ въ положеніе $m'''B$. И такъ, свѣтъ хотя и движется по направленію AB, но не выходитъ изъ оси трубы, почему наблюдатель и будетъ относить изображеніе предмета по направленію BD, а не BA. Слѣдовательно онъ увидитъ звѣзду въ D, а не въ A. Разность между истиннымъ и видимымъ мѣстомъ звѣзды, то есть уголъ ABD, называется *угломъ аберраціи* (*angle d'aberration*).

Изобразивъ уголъ ABD, то есть уголъ аберраціи чрезъ α, и чрезъ β уголъ mcB, получимъ изъ треугольника Bmc

$$\text{Sin.}\alpha = \frac{cB}{mB} \cdot \text{Sin.}\beta.$$

Но, при построеніи чертежа, мы предполагали, что земля переходитъ разстояніе cB въ то самое время, въ которое свѣтъ пробѣгаетъ путь mB; слѣдовательно отношеніе $\frac{cB}{mB}$ можетъ быть замѣнено отношеніемъ скорости земли къ скорости свѣта, и какъ сія послѣдняя въ 10188 разъ болѣе первой, то получимъ для синуса угла аберраціи слѣдующее выраженіе:

$$\text{Sin.}\alpha = \frac{1}{10188} \cdot \text{Sin.}\beta.$$

Наименьшая величина аберраціи очевидно соотвѣтствуетъ предположенію $\beta = 0$; тогда и $\alpha = 0$; *наибольшая* же имѣетъ мѣсто при $\beta = 90^\circ$; тогда получимъ:

$$\text{Sin.}\alpha = \frac{1}{10188} = \text{Sin.}\,(20'', 253).$$

Этотъ выводъ согласуется съ показаніями наблюденій; дѣйствительно, Астрономы, занимавшіеся опредѣленіемъ наибольшей аберраціи, нашли результаты весьма близкіе между собою. *Брадлей* нашелъ 20″, 0; *Деламбръ* 20″, 253; *Бессель* 20″, 68; *Струве* 20″, 35; *Линденау* 20″, 61; *Бели* (Baily) 20″, 36; *Ричардсонъ* 20″, 45.

ABERRATION DES PLANÈTES. АБЕРРАЦІЯ ПЛАНЕТЪ. Аберрація перемѣняетъ также и мѣсто планетъ, какъ это доказываютъ наблюденія. Хотя она въ такомъ случаѣ есть слѣдствіе трехъ движеній, но вычисленіе ея простѣе аберраціи неподвижныхъ звѣздъ.

Пусть P (черт. 2, листъ I) планета, движущаяся со скоростію Pp во время T, и PD скорость свѣта въ то самое время. Лучъ свѣта, имѣя двѣ скорости Pp и PD, придетъ къ землѣ по діагонали PB. (Смот. PARALLÉLOGRAMME DES VITESSES.) Если землю примемъ неподвижною, то наблюдатель, находящійся въ B, увидитъ планету въ P въ то мгновеніе, когда она придетъ въ p. Положимъ теперь, что земля въ то же время T перешла отъ M къ B, со скоростію MB, и встрѣтилась съ лучемъ свѣта въ B; скорость PB луча, совокупясь со скоростію земли $BM = BC$, произведетъ сложное ощущеніе въ глазѣ по діагонали Bp' параллелограмма $p'PBC$, построеннаго на скоростяхъ PB и BC. И такъ наблюдатель увидитъ планету въ p', когда она дѣйствительно будетъ находиться въ p, и слѣдовательно обманется на уголъ pBp', равный суммѣ движеній планеты и земли. Еслибы планета двигалась въ одну сторону съ землею, то уголъ аберраціи равнялся бы разности движеній планеты и земли. Вообще, этотъ уголъ равенъ относительному движенію планеты.

Пусть m геоцентрическое движеніе планеты въ одну секунду времени, ϱ разстояніе планеты отъ земли, выраженное въ частяхъ большой полуоси земной орбиты; v время употребляемое свѣтомъ для прохожденія сей полуоси; $v\varrho$ будетъ время, которое свѣтъ употребилъ для прохожденія отъ планеты къ землѣ, и слѣдовательно $mv\varrho$ движеніе геоцентрическое планеты во время $v\varrho$. И такъ

$$\text{Аберр. планеты} = mv\varrho = m\varrho\ (493''),$$

ибо по наблюденіямъ найдено, что v, во времени, равно 8′, 13″, 2, и слѣдовательно въ частяхъ градуса $v = 493''$.

Если m будетъ означать движеніе планеты въ долготѣ, широтѣ, прямомъ восхожденіи или склоненіи, то послѣдняя формула дастъ аберрацію долготы, широты, прямаго восхожденія или склоненія. Аберрація планетъ въ широтѣ почти нечувствительна, потому что онѣ мало удаляются отъ плоскости эклиптики. Самая большая аберрація широты, которую имѣетъ Меркурій, почти равна 4″, 3.

Суточное вращеніе земли около оси также имѣетъ вліяніе на видимое мѣсто свѣтилъ, которое посему называется *суточною аберраціею* (*aberration diurne*). Пусть T звѣздное время; a, δ прямое восхожденіе и склоненіе звѣзды; φ широта мѣста; то суточная аберрація

$$\text{прям. восх.} = 0'', 31\ \text{Cos.}(T-a)\ \text{Cos}\ \varphi\ \text{Sec}\ \delta$$
$$\text{склонен.} = -\ 0'', 31\ \text{Sin.}(T-a)\ \text{Sin.}\,\delta\ \text{Cos.}\,\varphi$$

И такъ *Maximum* суточной аберраціи равенъ почти 0″, 31.

ABERRATION. (Опт.) **АБЕРРАЦІЯ. РАЗСѢЯНІЕ ЛУЧЕЙ.** Когда лучи свѣта проходятъ сквозь стекла зрительной трубы, то они не соединяются въ строгомъ смыслѣ въ фокусѣ, но разсѣеваются на маломъ пространствѣ, и тѣмъ самымъ производятъ не совсѣмъ ясное изображеніе предмета. Въ этомъ и состоитъ *аберрація*, которая происходитъ отъ двухъ причинъ:

1°. Отъ того, что не существуетъ никакой кривой поверхности, для которой всѣ лучи, исходя изъ одной точки, собрались бы опять въ одну точку. Въ особенности же сферическій видъ, употребляемый для стеколъ, ни въ какомъ случаѣ не можетъ произвести такого совокупленія однородныхъ лучей. Во всѣхъ стеклахъ и зеркалахъ замѣчаемъ это несовершенство, которое называется *сферическою аберраціею* или *аберраціею сферичности* или *шарообразности (aberration de sphéricité)*.

2°. Вторая причина состоитъ въ томъ, что одинъ и тотъ же предметъ, когда свѣтъ его сложный, производитъ нѣсколько изображеній различныхъ цвѣтовъ и величинъ, расположенныхъ одни за другими. Эта послѣдняя причина неясности изображеній несравненно значительнѣе первой; но она имѣетъ мѣсто только при употребленіи стеколъ, и не существуетъ для металлическихъ зеркалъ. Ее называютъ *аберраціею преломительности* или *хроматическимъ разсѣяніемъ лучей (aberration de réfrangibilité)*.

ABONDANT (NOMBRE). (Теор. Чис.) **ОБИЛЬНОЕ ЧИСЛО.** Такъ называется число, коего дѣлители, взятые вмѣстѣ, даютъ сумму, превышающую это самое число. Единица включается въ число дѣлителей. Напримѣръ: 36 есть *число обильное*, ибо сумма его дѣлителей 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 составляетъ $55 > 36$. Замѣтимъ, что всѣ обильныя числа *чётныя*.

Недостаточнымъ (nombre défectif) называется такое *число*, котораго дѣлители взятые вмѣстѣ, даютъ сумму меньшую самаго числа, напримѣръ 10; и дѣйствительно, дѣлители 10 суть: 1, 2 и 5, а сумма ихъ $8 < 10$.

Совершеннымъ числомъ (nombre parfait) называютъ такое, котораго дѣлители, взятые вмѣстѣ, равны самому числу. Напримѣръ 6, коего дѣлители 1, 2 и 3 составляютъ сумму 6; равнымъ образомъ число 28 есть совершенное, ибо дѣлители его 1, 2, 4, 7, 14, взятые вмѣстѣ, составляютъ 28. Вообще, если возьмемъ m такъ, чтобы разность 2^m-1 была *простымъ числомъ (nombre premier)*, то $N=2^{m-1}(2^m-1)$ будетъ *совершенное число*. Принимая послѣдовательно $m=2, 3, 5, 7, 13. ..$ получимъ *совершенныя числа* $N=6, 28, 496, 8128, 33550336, ...$ Замѣтимъ, что совершенное число всегда оканчивается цифрою 6 или 8.

ABORNEMENT. (Земл.) **РАЗВЕРСТАНІЕ, МЕЖЕВАНІЕ, РАЗГРАНИЧИВАНІЕ.**

ABORNER. (Земл.) **РАЗВЕРСТАТЬ, МЕЖЕВАТЬ, РАЗМЕЖЕВАТЬ, РАЗГРАНИЧИТЬ.** Ставить межи. *Aborner un champ, размежевать поле.*

ABOUTIR. (Геом.) **ПРИМЫКАТЬ. — СОЕДИНЯТЬСЯ.** *Une droite qui aboutit au centre du cercle; прямая, примыкающая къ центру круга. Tous les rayons vecteurs de l'ellipse aboutissent à ses deux foyers; всѣ радіусы векторы эллипса соединяются въ его фокусахъ.*

ABRÉGER. (Алг.) **СОКРАТИТЬ, УПРОСТИТЬ.** *Abréger un calcul; сократить вычисленіе, выкладку. En posant pour abréger; полагая для краткости, для простоты.*

ABRÉVIATION. (Алг.) **СОКРАЩЕНІЕ, УПРОЩЕНІЕ.** Приведеніе алгебрическаго выраженія или формулы къ простѣйшему виду. Такъ напримѣръ выраженіе

$$x^4-(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 \\ -(abc+abd+bcd)x+abcd,$$

приводится къ слѣдующему:

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s,$$

когда примемъ, *для краткости*,

$$-(a+b+c+d)=p,\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=q, \\ abc+abd+bcd=r,\ abcd=s.$$

ABSCISSE. (Геом.) **АБСЦИССА, ОТСѢЧЕННАЯ.** Одна изъ трехъ координатъ, опредѣляющихъ положеніе точки въ пространствѣ. Положимъ, напримѣръ, что плоская кривая AMB (черт. 3 л. 1) отнесена къ двумъ осямъ OX и OY. Ежели, изъ какой ни есть точки M кривой, проведемъ линію MP, параллельную оси OY, то очевидно, положеніе точки M опредѣлится длинами OP и PM. Первая изъ нихъ, начинающаяся отъ общаго пересѣченія осей, и оканчивающаяся въ P, именуется *абсциссою* точки M, а линія PM, ея *ординатою*. Абсцисса и ордината, разсматриваемыя въ совокупности, принимаютъ названіе *координатъ* точки M. Смот. COORDONNÉES. Точка O, въ которой пересѣкаются *координатныя оси* OX и OY, именуется *началомъ координатъ*. — Прежде, это наименованіе принималось въ смыслѣ болѣе тѣсномъ: подъ абсциссою разумѣли какую ни есть часть оси или діаметра кривой линіи, заключающуюся между ея вершиною и основаніемъ ординаты.

ABSENT. (Исч. Вѣр.) **ОТСУТСТВУЮЩІЙ.** Чтобы объяснить смыслъ задачи объ *отсутствующихъ*, приведемъ здѣсь слова *Дидерота* изъ Методической Энциклопедіи: „Когда Николай Бернулли, племянникъ знаменитыхъ Якова и Ивана Бернулли, „готовился защищать въ 1709 году въ Базелѣ „Диссертацію на степень Доктора Правъ, то, „имѣя столь же обширныя свѣденія въ Математикѣ какъ и въ Правовѣденіи, онъ рѣшился „выбрать такую тему, которая относилась бы „къ обѣимъ наукамъ. Предметомъ его диссер-„таціи было: *De usu artis conjectandi in Jure*, то „есть, *Употребленіе исчисленія вѣроятностей въ* „*Правовѣденіи.* Въ третьей главѣ этого сочи-„ненія, Николай Бернулли занимается опредѣле-„ніемъ того времени, по истеченіи котораго мо-„жно допустить, что *человѣкъ, находящійся въ* „*отсутствіи, умеръ.* По его мнѣнію, отсут-„ствующаго должно полагать умершимъ тогда „только, когда вѣроятность, что онъ умеръ, „вдвое болѣе той вѣроятности, что онъ живъ."

Далѣе Дидеротъ приводитъ примѣръ, основанный на этомъ правилѣ; онъ полагаетъ, что человѣкъ 20-ти лѣтъ выѣхалъ изъ своего отечества. Изъ таблицъ смертности, составленныхъ Членомъ Парижской Академіи Наукъ *Депарсіё (Deparcieux)*, явствуетъ, что изъ числа 814 человѣкъ 20-ти лѣтъ, только 271 достигаютъ 72 лѣтняго возраста; но такъ какъ 271 равно почти одной трети 814-ти, то ясно, что въ теченіи 52 лѣтъ, умерло двѣ трети всего числа 814. Слѣдовательно, по истеченіи 52 лѣтъ послѣ отъѣзда человѣка 20-ти лѣтъ, вѣроятность что онъ умеръ, вдвое болѣе той, что онъ еще живъ, и по теоріи Николая Бернулли, должно тогда, по законамъ, считать такого человѣка умершимъ.

ABSIDES. Смот. **APSIDES.**

ABSOLU (NOMBRE). устар. сл. (Алг.) **ПОСЛѢДНІЙ, ИЗВѢСТНЫЙ ЧЛЕНЪ** въ алгебрическомъ уравненіи, расположенномъ по нисходящимъ степенямъ неизвѣстной величины. Таковы, напримѣръ, количества — 5 и 7 въ уравненіяхъ

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0, \quad x^2 - 3x = 7.$$

Смот. HOMOGÈNE DE COMPARAISON.

ABSOLU въ другомъ значеніи, Смот. ABSTRAIT.

ABSTRAIT (NOMBRE). (Арие.) **ОТВЛЕЧЕННОЕ ЧИСЛО.** *Числомъ отвлеченнымъ* именуется совокупность единицъ въ томъ случаѣ, когда ихъ родъ не принимается въ соображеніе, какъ напримѣръ, когда говоримъ: *два, дважды, три, трижды,* и проч. Отношеніе двухъ величинъ одного рода есть также число *отвлеченное. Именованнымъ же числомъ (nombre concret)* называется собраніе единицъ извѣстнаго рода, напримѣръ: *два человѣка, три фунта,* и проч. — *Mathématiques abstraites* или *Mathématiques pures; чистая, отвлеченная Математика.* Смот. MATHÉMATIQUES.

ABSURDE (REDUCTION A L'). (Мат.) **ПРИВЕДЕНІЕ КЪ ПРОТИВОРѢЧІЮ, ДОВОДЪ КЪ НЕЛѢПОСТИ.** Въ доказательствахъ чрезъ *приведеніе къ противорѣчію*, выводятъ справедливость предложенія (положительнаго или отрицательнаго) основываясь на томъ умствованіи, что еслибы предложеніе не было допущено, то изъ этого самаго произошло бы какое нибудь явное противорѣчіе или невозможность.

Приведемъ здѣсь, изъ Геометріи древнихъ, примѣръ *довода къ нелѣпости.* Положимъ, требуется доказать, что площадь круга равняется прямоугольнику, составленному изъ полуокружности и радіуса. Показавъ предварительно, что въ кругѣ можно вписать, а также и описать около него такіе два многоугольника, что разность между каждымъ изъ нихъ и площадью круга можетъ быть уменьшена по произволенію, мы разсуждаемъ слѣдующимъ образомъ:

Если кругъ не равенъ упомянутому прямоугольнику, то онъ будетъ или болѣе или менѣе. Если онъ менѣе, то изобразимъ избытокъ прямоугольника количествомъ ε, по произволенію малымъ. Опишемъ около круга многоугольникъ, разнствующій отъ круга количествомъ, меньшимъ нежели ε. Площадь этого многоугольника будетъ равняться прямоугольнику, построенному на его полу-периметрѣ и на радіусѣ круга. По периметръ многоугольника болѣе окружности круга; слѣдовательно площадь многоугольника будетъ болѣе площади прямоугольника, составленнаго изъ полуокружности и радіуса; по предположенію же кругъ будетъ количествомъ ε менѣе сего послѣдняго прямоугольника, а площадь описаннаго многоугольника разнствуетъ отъ круга менѣе чѣмъ на количество ε. Слѣдовательно сія послѣдняя менѣе площади прямоугольника, построеннаго на полуокружности и радіусѣ; откуда надлежало бы заключить, что полуокружность болѣе полупериметра описаннаго многоугольника. Но это слѣдствіе очевидно есть нелѣпое, и такъ, *площадь круга не можетъ быть болѣе площади прямоугольника, составленнаго изъ полуокружности и радіуса.*

Принимая въ соображеніе вписанный многоугольникъ, докажемъ подобнымъ образомъ, что *площадь круга не можетъ быть болѣе площади упомянутаго прямоугольника.* Слѣдовательно, кругъ будетъ равенъ прямоугольнику, построенному на полуокружности и радіусѣ.

Вотъ, въ сущности, въ чемъ состоитъ доказательство посредствомъ *приведенія къ противорѣчію,* бывшемъ въ большомъ употребленіи у древнихъ Геометровъ. И нынѣ этотъ способъ употребляется не только въ Геометріи, но и въ Анализѣ, преимущественно же въ Теоріи Чиселъ.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ABSURDES. (Инт. Исч.) **НЕВОЗМОЖНЫЯ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ.** Такъ назвалъ *Эйлеръ* дифференціальныя уравненія, заключающія въ себѣ болѣе двухъ перемѣнныхъ, и не удовлетворяющія нѣкоторымъ извѣстнымъ условіямъ. Напримѣръ

$$Pdx + Qdy + Rdz = o$$

будетъ, по Эйлеру, *невозможнымъ дифференціальнымъ уравненіемъ,* если не выполнено условіе

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = o,$$

безъ котораго выраженіе $Pdx + Qdy + Rdz$ не можетъ обратиться въ полный дифференціалъ, на какую бы функцію перемѣнныхъ x, y, z оно не было помножено.

Эйлеръ полагалъ, что подобныя уравненія не допускаютъ никакихъ интеграловъ. *Монжъ,* въ Запискахъ Парижской Академіи Наукъ, за 1784 годъ, показалъ, что интегралъ уравненія такого рода, выражается не *однимъ уравненіемъ,* а *нѣсколькими вдругъ.* Впослѣдствіи, многіе Математики занимались симъ предметомъ, и усовершенствовали теорію Монжа. —

Такъ же назывались дифференціальныя уравненія, заключающія въ себѣ болѣе двухъ перемѣнныхъ, и въ которыхъ дифференціалы возвышены въ степени, или перемножены между собою. Напримѣръ:

$$dz^2 = dt^2 + dxdy + dy^2.$$

ABSURDE (Алг.) **МНИМЫЙ.** *Racines absurdes, мнимые корни.* Въ этомъ значеніи слово *absurde* почти вышло изъ употребленія, и замѣняется наименованіемъ IMAGINAIRE (Смот.).

AC.

ACCÉLÉRATION. (Мех.) **УСКОРЕНІЕ.** Приращеніе скорости движущагося тѣла отъ дѣйствія какой нибудь силы. Это слово противуполагается *замедленію* или *укосненію (retardation),* которыя означаютъ происшедшее уменьшеніе въ скорости движущагося тѣла.

ACCÉLÉRATRICE (FORCE). (Мех.) **УСКОРИТЕЛЬНАЯ, УСКОРЯЮЩАЯ СИЛА.** Въ буквальномъ смыслѣ, подъ симъ наименованіемъ слѣдовало бы разумѣть силу, отъ дѣйствія которой увеличивается скорость движущагося тѣла; но *ускорительную силу* принимаютъ въ значеніи болѣе обширномъ: такъ называютъ всякую силу, дѣйствующую на тѣло, раздѣленную на массу сего тѣла. Очень можетъ случиться, что отъ дѣйствія ускорительной силы, скорость тѣла вмѣсто того чтобы увеличиваться, будетъ, напротивъ того, уменьшаться. Правда, въ семъ послѣднемъ случаѣ, называютъ иногда такую силу *укоснительною (force retardatrice);* но сочинители объясняютъ этотъ терминъ только въ самомъ началѣ Динамики, когда разсматриваютъ силы вообще; въ приложеніяхъ же сей науки къ рѣшенію различныхъ задачъ, они употребляютъ наименованіе *ускорительной* силы, не принимая въ соображеніе того обстоятельства, ускоряетъ ли она или замедляетъ движеніе.

Ускорительная сила измѣряется дѣйствіемъ, производимымъ движущею силою на тѣло; она независима отъ количества инерціи сего послѣдняго; Смот. INERTIE. Алгебрическое выраженіе ускорительной силы есть *удвоенное пространство переходимое тѣломъ, раздѣленное на квадратъ времени.* Само собой разумѣется, что говоримъ только о томъ пространствѣ, которое будетъ перейдено отъ дѣйствія движущей силы, а независимое отъ нея, не принимается въ расчетъ. Это предполагаетъ, что движущая сила постоянная; если же она будетъ перемѣнная, то надобно принимать время безконечно малымъ, дабы тѣмъ избѣжать всякое ощутительное измѣненіе въ величинѣ силы. Впрочемъ, мы сознаемся, что сказанное нами объ ускорительной силѣ не довольно ясно; но понятіе о ней такъ тѣсно связано съ понятіями объ инерціи или массѣ, и о силахъ движущихъ, что, для полнаго уразумѣнія сихъ предметовъ, необходимо разсматривать ихъ въ совокупности, что старались сдѣлать по возможности удовлетворительнѣйшимъ образомъ въ статьѣ: FORCE (Смот.).

ACCÉLÉRÉ. (Мех.) **УСКОРЕННЫЙ.** *Mouvement accéléré, ускоренное движеніе.* Такое движеніе тѣла, въ которомъ скорость, отъ дѣйствія силъ, непрестанно увеличивается. Сему роду движенія противуполагается *замедленное* или *укосненное движеніе (mouvement retardé)*. Смот. MOUVEMENT, FORCE.

Mouvement uniformément accéléré. Равномѣрно, единообразно ускоренное движеніе. Когда приращенія скорости въ равныя времена равны, то тѣло движется *равномѣрно-ускореннымъ движеніемъ*: какъ напримѣръ падающія тѣла въ безвоздушномъ пространствѣ. Смот. CHUTE DES GRAVES.

ACCENT. ЗНАКЪ, ЧЕРТА, УДАРЕНІЕ. Черты употребляются весьма часто въ буквенныхъ вычисленіяхъ или по недостатку буквъ, или для обозначенія величинъ, имѣющихъ между собою какую либо аналогію. Онѣ пишутся чаще надъ буквою, хотя иногда и ставятъ ихъ снизу. Вотъ какъ произносятся обозначенныя ими буквы:

x' ..... (x prime)..... x со знакомъ, съ чертой
x''..... (x seconde) ... x съ двумя знаками, съ двумя чертами
x''' .... (x tierce)..... x съ тремя знаками
x^{IV} .... (x quarte).... x съ четырьмя знаками
и проч.

Когда желаютъ обозначить x съ неопредѣленнымъ числомъ знаковъ, напримѣръ съ m знаками, то, для избѣжанія обоюдности при означеніи степеней, заключаютъ m въ скобкахъ, и пишутъ $x^{(m)}$.

ACCENTUER. ОБОЗНАЧАТЬ, ОЗНАЧАТЬ ЧЕРТАМИ, ОТМѢЧАТЬ ЗНАКАМИ.

ACCÈS DE FACILE RÉFLEXION ET DE FACILE TRANSMISSION. (Опт.) **ПРИСТУПЫ НАИБОЛЬШАГО ОТРАЖЕНІЯ И ПРОХОЖДЕНІЯ СВѢТА.** Смот. ANNEAUX COLORÉS.

ACCÈSSIBLE (HAUTEUR). (Практ. Геом.) **ПРИСТУПНАЯ ВЫСОТА,** то есть такой предметъ, къ которому, при измѣреніи его, подойти можно.

ACESSOIRES (QUANTITÉS.) (Анал.) **ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЯ, ВВОДНЫЯ КОЛИЧЕСТВА.** Смот. AUXILIAIRE.

ACCIDENTEL (POINT). (Персп.) **СЛУЧАЙНАЯ ТОЧКА.** Точка на картинной плоскости, въ которой пересѣкаются перспективы сколькихъ угодно прямыхъ линій, параллельныхъ между собою. Чтобы получить эту точку, стоитъ только отъ глаза провести линію, параллельную даннымъ прямымъ; точка встрѣчи съ картинною плоскостію будетъ искомая.

ACCOLADES. ЛОМАННЫЯ СКОБКИ. Скобки вида $\{\ \}$, часто употребляемыя въ формулахъ нѣсколько сложныхъ. Смот. PARENTHÈSES.

ACCORDER (S'). (Алг.) **СОГЛАСОВАТЬСЯ, ЕДИНСТВОВАТЬ.** *Ces deux équations s'accordent entr'elles; сіи два уравненія согласуются, единствуютъ между собою,* то есть, доставляютъ одни и тѣ же значенія для неизвѣстной.

ACCOURCI. (Геом.) **СЖАТЫЙ.** *Cycloide accourcie* или *raccourcie; сжатая циклоида,* то есть такая, у которой основаніе менѣе окружности круга производящаго.

ACCROISSEMENT. (Анал.) **ПРИРАЩЕНІЕ. — ВОЗРАСТАНІЕ.** Такъ называется увеличеніе или уменьшеніе перемѣннаго количества, происшедшее или отъ непосредственнаго измѣненія этой самой перемѣнной, или отъ измѣненія другихъ величинъ, отъ которыхъ она зависитъ. Напримѣръ, имѣя уравненіе $y = f(x)$, и полагая, что для значенія $x + h$, y измѣняется въ $y + k$, обѣ величины h и k будутъ означать приращенія: первая, перемѣнной x, а вторая, перемѣнной y. Смот. TAYLOR (THÉORÈME DE).

Конечное приращеніе (accroissement fini) часто обозначается буквою Δ, поставленною передъ перемѣнною величиною или функціею; напримѣръ, если имѣемъ $y = f(x)$, то получимъ:

$$\Delta y = f(x) = \Delta f(x + \Delta x) - f(x).$$

Смот. DIFFÉRENCES FINIES.

Безконечно малое приращеніе (accroissement infiniment petit) означаютъ буквою d, и въ такомъ случаѣ оно называется *диффеpенціаломъ.* Смот. DIFFÉRENTIELLE, INFINIMENT PETIT.

ACHROMATIQUE или **INCOLORE.** (Опт.) **АХРОМАТИЧЕСКІЙ, БЕЗЦВѢТНЫЙ.** Отъ греческ. *χρῶμα, цвѣтъ*, и *α*, отрицательная частица (*безъ*). *Lunette achromatique, ахроматическая труба.* Такъ назвалъ *Лаландъ* трубу, въ которой изображенія представляются безъ радужныхъ цвѣтовъ, или, иначе, трубу уничтожающую аберрацію преломительности. Ахроматическое предметное стекло, въ такихъ трубахъ, составлено изъ двухъ родовъ стеколъ: изъ *кроунъ-гласса (crown-glass)* и *флинтъ-гласса (flint-glass)*.

Нѣкоторые почитаютъ извѣстнаго Англійскаго Оптика *Доллонда* изобрѣтателемъ ахроматическихъ стеколъ; но, по справедливости, честь сего изобрѣтенія принадлежитъ знаменитому *Эйлеру*, который первый замѣтилъ, въ устроеніи нашего глаза превосходный ахроматическій приборъ, и предвидѣлъ, что подражая въ этомъ отношеніи природѣ, можно произвести искусственное ахроматическое тѣло.

Прежде, предметныя ахроматическія стекла составлялись изъ двухъ двояко-выпуклыхъ стеколъ *(lentille)* кроунъ-гласса, отдѣленныхъ двояковогнутымъ изъ флинтъ-гласса. Нынѣ дѣлаютъ ихъ обыкновенно изъ двухъ стеколъ: изъ двояковыпуклаго кроунъ-гласса, соединеннаго съ менискомъ изъ флинтъ-гласса.

ACHROMATISME. АХРОМАТИЗМЪ, БЕЗЦВѢТНОСТЬ. Свойство такихъ предметныхъ стеколъ, которыя уничтожаютъ аберрацію преломительности. Смот. выше.

ACOUSTIQUE. (Физ.) **АКУСТИКА** (отъ греч. *ἀκουστική, слышащій*). Наука, занимающаяся законами распространенія звука и отношеніями, существующими между различными звуками. Тѣло, коего частицы приведены въ сотрясеніе, сообщаетъ это движеніе окружающему воздуху чрезъ посредство котораго сіи сотрясенія доходятъ до барабанной перепонки нашего уха, и производятъ въ немъ впечатлѣніе, называемое нами *звукомъ*. Чтобы звукъ былъ слышанъ, онъ долженъ происходить отъ довольно быстрыхъ сотрясеній; предѣлы скорости ихъ извѣстны по опытамъ. Тѣ же сотрясенія, коихъ скорости выходятъ изъ сихъ предѣловъ, не производятъ чувствительнаго впечатлѣнія.

Если часть тѣла приведена въ сотрясеніе какою либо причиною, то эти первоначальныя колебанія распространяются на большія разстоянія съ различными скоростями для различныхъ тѣлъ, и чѣмъ болѣе будетъ скорость распространенія, тѣмъ лучшій проводникъ звука будетъ тѣло. Вообще говоря, твердыя тѣла лучшіе проводники звука, нежели жидкія и воздухообразныя.

Когда звуки слѣдуютъ одинъ за другимъ безъ всякаго порядка и постепенности, то происходитъ просто *шумъ*: но если, при равномѣрныхъ промежуткахъ между звуками, отношенія ихъ одни къ другимъ будутъ подчинены извѣстнымъ правильнымъ законамъ, то произойдетъ *мелодія* или *музыкальный звукъ*.

Акустика, въ отношеніи однихъ только музыкальныхъ звуковъ, была предметомъ соображеній въ самой глубокой древности. *Пиѳагоръ* занимался ею, и открылъ отношенія между длинами сотрясающихся струнъ и издаваемыми ими звуками. Но какъ отрасль Физико-Математическихъ наукъ, Акустика является только въ концѣ XVII вѣка. Изъ числа Математиковъ, обогатившихъ ее своими умозрительными трудами, мы упомянемъ о *Нютонѣ*, *Лагранжѣ*, *Эйлерѣ*, *Пуассонѣ* и *Лапласѣ*. Опытною частію этой науки, занимались съ особенными успѣхами *Хладни (Chladni)* издавшій Акустику, *Веберъ*, *Саваръ*, *Каньяръ-Латуръ* и нѣкоторые другіе. Смот. CORDES VIBRANTES, MONOCORDE.

ACQUERIR. (Мех.) **ПРІОБРѢТАТЬ, ПОЛУЧАТЬ.** *Vitesse qu'un corps acquiert en tombant d'une certaine hauteur; скорость, пріобрѣтаемая тѣломъ, падающимъ съ нѣкоторой высоты.*

ACQUISE (VITESSE). ПРІОБРѢТЕННАЯ СКОРОСТЬ. Смот. VITESSE.

ACRE. (Метр.) **АКРЪ.** Поземельная мѣра, еще нынѣ употребляемая въ различныхъ государствахъ. *Англійскій* акръ, напримѣръ, заключаетъ въ себѣ 0,3703 десятины, или 0,4047 гектара.

ACTION. (Мех.) **ДѢЙСТВІЕ.** Такъ называется въ Механикѣ усиліе, изъявляемое силою на тѣло, или просто на матеріальную точку. *Action d'une force; дѣйствіе силы.* Смот. FORCE.

ACTION ÉGALE A LA RÉACTION. ДѢЙСТВІЕ РАВНО ПРОТИВОДѢЙСТВІЮ. Когда два или нѣсколько тѣлъ находятся въ такомъ положеніи, что, въ слѣдствіе ихъ непроницаемости, они дѣйствуютъ одно на другое, то взаимныя ихъ дѣйствія будутъ равны и направлены въ противныя стороны. Для ясности, положимъ что два тѣла m и m' дѣйствуютъ одно на другое; если p будетъ изображать дѣйствіе тѣла m на m', по извѣстному направленію, то та же самая сила p изобразитъ дѣйствіе тѣла m' на m, но только она будетъ направляться въ прямопротивную сторону. Говоря что дѣйствіе равно противодѣйствію, мы не разумѣемъ чтобы движеніе двухъ тѣлъ, подверженныхъ взаимному дѣйствію, было одинаково; судя по одному движенію тѣлъ, можно, напротивъ того, заключить что дѣйствіе не равно противодѣйствію; но равенство возстановится, когда примемъ въ соображеніе массы тѣлъ. Чѣмъ болѣе будетъ масса тѣла, тѣмъ меньшее измѣненіе произойдетъ въ его движеніи. Мы говорили теперь только о тѣлахъ, дѣйствующихъ одни на другія, послѣ прикосновенія; но тотъ же самый законъ допускается при взаимномъ дѣйствіи двухъ тѣлъ, находящихся въ нѣкоторомъ другъ отъ друга разстояніи. Такъ какъ, по нашему разумѣнію, тѣла, находящіяся одни отъ другихъ на разстояніяхъ, не могутъ дѣйствовать другъ на друга, то надобно искать причины такого взаимодѣйствія въ нѣкоторомъ рѣдчайшемъ веществѣ, наполняющемъ пространство; это вещество, подверженное непосредственному дѣйствію обоихъ тѣлъ, служитъ имъ, такъ сказать, проводникомъ для взаимнаго ихъ дѣйствія.

Здѣсь не мѣсто распространяться о причинахъ притяженія и другихъ силъ, обнаруживающихъ свое дѣйствіе на нѣкоторыхъ разстояніяхъ. Для подробностей о семъ предметѣ отсылаемъ читателей къ статьѣ: ATTRACTION. Скажемъ только, что *послѣдователи закона притяженія (Attractionnaires)*, то есть тѣ, которые утверждаютъ, что вещество одарено способностію притягивать на разстояніяхъ, допускаютъ также равенство дѣйствія и противодѣйствія. И такъ, земля притягиваетъ луну съ такою же напряженностію, какъ и сама притягиваема ею.

Равенство дѣйствія и противодѣйствія составляетъ послѣдній изъ трехъ законовъ движенія, приводимыхъ Нютономъ въ началѣ безсмертнаго своего творенія: *Philosophiae naturalis principia mathematica.* Этотъ законъ не доказывается, и не можетъ быть доказанъ *a-priori;* ибо, устранивъ показанія опыта, мы ничего не имѣемъ такого, откуда могли бы заключить, что два тѣла не могутъ производить различныя одно на другое дѣйствія. И такъ, надобно принять этотъ великій законъ природы за фактъ, выведенный изъ наблюденій, и предположить его общимъ, основываясь на одномъ наведеніи.

ACTION (PRINCIPE DE LA MOINDRE). НАЧАЛО НАИМЕНЬШАГО ДѢЙСТВІЯ. Такъ называется, весьма несвойственно, теорема, относящаяся къ элементарнымъ живымъ силамъ. Элементарною живою силою, въ опредѣленное мгновеніе, называется живая сила системы для того же самаго мгновенія, помноженная на элементъ времени, и *начало наименьшаго дѣйствія* состоитъ въ томъ, что *сумма элементарныхъ живыхъ силъ, взятая отъ одного опредѣленнаго мгновенія до другаго, будетъ наименьшая.* Дабы выразить аналитически это начало, изобразимъ чрезъ m, m', m'', ... массы тѣлъ составляющихъ какую угодно систему; чрезъ v, v', v'', ... скорости сихъ массъ въ концѣ времени t; и наконецъ чрезъ ds, ds', ds'', ... элементы кривыхъ, перейденныхъ сими тѣлами въ продолженіи того же времени t. Въ слѣдствіе *начала наименьшаго дѣйствія, интегралъ*

$$\int(m\,v\,ds + m'v'ds' + m''v''ds'' + \ldots\ldots),$$

изображающій сумму элементарныхъ живыхъ силъ (ибо $ds = v\,dt$, $ds' = v'dt$, $ds'' = v''dt, \ldots$), *взятый отъ одного положенія системы до другаго, будетъ наименьшій.*

Эта теорема тогда только имѣетъ мѣсто, когда сумма *возможныхъ моментовъ (moments virtuels)* будетъ полнымъ дифференціаломъ.

ACTION (QUANTITÉ D'). КОЛИЧЕСТВО ДѢЙСТВІЯ. Такъ называлъ Мопертюи *начало наименьшаго дѣйствія.* Смот. выше.

ACTION CAPILLAIRE. ВОЛОСНЫЯ ДѢЙСТВІЯ. Смот. CAPILLAIRE (ACTION), MOLÉCULE.

ACTION. АКЦІЯ, УЧАСТОКЪ. Сумма вносимая въ кассу какого либо Страховаго или Коммерческаго Общества. — *Свидѣтельство* или *облигація*, выдаваемая Директорами подобныхъ Обществъ тѣмъ лицамъ, которыя внесли въ ея кассу извѣстную сумму.

ACTIONNAIRE. АКЦІОНЕРЪ, УЧАСТНИКЪ. Тотъ, кто имѣетъ одну или нѣсколько акцій.

ACTIVITÉ (SPHÈRE D'). (Мех.) **СФЕРА ДѢЯТЕЛЬНОСТИ.** Взаимное дѣйствіе частицъ тѣла оказывается нечувствительнымъ, когда разстоянія ихъ дѣлаются ощутительными; но, на разстояніяхъ весьма малыхъ, дѣйствіе одной частицы на другую, можетъ быть весьма значительнымъ. Каждая частица дѣйствуетъ во всѣ стороны; и если вообразимъ вокругъ нея шаръ, описанный радіусомъ, равнымъ разстоянію, на которомъ дѣйствіе частицы дѣлается нечувствительнымъ, то этотъ шаръ принимаетъ названіе *сферы дѣятельности* той самой частицы. Частица находится *въ сферѣ дѣятельности* другой, когда взаимное ихъ разстояніе менѣе радіуса упомянутаго шара; если это разстояніе болѣе радіуса, то говоримъ, что частица *внѣ сферы дѣятельности*. Смот. MOLÉCULE.

ACTIVITÉ (MOMENT D'). (Мех.) **МОМЕНТОМЪ ДѢЯТЕЛЬНОСТИ** силы, приложенной къ движущейся точкѣ, называется произведеніе этой силы на элементъ кривой линіи описываемой точкою, и на косинусъ угла, составляемаго направленіями силы и элементомъ дуги. И такъ, изобразивъ чрезъ R движущую силу, чрезъ s дугу описываемую точкою, чрезъ ω уголъ, заключающійся между направленіями силы R и касательной къ кривой, *моментъ дѣятельности силы* R выразится чрезъ $R\,\mathrm{Cos.}\,\omega . ds$. Если силу R разложимъ на три составляющія X, Y и Z, параллельныя прямоугольнымъ осямъ, и сверхъ того, изобразимъ чрезъ x, y, z, координаты движущейся точки, то получимъ

$$R\,\mathrm{Cos.}\,\omega . ds = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Моментъ дѣятельности системы силъ есть сумма моментовъ дѣятельности каждой силы. Слѣдовательно, моментъ дѣятельности, очень часто, не иное что, какъ частный случай *возможнаго момента (moment virtuel)*. Смот. MOMENT, FORCE VIVE.

ACUTANGLE (TRIANGLE) или **TRIANGLE OXIGONE.** (Геом.) **ОСТРОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИКЪ.** Треугольникъ, у котораго всѣ углы острые.

ACUTANGULAIRE. (Геом.) **ОСТРОУГОЛЬНЫЙ.** *Section acutangulaire d'un cône. Остроугольное сѣченіе конуса*

ADDITION. (Ариѳ. и Алг.) **СЛОЖЕНІЕ.** Ариѳметическое или алгебрическое дѣйствіе, посредствомъ котораго опредѣляется величина, равная нѣсколькимъ другимъ, взятымъ вмѣстѣ. Числа, данныя для сложенія, называются *слагаемыми*, а окончательное число, или результатъ сложенія, *суммою*.

Ариѳметическое сложеніе можно раздѣлить на два рода: на *простое (simple)* и *сложное (composée)*. Сложеніе называется *простымъ*, когда всѣ *слагаемыя* будутъ цѣлыя числа; *сложнымъ*, когда всѣ слагаемыя, или нѣкоторыя изъ нихъ, заключаютъ въ себѣ дробныя части.

Алгебрическое сложеніе производится написавъ слагаемыя количества къ ряду, сохраняя передъ каждымъ членомъ собственный его знакъ. Если же слагаемыя заключаютъ въ себѣ подобные члены, то пишемъ ихъ одни подъ другими для того, чтобы легче было усмотрѣть сокращенія. Напримѣръ, положимъ что даны для сложенія три величины:

$$5a^7 - 2a^6b + 4a^5b^2$$
$$-20a^6b + 8a^5b^2 - 16a^4b^3$$
$$16a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5.$$

Мы ихъ напишемъ въ слѣдующемъ порядкѣ:

$$\text{Слагаемыя}\left\{\begin{array}{l} 5a^7 - 2a^6b + 4a^5b^2 \\ \quad -20a^6b + 8a^5b^2 - 16a^4b^3 \\ \qquad\qquad + 16a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5. \end{array}\right.$$
$$\text{Сумма: } 5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5.$$

И такъ, вмѣсто *девяти* членовъ, по сокращеніи, получаемъ только *пять*. Смот. RÉDUCTION, COEFFICIENT.

ADDITIF, ADDITIVE; ADDITIONNEL. (Ариѳ.). **ПРИДАТОЧНОЕ, ПРИБАВЛЯЕМОЕ.** *Quantité additive, придаточное количество. — Jour additif* или *intercalaire; дополнительный, вставочный день*; день, прибавляемый къ високосному году.

ADDITIONNER. (Ариѳ. и Алг.) **СЛОЖИТЬ;** найти сумму.

ADHÉRENCE и **ADHÉSION.** (Физ.) Смот. COHÉSION.

ADHÉRENT (POINT CONJUGUÉ). (Геом.) **ПРИКОСНОВЕННО - СОПРЯЖЕННАЯ ТОЧКА.** Смот. CONJUGUÉE (OVALE).

ADJACENT или **CONTIGU.** (Геом.) **СМЕЖНЫЙ.** — *Прилежащій. Angles adjacents, смежные углы,* то есть, такіе, которые имѣютъ общую сторону. — Обыкновенно подъ симъ наименованіемъ разумѣютъ углы, составляемые прямою линіею съ другою, продолженною съ обѣихъ сторонъ точки встрѣчи. Въ такомъ случаѣ, сумма двухъ смежныхъ угловъ равна двумъ прямымъ. — Въ многоугольникѣ *прилежащими сторонами (côtés adjacents)* называются стороны одного и того же угла многоугольника. — *Angles adjacents; прилежащіе углы.* Такъ называются углы, находящіеся на одной сторонѣ треугольника; таковы напримѣръ, A и B, относительно стороны AB въ треугольникѣ ABC.

ADJOINTE (FORME). (Теор. Чис.) **ПРИДАТОЧНЫЙ ВИДЪ.** Когда имѣемъ видъ $f = ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx'$, и положимъ $b^2 - a'a'' = A$, $b'^2 - aa'' = A'$, $b''^2 - aa' = A''$, $ab - b'b'' = B$, $a'b' - bb'' = B'$, $a''b'' - bb' = B''$, то видъ $F = Ay^2 + A'y'^2 + A''y''^2 + 2By'y'' + 2B'yy'' + 2B''yy'$ *Гауссъ* называетъ *придаточнымъ видомъ* въ отношеніи къ f. Что касается до изслѣдованія подобныхъ видовъ, то мы отсылаемъ читателей къ извѣстной книгѣ Гаусса: *Recherches Arithmétiques.*

ADRESSE DES JOUEURS. (Исч Вѣр.) **ИСКУССТВО ИГРОКОВЪ. — ЛОВКОСТЬ.** Искусство игрока равно его вѣроятности выиграть партію независимо отъ болѣе или менѣе счастливаго расположенія игры. Чтобы опредѣлить искусство игрока, надобно слѣдить его въ продолженіи значительнаго числа партій, играемыхъ имъ. Оно будетъ выражаться числомъ выигранныхъ имъ партій, раздѣленнымъ на совокупность всѣхъ сыгранныхъ. Изъ этого усматриваемъ, что величина сія, для одного и того же игрока, не всегда будетъ одинакова, ибо, она зависитъ отъ искусства его противниковъ; въ одномъ случаѣ она будетъ болѣе, въ другомъ менѣе, смотря по силѣ играющихъ съ нимъ. *Deux joueurs dont les adresses sont égales; два игрока равнаго искусства, два равноискусные игрока.*

AÉRAULIQUE. АЭРАВЛИКА. То же въ отношеніи Аэростатики и Аэродинамики, что *Гидравлика* въ отношеніи Гидростатики и Гидродинамики. И такъ, *Аэравлика* есть прикладная часть *Аэрометріи.* Смот. AÉROMÉTRIE.

AÉRIENNE (PERSPECTIVE). ВОЗДУШНАЯ ПЕРСПЕКТИВА. Смот. PERSPECTIVE.

AÉRIFORME (FLUIDE). (Физ.) **ВОЗДУХООБРАЗНАЯ ЖИДКОСТЬ.** Жидкость составленная изъ частицъ, коихъ отталкивающая сила превосходитъ притягательную, и которыя, въ слѣдствіе сего, стремятся къ взаимному удаленію. Смот. CORPS. Такого рода жидкости одарены совершенною упругостію, происходящею безъ сомнѣнія отъ отталкивающаго дѣйствія ихъ частицъ.

Упругая жидкость, заключенная со всѣхъ сторонъ, и подверженная внѣшнему давленію, сжимается болѣе и болѣе по мѣрѣ увеличенія этой силы, при чемъ уменьшеніе объёма жидкости бываетъ всегда въ прямомъ содержаніи претерпѣваемаго ею давленія. Упругія жидкости, при своемъ расширеніи отъ теплоты, равнымъ образомъ подчинены весьма правильнымъ законамъ. Опыты *Ге-Люссака* и *Дальтона,* а позже *Дюлона (Dulong)* и *Пети* показали, что объёмъ газа увеличивается на 0,00375 часть свою для каждаго градуса *Цельсіева* (стоградуснаго) термометра. И такъ, если изобразимъ чрезъ v_0 объёмъ газа при 0°, а чрезъ v объёмъ, соотвѣтствующій $\vartheta°$, то найдется $v = v_0(1 + 0{,}00375\,\vartheta)$, предполагая однакоже, что внѣшнее давленіе не измѣняется. Но еслибы давленіе перемѣнилось, то нашли бы другое выраженіе для v; означивъ чрезъ p_0 давленіе при 0°, соотвѣтствующее объёму v_0, и чрезъ p давленіе при температурѣ $\vartheta°$, объёмъ v опредѣлится формулою $v = \frac{p_0}{p}\,v_0(1 + 0{,}00375\,\vartheta)$.

Полезно также имѣть отношеніе, существующее между плотностію упругой жидкости, претерпѣваемымъ имъ давленіемъ и температурою. Чтобы получить такую зависимость, пусть будетъ ϱ_0 и ϱ плотности жидкости, соотвѣтствующія температурамъ 0° и $\vartheta°$; изобразивъ по прежнему чрезъ v_0, p_0 и v, p объёмы и давленія, относящіеся къ 0 и ϑ градусамъ, получимъ, $\varrho_0 v_0 = \varrho v$, и, подставляя вмѣсто p приведенное выше значеніе $\frac{p_0}{p}\,v_0(1 + 0{,}00375\,\vartheta)$, найдемъ $p = \frac{p_0}{\varrho_0}\,\varrho(1 + 0{,}00375\,\vartheta)$. Если изобразимъ чрезъ k постоянное отношение $\frac{p_0}{\varrho_0}$, то последнее равенство приметъ видъ

$$p = k\varrho(1 + 0,00375\,\vartheta);$$

это уравненіе заключаетъ въ себѣ законъ зависимости, связующій между собою плотность жидкости ϱ, упругость ея p и температуру ϑ. Формула сія необходима для опредѣленія условій равновѣсія или движенія упругихъ жидкостей.

Замѣтимъ впрочемъ, что справедливость сихъ формулъ подтверждена опытами только между предѣлами -36° и $+360^\circ$ стоградуснаго термометра. Внѣ сихъ предѣловъ, правильность приведеннаго закона подвержена сомнѣнію.

AÉRODYNAMIQUE. АЭРОДИНАМИКА. Часть Гидродинамики, излагающая законы движенія воздухообразныхъ жидкостей. Нынѣ, Аэродинамику не отдѣляютъ отъ Гидродинамики. Смот. HYDRODYNAMIQUE.

AÉROMÉTRIE или **AIROMÉTRIE. АЭРОМЕТРІЯ, ВОЗДУХОЗНАНІЕ.** Наука, занимающаяся свойствами воздуха, относительно законовъ его движенія, упругости и проч. Аэрометрія входитъ очевидно въ область Гидродинамики. Смот. HYDRODYNAMIQUE.

AÉRONAUTIQUE или **AÉROSTATION. АЭРОНАВТИКА, ВОЗДУХОПЛАВАНІЕ.** Искусство подниматься и плавать въ воздухѣ посредствомъ *аэростата* или *воздушнаго шара*. Смот. ниже.

AÉROSTAT, BALLON или **MONGOLFIER. АЭРОСТАТЪ, ВОЗДУШНЫЙ ШАРЪ, МОНГОЛЬФІЕРЪ.** *Аэростатомъ* называется машина, посредствомъ которой можно подняться на воздухъ и плавать въ немъ. Изобрѣтеніе аэростатовъ принадлежитъ *Іосифу Монгольфіеру*, который произвелъ первый опытъ *воздухоплаванія* 1782 года, въ Авиньонѣ. Однакоже Англичане оспариваютъ у Французовъ честь сего открытія, утверждая, что Докторъ *Блакъ (Black)*, еще въ 1767-мъ и 1768-мъ годахъ на читанныхъ имъ публичныхъ лекціяхъ, объяснилъ возможность такого прибора, который, будучи легче атмосфернаго воздуха, долженъ плавать въ немъ; онъ даже объявилъ, что въ непродолжительномъ времени приступитъ къ устроенію придуманной имъ машины: но многочисленныя занятія Доктора не позволили ему довершить сіи опыты. Мы должны также упомянуть и о нѣкоторомъ *Кавалло (Cavallo)*, который, въ началѣ 1782 года, прежде Монгольфіера, производилъ опыты по предмету воздухоплаванія; но они не имѣли желаннаго успѣха.

Правила науки о воздухоплаваніи основаны на законахъ тяжести и упругости воздухообразныхъ жидкостей; слѣдовательно, должно отнести почти всю теоретическую часть этого искусства въ Гидростатикѣ.

AÉROSTATIQUE. АЭРОСТАТИКА. Часть Гидростатики, предлагающая законы равновѣсія воздухообразныхъ жидкостей. Смот. HYDROSTATIQUE.

AF.

AFFÉCTÉ. (Алг.) **СОПРОВОЖДАЕМЫЙ, ПОМНОЖЕННЫЙ;** напримѣръ, въ выраженіи $7x^2$, x^2 *сопровождается* множителемъ 7. *Quantité afféctée du signe + ou —; количество сопровождаемое знакомъ + или —.*

AFFÉCTÉE (ÉQUATION). (Алг.) Устар. выраж. **МНОГОЧЛЕННОЕ УРАВНЕНІЕ.** Алгебрическое уравненіе съ одною неизвѣстною, заключающее въ себѣ болѣе двухъ членовъ; напримѣръ: $x^4 - x^2 + 2x - 3 = 0$.

AFFÉCTION. Устар. сл. **ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ.** Какое нибудь свойство кривой линіи. *Cette courbe a une telle afféction; эта кривая имѣетъ такую-то принадлежность, такое-то свойство.* Преимущественно употребляется въ этомъ смыслѣ слово *propriété (свойство).*

AFFIRMATIF, то же что **POSITIF.** (Алг.) **ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ.** *Quantité affirmative* или *quantité positive; положительное количество.* Смот. POSITIF.

AG.

AGE DE LA LUNE. (Астр.) **СТАРОСТЬ ЛУНЫ.** Число дней прошедшихъ отъ новолунія. Старость луны, для даннаго дня, опредѣляется посредствомъ *эпакты* того года, къ которому предложенный день принадлежитъ. Смот. ÉPACTE.

AGENT. (Мех.) **ДѢЯТЕЛЬ, ДѢЙСТВОВАТЕЛЬ.** Сила производящая или стремящаяся произвести движеніе.

AGÉOMÉTRIE или **AGÉOMÉTRÉSIE. АГЕОМЕТРІЯ.** Не по правиламъ Геометріи. — Незнаніе Геометріи.

AGIR. (Мех.) **ДѢЙСТВОВАТЬ.** Производить какое нибудь дѣйствіе. Когда говоримъ въ Механикѣ, что сила *дѣйствуетъ* на тѣло, то разумѣемъ, что она приводитъ, или стремится привести тѣло въ движеніе. Смот. ACTION.

AGRAIRE (MESURE). (Метр.) **ПОЗЕМЕЛЬНАЯ МѢРА.** Мѣра поверхности земли, напримѣръ: *десятина*, французскій *аръ*, *арпанъ*, *акръ* и проч.

AGRÉGAT COMBINATOIRE. (Анал.) **СОВОКУПИТЕЛЬНЫЙ АГРЕГАТЪ.** Смот. COMBINATOIRE (ANALYSE).

AI, AJ.

AIGU. (Геом.) **ОСТРЫЙ.** *Angle aigu, острый уголъ.* Смот. ANGLE.

AIGUILLE. СТРѢЛКА, УКАЗАТЕЛЬ, СТИЛЬ, ТѢННИКЪ, ИГЛА. *Aiguille d'un cadran; тѣнникъ, указатель* въ солнечныхъ часахъ. *Aiguille aimantée, магнитная стрѣлка.*

AILE. КРЫЛО. (Мех.) *Ailes d'un moulin. Крылья мельницы.*

AILERON или **AUBE**; то же что *Aile*.

AIMANT. (Физ.) **МАГНИТЪ.** См. MAGNÉTISME.

AIMANTÉ. (Физ.) **НАМАГНИЧЕННЫЙ; МАГНИТНЫЙ.**

AIR. (Физ.) **ВОЗДУХЪ.** Земная атмосфера; Смот. ATMOSPHÈRE.

AIRE. (Геом.) **ПЛОЩАДЬ.** Пространство, ограниченное со всѣхъ сторонъ или прямыми линіями, или кривыми, или еще, и тѣми и другими. *L'aire du cercle, de la parabole; площадь круга, параболы.*

Surface (поверхность) употребляется также въ Геометріи въ значеніи слова *aire;* но преимущественно разумѣютъ подъ *surface* просто видъ поверхности, устраняя всякое понятіе о ея предѣлахъ.

Плоская криволинейная площадь опредѣляется слѣдующимъ образомъ: если изобразимъ чрезъ x и y прямоугольныя координаты кривой линіи, ограничивающей искомую площадь, то сія послѣдняя выразится интеграломъ $\int ydx$, взятымъ между надлежащими предѣлами относительно абсциссы x.

Напримѣръ, еслибы желали найти площадь *параболическихъ* кривыхъ, опредѣляемыхъ уравненіемъ $y^{m+n} = p^m x^n$, то нашли бы

$$\int ydx = \int p^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}} dx = \frac{p^{\frac{m}{m+n}} \cdot x^{\frac{n}{m+n}+1}}{\frac{n}{m+n}+1} + C$$

$$= \frac{m+n}{m+2n} xy + C.$$

Принимая начало площади при вершинѣ параболы, будетъ $C = 0$; слѣдовательно

$$\int ydx = \frac{m+n}{m+2n} xy.$$

Для *Аполлоніевой* параболы, опредѣляемой уравненіемъ $y^2 = px$, имѣемъ $m = 1$, $n = 1$, почему площадь ея равна $\frac{2}{3}xy$.

Что касается до *площади кривой поверхности*, то она опредѣляется двойнымъ интеграломъ $\iint dxdy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$, гдѣ x, y, z, изображаютъ прямолинейныя координаты поверхности, а $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$ частныя производныя перемѣнной зависимой z, относительно x и y. См. QUADRATURE.

AIRES (PRINCIPE DE LA CONSERVATION DES). (Мех.) **НАЧАЛО СОХРАНЕНІЯ ПЛОЩАДЕЙ.** Смот. DYNAMIQUE.

AIRES (LOI DES). (Мех.) **ЗАКОНЪ ПЛОЩАДЕЙ.** Смот. KEPLER (LOIS DE).

AIROMÉTRIE. АЭРОМЕТРІЯ. См. AÉROMÉTRIE.

AISSIEU. (Мех.) **ОСЬ. — ВЕРЕТЕНО.** Это слово рѣдко употребляется. Смот. AXE.

AJOUTTER. (Ариѳ.) **ПРИДАТЬ, ПРИЛОЖИТЬ, ПРИБАВИТЬ.**

AJUTAGE или **AJUTOIR.** (Гидрод.) **НАСАДКА, ВОРОНКА.** Такъ называется металлическая трубка, имѣющая обыкновенно видъ цилиндра, или усѣченнаго конуса. Дабы вода могла истекать, или бить вверхъ при устроеніи водомётовъ, насадка привинчивается къ водопроводной трубѣ. Количество воды, доставляемое насадкою, почти пропорціонально произведенію площади ея сѣченія на квадратный корень изъ высоты уровня воды въ водохранилищѣ надъ сею самою насадкою. Смот. CONTRACTION DE LA VEINE FLUIDE.

ALEMBERT (PRINCIPE DE D'). (Мех.) **Д'АЛАМБЕРТОВО НАЧАЛО.** Смот. DYNAMIQUE.

ALGÉBRAIQUE; не упот. Смот. ALGÉBRIQUE.

ALGÈBRE. АЛГЕБРА. Алгебру обыкновенно опредѣляютъ наукою о величинахъ вообще; но это опредѣленіе принадлежитъ всему чистому Анализу, между тѣмъ какъ Алгебра есть только отрасль сего послѣдняго; и такъ надлежитъ къ этому опредѣленію прибавить, въ чемъ состоитъ отличительное различіе между Алгеброю и прочими частями Анализа. Математическій Анализъ можно раздѣлить на три части: 1) *Алгебра*, включая въ нее и *Ариѳметику*. 2) *Теорія Чиселъ* и 3) *Интегральное исчисленіе* или *Трансцендентный Анализъ*. Алгебра и Интегральное исчисленіе объясняютъ сущность различныхъ дѣйствій, производимыхъ надъ числами; Теорія Чиселъ или трансцендентная Ариѳметика занимается свойствами чиселъ. Впрочемъ, мы не выдаемъ сіе различіе за безусловное, ибо, Теорія Чиселъ и прочія отрасли Анализа заимствуются однѣ отъ другихъ, почему весьма трудно, а можетъ быть и невозможно, опредѣлить съ точностію то, что̀ принадлежитъ собственно къ Теоріи Чиселъ, и что̀ входитъ въ область другихъ частей Анализа.

Всѣ дѣйствія надъ числами могутъ быть приведены къ шести слѣдующимъ: *сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, извлеченіе корней и рѣшеніе численныхъ уравненій*. Смот. ARITHMÉTIQUE. Производя сіи дѣйствія надъ числами, получаемъ другія числа, которыя называются *функціями* первыхъ. Случается, что сказанныя дѣйствія должны быть повторены неограниченное число разъ; тогда, происходящее отъ сего число или функція именуется *трансцендентною*, и ученіе о ея свойствахъ принадлежитъ интегральному анализу. Но если число дѣйствій, которымъ слѣдуетъ подвергнуть число, будетъ ограниченное, какъ бы оно впрочемъ велико не было, то функція называется *алгебрическою*, и изслѣдованіе ея свойствъ относится къ Алгебрѣ. И такъ, можно опредѣлить Алгебру, *наукою о величинахъ вообще, когда подвергаемъ ихъ дѣйствіямъ алгебрическимъ*. Замѣтимъ, что это опредѣленіе не заключаетъ въ себѣ ложнаго круга: ибо, употребляя въ немъ реченіе *дѣйствія алгебрическія*, мы имѣли только въ виду сокращеніе рѣчи, а выше объяснили, что подъ симъ наименованіемъ разумѣемъ ограниченное число дѣйствій, составленныхъ изъ сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, извлеченія корней и рѣшенія уравненій.

Основныя начала Алгебры почерпнуты изъ Метафизики; алгебристы, для избѣжанія всякой невразумительности, бо̀льшею частію не озабочиваются изслѣдованіемъ способа, которымъ пріобрѣтаются понятія о числахъ. Нѣтъ сомнѣнія, что эти понятія существуютъ, и что они основаны на дѣйствительности; первое дѣло алгебриста усвоить ихъ и выразить въ надлежащемъ видѣ. Первоначальныя дѣйствія надъ числами раждаются изъ понятій нашихъ о величинахъ, и съ сими понятіями сопряжено свойство величинъ, по которому онѣ могутъ соединяться и разлагаться. Отсюда проистекаютъ непосредственно сложеніе и вычитаніе; что касается до умноженія и дѣленія, то они выводятся изъ послѣднихъ двухъ, послѣ чего, самымъ естественнымъ образомъ, получаются окончательныя два дѣйствія: извлеченіе корней и рѣшеніе численныхъ уравненій.

Положимъ, что какое либо дѣйствіе, производимое надъ двумя величинами a и b, доставляетъ третью величину c; можно предложить себѣ вопросъ (что̀ дѣйствительно и бываетъ), посредствомъ какого дѣйствія, полагая b и c извѣстными, опредѣляется a? Или, по извѣстнымъ a и c, какъ найти b? И такъ, изъ допущеннаго дѣйствія, проистекаютъ другія.

Когда дѣйствія приводятся къ первымъ четыремъ, то происходящія отъ сего функціи называются *раціональными*. Алгебра занимается ими прежде другихъ, по причинѣ ихъ простоты. Простѣйшія же изъ нихъ суть тѣ, въ которыя не входитъ дѣленіе; ихъ называютъ *функціями цѣлыми*. Но если надобно извлекать корни или рѣшать уравненія, то получаемая функція именуется *ирраціональною*. Чаще всего, величина такой функціи, по даннымъ значеніямъ перемѣнныхъ, не можетъ быть выведена иначе, какъ по приближенію; мы говоримъ *чаще всего* для того только, чтобы распространить послѣднее опредѣленіе на случай функцій раціональныхъ, но представляющихся въ ирраціональномъ видѣ. Что касается до функцій чисто ирраціональныхъ, то ихъ точныя величины ни въ какомъ случаѣ получены быть не могутъ; но есть положительныя правила, посредствомъ которыхъ приближаемся къ нимъ до какой угодно степени. Смот. статьи FONCTION, APPROCHÉE (VALEUR). Кромѣ сихъ величинъ, о которыхъ мы не имѣемъ совершенно-полнаго понятія, вводятъ еще въ Алгебру количества, вовсе не существующія, и которыя по этому именуются *мнимыми*. Впрочемъ, всѣ мнимыя количества, разсматриваемыя Алгеброю, приводятся къ одному такого свойства, что квадратъ его равенъ -1. И такъ, мы имѣемъ о квадратѣ весьма ясное понятіе, между тѣмъ какъ самое количество вовсе не существуетъ. Замѣтимъ, что алгебристы заслуживаютъ нареканіе за введенный ими знакъ $\sqrt{-1}$, которымъ они изображаютъ мнимое количество. Этотъ знакъ присвоенъ существенно-возможному дѣйствію, а въ настоящемъ случаѣ, нѣтъ возможности произвести обозначаемое имъ извлеченіе. Мы думаемъ, что гораздо бы лучше было замѣнить знакъ $\sqrt{-1}$, какою либо буквою, напримѣръ, буквою i, разумѣя подъ нею несуществующее количество, коего квадратъ равенъ отрицательной единицѣ. Въ разсужденіи пользы и употребленія мнимыхъ выраженій, мы отсылаемъ къ трактатамъ объ Алгебрѣ. Смот. также въ этомъ Лексиконѣ статью IMAGINAIRE.

Излишне было бы входить въ бо́льшія подробности относительно сущности Алгебры; теперь представимъ читателямъ нашимъ краткій историческій очеркъ успѣховъ этой науки.

Слово *Алгебра* производятъ нѣкоторые отъ собственнаго имени *Геберъ*, знаменитаго Арабскаго философа, будто бы изобрѣтшаго сію науку. Есть еще другія этимологіи; но всѣ онѣ болѣе или менѣе неправдоподобны. Этимологія, приводимая Италіанцемъ *Лукою де Бурго*, который одинъ изъ первыхъ занимался Алгеброю въ Италіи, заслуживаетъ, по мнѣнію *Монтюкла*, наиболѣе довѣрія. Италіанскій писатель производитъ названіе этой науки отъ арабскаго: *algebra v' almucabala*; подъ соединеніемъ сихъ двухъ словъ, Аравитяне именно разумѣли то, что впослѣдствіи на Востокѣ названо *Алгеброю*. Лука де Бурго переводитъ эти два слова: *restauratio et oppositio*, то есть: *возстановленіе* и *противуположеніе*. Послѣднее слово выражаетъ довольно удачно одно изъ главныхъ дѣйствій Алгебры, именно, составленіе *уравненій*, которыя дѣйствительно получаемъ какъ бы чрезъ *противуположеніе* или *сравненіе* величинъ. Что касается до слова *возстановленіе*, то трудно объяснить, какое оно имѣетъ отношеніе къ Алгебрѣ; всѣ догадки остались неудовлетворительны. По этой самой причинѣ многіе Италіанцы называли Алгебру *Алмукабала*; извѣстный *Карданъ*, въ нѣкоторыхъ своихъ сочиненіяхъ, употребилъ это самое названіе. Какъ бы то ни было, но теперь наименованіе: *Алгебра* принято всѣми Математиками.

Нѣкоторые приписываютъ изобрѣтеніе Алгебры Аравитянамъ; но бо́льшею частію думаютъ, что ея открытіе принадлежитъ Грекамъ, ибо Греческій философъ *Діофантъ* первый писалъ объ этой наукѣ; См. INDÉTERMINÉE (ANALYSE). Онъ написалъ объ ней 13 книгъ, изъ числа которыхъ осталось только 6. *Ксиландеръ* первый издалъ ихъ въ 1575 году. Впослѣдствіи, онѣ были исправлены и дополнены комментаріями членомъ Французской Академіи *Башетъ-де-Мезиріакомъ*, а позже, извѣстнымъ *Ферматомъ*.

Леонардъ Боначчи, изъ Пизы, возвратясь изъ путешествія по Греціи и Азіи, написалъ, около 1150 года, первый трактатъ объ Алгебрѣ на Западѣ. Сочиненіе о той же наукѣ *Луки де Бурго*, о которомъ упомянуто выше, было напечатано въ Венеціи въ 1494 году. Вотъ собственно тѣ, которымъ одолжена Европа введеніемъ Алгебры. И послѣ нихъ, до временъ *Віета*, Италія была такъ сказать, разсадникомъ знаменитыхъ Алгебристовъ. *Сципіонъ Ферреи*, по свидѣтельству *Кардана*, открылъ первый рѣшеніе частнаго случая уравненій 3-й степени. *Тарталеа* или *Тартагліа*, съ своей стороны, нашелъ полное рѣшеніе ихъ; Смот. CARDAN. *Карданъ, Рафаэлъ Бомбелли* [Смот. BIQUADRATIQUE (ÉQUATION)] споспѣшествовали распространенію сего открытія. *Лудовикъ Феррари* изобрѣлъ способъ для рѣшенія уравненій 4-й степени. Конечно, въ настоящемъ состояніи Алгебры, всѣ эти открытія должны казаться весьма маловажными; но если примемъ въ соображеніе ограниченность средствъ только-что раждающейся науки, то не можемъ отказать въ геніи Италіанскимъ Алгебристамъ.

Во второй половинѣ XVI вѣка, знаменитый *Віетъ,* которымъ по справедливости гордится Франція, усовершенствовалъ знакоположенія Алгебры, и сдѣлалъ въ этой наукѣ важныя открытія. Онъ первый ввелъ буквы для изображенія величинъ извѣстныхъ, показалъ составленіе коэффиціентовъ въ алгебрическихъ уравненіяхъ, различныя преобразованія сихъ уравненій относительно ихъ корней, и предложилъ новый остроумный способъ для рѣшенія уравненій 3-й и 4-й степени. Онъ же придумалъ способъ для рѣшенія, по приближенію, численныхъ уравненій какой ни есть степени. Способъ сей имѣетъ большое сходство съ тѣмъ, который употребляется при извлеченіи корней изъ неточныхъ степенныхъ количествъ.

Послѣ Віета, Алгебра получила значительныя приращенія отъ трудовъ *Гарріота (Harriot), Угхтреда (Oughtred), Вальиса (Waillis)* и нѣкоторыхъ другихъ.

Декартъ, положившій основаніе Аналитической Геометріи, также извѣстенъ своими изслѣдованіями въ чистой Алгебрѣ. И нынѣ еще, во всѣхъ курсахъ, находимъ открытое имъ *правило знаковъ.* Смот. DÉCARTES (RÈGLE DES SIGNES DE).

Нютонъ обогатилъ также Алгебру многими открытіями, бо́льшею частію помѣщенными въ его *Arithmetica Universalis. Разложеніе въ степень двучленнаго количества,* способъ *послѣдовательныхъ подстановленій* для приближенія къ корнямъ алгебрическихъ уравненій и *Аналитическій параллелограммъ* суть самыя примѣчательныя. Смот. BINOME DE NEUTON, APPROCHÉE (VALEUR), PARALLÉLOGRAMME ANALYTIQUE.

Послѣ Нютона занимались съ бо́льшимъ или меньшимъ успѣхомъ алгебрическими теоріями *Албертъ Жирардъ, Гуддъ (Hudde)* изъ Амстердама, *Де Гюа (De Gua), Ролль* [Смот. CASCADES (MÉTHODE DES)], *Фонтенъ* и нѣкоторые другіе.

Эйлеръ измѣнилъ видъ всѣхъ математическихъ наукъ. До сего великаго Геометра, Алгебра была сборникомъ способовъ синтетическихъ и аналитическихъ. Онъ углубился въ свойства функцій алгебрическихъ, употребляя одинъ анализъ, и далъ Алгебрѣ и вообще всему математическому анализу тотъ видъ, въ которомъ они теперь предлагаются. Конечно, анализъ обогатился послѣ Эйлера многими открытіями: но сія отрасль столько обязана его трудамъ, что нѣкоторые математики присвоили ей названіе *Эйлерова анализа.* Эйлеръ положилъ основаніе настоящей теоріи уравненій; онъ доказалъ весьма важное предложеніе, состоящее въ томъ, что всякое уравненіе можетъ разложиться на вещественные множители 1-й и 2-й степени. Смот. FACTEUR. Однимъ словомъ, онъ указалъ математикамъ путь къ дальнѣйшему распространенію всѣхъ теорій алгебрическихъ. Самъ знаменитый Лагранжъ сознается, что онъ только усовершенствовалъ теоріи Эйлера. Но прежде, нежели будемъ говорить о трудахъ Лагранжа, мы должны сказать, что современники Эйлера, *Даніилъ Бернулли, Д'Аламбертъ* и *Клеро* оказали также болѣе или менѣе важныя услуги алгебрическому анализу. Первый изъ нихъ предложилъ способъ для разысканія по приближенію корней уравненій [Смот. APPROCHÉE (VALEUR)]; второй, своими изслѣдованіями о рядахъ и о свойствахъ мнимыхъ количествъ, а третій, способами исключенія неизвѣстныхъ между нѣсколькими уравненіями. Мы не пройдемъ молчаніемъ трудовъ *Безу, Чирнгауза, Варинга* и *Вандермонда,* которые занимались общимъ рѣшеніемъ уравненій какой ни есть степени; они предложили на сей конецъ разные остроумные пріёмы, которые могутъ быть полезны въ другихъ случаяхъ, но не достигаютъ предполагаемой цѣли; ихъ попытки привели только къ новымъ способамъ рѣшенія уравненій 3-й и 4-й степени. Впрочемъ надобно исключить Вандермонда, который рѣшилъ уравненіе $x^{11} - 1 = 0$, или, происходящее отъ него уравненіе 5-й степени:

$$z^5 + z^4 - 4z^3 - 3z^2 + 3z + 1 = 0.$$

Лагранжъ написалъ подробное сочиненіе о рѣшеніи численныхъ уравненій: *Traité de la résolution des équations numériques.* Онъ предлагаетъ въ немъ, для рѣшенія сей задачи, способъ вѣрный и не подлежащій никакому исключенію; онъ основанъ на составленіи уравненія въ квадратахъ разностей корней и на свойствахъ непрерывныхъ дробей; но этотъ способъ, по причинѣ чрезвычайной сложности численныхъ выкладокъ, требуемыхъ имъ, когда степень рѣшаемаго уравненія нѣсколько возвышенна, почти не можетъ быть употребляемъ. Смот. CARRÉS (ÉQUA-

TION AUX — DES DIFFÉRENCES). Лагранжъ также усовершенствовалъ теорію алгебрическихъ ирраціональныхъ выраженій; изслѣдованія его о функціяхъ симметрическихъ и подобообразныхъ (fonctions semblables) могутъ стать на ряду съ превосходнѣйшими алгебрическими умозрѣніями.

Фурье, умершій въ 1830 году, занимался съ полнымъ успѣхомъ рѣшеніемъ численныхъ уравненій; труды его по сему предмету собраны имъ въ сочиненіи подъ заглавіемъ: *Analyse des équations déterminées*. Алгебра обязана сему знаменитому математику способомъ легкимъ и удобоприлагаемымъ ко всякому численному уравненію. Наконецъ, Г-нъ *Штурмъ* *) предложилъ превосходную теорему для опредѣленія числа вещественныхъ корней и отдѣленія ихъ въ какомъ ни есть алгебрическомъ уравненіи; въ теорическомъ отношеніи эта теорема въ полной мѣрѣ удовлетворительна, и, руководствуясь ею, мы всегда надежнымъ путемъ достигнемъ цѣли; но, на практикѣ, надобно отдать преимущество способу Фурье; этотъ способъ хотя и сопряженъ съ неудобностію послѣдовательныхъ подстановленій *(tatonements)*, но, не смотря на то, вообще скорѣе ведетъ къ рѣшенію задачи. Смот. STURM (THÉORÊME DE).

Упоминаемъ наконецъ о примѣчательномъ трудѣ знаменитаго Норвежскаго математика *Абеля*, умершаго въ 1829 году. Мы говоримъ объ неоспоримомъ доказательствѣ того предложенія, что алгебрическія уравненія, выше 4-й степени, не могутъ быть рѣшены посредствомъ коренныхъ знаковъ, или, иначе, что общее рѣшеніе уравненій степеней, превышающихъ четвертую, не можетъ быть приведено къ извлеченію корней. Это доказательство было напечатано на Нѣмецкомъ языкѣ въ Journal für die reine und angewandte Mathematik, изд. A. L. Crelle, и важность его неоспорима, когда примемъ въ соображеніе то обстоятельство, что многіе первостепенные математики думали прежде, что рѣшеніе уравненій всѣхъ степеней возможно посредствомъ радикаловъ.

*) Парижская Академія Наукъ, въ публичное засѣданіе 8-го Декабря 1834 года, присудила сочиненію Г-на *Штурма*, подъ заглавіемъ: *Mémoire sur la résolution des équations numériques*, большую золотую медаль въ 3000 франковъ. Въ этомъ мемуарѣ, сочинитель доказываетъ теорему, о которой мы упоминаемъ.

Мы говорили въ этой статьѣ только о тѣхъ открытіяхъ новѣйшихъ математиковъ, о которыхъ не будемъ имѣть случая упомянуть въ другомъ мѣстѣ; читатели найдутъ нѣкоторыя свѣдѣнія о трудахъ *Гаусса* и *Абеля* въ статьѣ: BINOMES (ÉQUATIONS).

Окончимъ эту статью нѣкоторыми показаніями о знакоположеніяхъ, бывшихъ въ употребленіи у прежнихъ алгебристовъ.

Діофантъ, первый писатель объ Алгебрѣ, употреблялъ слѣдующіе знаки: неизвѣстную или искомую величину онъ означалъ чрезъ $\sigma\tau\iota$; ея квадратъ, именуемый имъ $\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$, чрезъ $\delta^{\tilde{\upsilon}}$; кубъ ($\kappa\acute{\upsilon}\beta\upsilon\varsigma$), чрезъ $\kappa^{\tilde{\upsilon}}$; четвертую степень или биквадратъ ($\delta\upsilon\nu\alpha\mu o\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$), чрезъ $\delta\delta^{\tilde{\upsilon}}$; пятую степень, чрезъ $\delta\kappa\tilde{\upsilon}$ и проч. Опредѣленныя числа изображалъ Діофантъ знакомъ $\mu\overset{\circ}{}$, отъ слова $\mu o\nu\grave{\alpha}\varsigma$, *единица*. Что касается до знаковъ сложенія и вычитанія, то, для обозначенія втораго дѣйствія, онъ употреблялъ знакъ ⴷ, то есть, опрокинутую испорченную букву ψ, отъ $\lambda\epsilon\tilde{\iota}\psi\iota\varsigma$, *недостатокъ*. Для сложенія не было особеннаго знака, и его означали простымъ соединеніемъ слагаемыхъ количествъ.

Древнѣйшіе изъ Германскихъ алгебристовъ были *Христофоръ Рудольфсъ* и *Михаилъ Штифель*; первый изъ нихъ напечаталъ въ 1522 году на Нѣмецкомъ языкѣ Алгебру подъ заглавіемъ: *Die Coss*; второй издалъ въ 1553 эту самую Алгебру со многими улучшеніями и прибавленіями; онъ также извѣстенъ собственнымъ сочиненіемъ *Arithmetica integra*. Рудольфсъ и Штифель ввели употребляемые до нынѣ знаки $+$ и $-$. Въ Италіи же, по знакоположенію *Луки Пачіоло*, употребляли вмѣсто $+$, букву *p. (piu)*, а вмѣсто $-$, букву *m. (meno)*; тѣ же Германскіе алгебристы ввели коренной знакъ $\sqrt{\ }$; равенство они изображали точкою; впослѣдствіи *Декартъ* употребилъ знакъ ∞, а Англійскій математикъ *Рекордъ* въ 1557 году ввелъ нынѣ всѣми принятый знакъ $=$. И такъ, уравненіе $80 = 6 + 3x$ изображалось:

по Рудольфсу и Штифелю: $80\ .\ 6 + 3x$,

по Декарту: $80 \infty 6 + 3x$.

Въ Голландіи и Нидерландахъ также занимались Алгеброю многіе математики. Одинъ изъ лучшихъ былъ *Стевинъ*, коего Алгебра была въ первый разъ напечатана въ концѣ XVI-го вѣка. Знакоположеніе, введенное имъ и принятое тогда его соотечественниками, состояло въ слѣдующемъ: неизвѣстную величину онъ изображалъ знакомъ ①: квадратъ этой неизвѣстной, знакомъ ②; кубъ ③, и такъ далѣе.

Изъ лучшихъ сочиненій по части Алгебры, мы укажемъ преимущественно на слѣдующія:

Arithmetica universalis, 1707 года, соч. *Нютона*.

Алгебра Леонарда Эйлера, изданная на Нѣмецкомъ языкѣ, переведенная на Французскій, Русскій и другіе языки. На Франц. языкѣ Алгебра Эйлера издана съ прибавленіями *Лагранжа*.

Resolution des équations numériques, par Lagrange. 1-ое изд. 1798, 2-ое, полнѣйшее, 1808 и 3-е 1826 г.

Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique, 1-ère Partie: Analyse Algébrique; *par A. L. Cauchy* 1821.

Analyse des équations déterminées, 1831; *par Fourier*.

Ohm, Dr. Martin; Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik. Berlin 1828 — 1833. Семь томовъ; въ первыхъ двухъ *Ариѳметика* и *алгебрическій анализъ*.

Ide, Dr. J. J. A. Anfangsgründe der Mathematik. Berlin 1803. Два тома; первый заключаетъ въ себѣ *Алгебру*.

Grunert. Jahrbuch der allgemeinen Arithmetik, 1832.

Egen. Allgemeine Arithmetik und Algebra.

Drobisch. Grundzüge der Lehre von den höhern numerischen Gleichungen.

На Русскомъ языкѣ: *Алгебра Осиповскаго* и нѣкоторые переводные курсы, какъ то: *Лакруа, Лефебюра де Фурси, Бурдона* и проч.

Algèbre numérale или vulgaire. Численная алгебра, въ которой извѣстныя количества изображаются числами, а неизвѣстныя, буквами.

Algèbre littérale или spécieuse. Буквенная алгебра, въ которой извѣстныя и неизвѣстныя величины изображаются буквами.

Такое раздѣленіе Алгебры вышло нынѣ изъ употребленія.

ALGÉBRIQUE. АЛГЕБРИЧЕСКІЙ, къ Алгебрѣ относящійся. *Analyse algébrique, алгебрическій анализъ*, то же что Алгебра.

Courbes algébriques. Алгебрическія кривыя, то есть, тѣ, которыя опредѣляются алгебрическими уравненіями, напримѣръ: *коническія сѣченія, циссоида, конхоида* и проч. Смот. COURBE.

Somme algébrique. Алгебрическая сумма, Агрегатъ. *Алгебрическою суммою* или *агрегатомъ* количествъ называется совокупность всѣхъ сихъ количествъ, взятыхъ съ стоящими передъ ними знаками. Такъ напримѣръ: алгебрическая сумма количествъ:

$$+6,\ +2a,\ -5a,\ +8a^2,\ -3a^2,\ +a^3, \text{ будетъ:}$$
$$6-3a+5a^2+a^3.$$

ALGÉBRISTE. АЛГЕБРИСТЪ. Человѣкъ свѣдущій въ Алгебрѣ.

ALGORISME. АЛГОРИЗМЪ. Практическое употребленіе различныхъ частей Алгебры.

ALGORITHME или **NOTATION. АЛГОРИѲМЪ, ЗНАКОПОЛОЖЕНІЕ, ОБОЗНАЧЕНІЕ.** Совокупность знаковъ, употребляемыхъ въ какомъ либо исчисленіи. *Algorithme des fonctions dérivées, знакоположеніе производныхъ функцій. Algorithme du calcul intégral, знакоположеніе интегральнаго исчисленія. Удобное, удачное, сложное, неудачное знакоположеніе.* — Нѣкоторые авторы, преимущественно Испанскіе, употребляли слово *алгориѳмъ* для означенія практической части Алгебры. — Подъ симъ самымъ наименованіемъ разумѣли также искусство производить выкладки посредствомъ первыхъ четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій, то есть: сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія.

ALGORITHMIE. АЛГОРИѲМІЯ. Такъ называетъ Г-нъ *Вронскій*, одну изъ отраслей чистой математики, именно ту, которая занимается числами. Мы отсылаемъ читателей къ сочиненію Г-на *Вронскаго*: *Philosophie de la Technie.*

ALICHONS. (Мех.) Смот. ALUCHONS.

ALIDADE или **ALHIDADE.** (Практ. Геом.) **АЛИДАДА.** Такъ называется металлическая линейка (обыкновенно мѣдная), обращающаяся около оси какого либо угломѣрнаго инструмента; на концахъ ея придѣланы діоптры, сквозь которые смотрятъ на предметы. Концы алидады также снабжены во многихъ инструментахъ *верньерами*, а въ иныхъ, только указателями, которые показываютъ число градусовъ измѣряемаго угла. Алидада очень похожа на *Алтиметръ* (черт. 5, л. 1); только она не имѣетъ квадратиковъ *a* и *b*, принадлежащихъ къ алтиметру. — Алидада употребляется также и безъ угломѣрнаго инструмента, когда производится съёмка посредствомъ менсулы. Смот. PLANCHETTE.

ALIGNEMENT. (Практ. Геом.) **РАЗВѢХОВАНІЕ;** проведеніе прямой линіи на землѣ посредствомъ вѣхъ, которыя ставятъ въ нѣкоторомъ одну отъ другой разстояніи такъ, чтобы онѣ покрывали другъ друга.

ALIQUANTE (PARTIE). (Ариө.) **НЕДѢЛИТЕЛЬ, НЕДѢЛЯЩЕЕ ЧИСЛО.** Напримѣръ: 6 есть недѣлитель числа 14, ибо, по раздѣленіи 14 на 6, имѣемъ въ остаткѣ 2.

ALIQUOTE (PARTIE). (Ариө.) **ДѢЛИТЕЛЬ, ДѢЛЯЩЕЕ ЧИСЛО,** то есть такое, которое дѣлитъ на-цѣло данное число. Такъ напримѣръ, 5 есть дѣлитель 15, ибо, раздѣливъ 15 на 5, получаемъ въ частномъ цѣлое число 3.

Aliquote commune. Общій дѣлитель. См. DIVISEUR COMMUN.

Aliquotes pareilles. Пропорціональные дѣлители, которые пропорціональны соотвѣтственнымъ своимъ числамъ. И такъ, 4 и 6 будутъ *пропорціональными дѣлителями* чиселъ 16 и 24, ибо имѣемъ пропорцію: $4 : 16 = 6 : 24$.

ALLONGEMENT. (Мех.) **УДЛИННЕНІЕ.** *Allongement insensible, нечувствительное, весьма малое удлинненіе. Allongements possibles, возможныя удлинненія.*

ALLONGER (S'). **УДЛИННИТЬСЯ.** *Cette corde est susceptible de s'allonger; эта веревка способна, можетъ удлинниться.*

ALLIAGE (RÈGLE D') (Алг.) **ПРАВИЛО СМѢШЕНІЯ.** Такъ называется правило, посредствомъ котораго рѣшаются слѣдующія двѣ общія задачи:

I. *По даннымъ цѣнамъ и количествамъ составныхъ веществъ, опредѣлить цѣну единичнаго количества смѣси.*

II. *По даннымъ цѣнѣ и количеству смѣси, а также и цѣнѣ составныхъ веществъ, найти количество каждаго изъ нихъ.*

Задачи, принадлежащія первому случаю, рѣшаются посредствомъ *прямаго правила смѣшенія (règle d'alliage directe);* рѣшеніе втораго случая относится къ *обратному правилу смѣшенія (règle d'alliage inverse).*

I-ый случай. Пусть будутъ $a, a', a'', \ldots$ количества какихъ либо веществъ, а $p, p', p'', \ldots$ цѣны единичныхъ количествъ тѣхъ же веществъ. Спрашивается цѣна единичнаго количества смѣси?

Очевидно, что сумма произведеній $ap + a'p' + a''p'' + \ldots$ изобразитъ цѣну всей смѣси; чтобы получить цѣну x единичнаго количества, надобно предыдущую сумму раздѣлить на полное количество смѣси, то есть на $a + a' + a'' + \ldots\ldots$ И такъ

$$x = \frac{ap + a'p' + a''p'' + \ldots}{a + a' + a'' + \ldots}.$$

Примѣръ. Смѣшиваютъ три сорта чаю, именно: 10 фунтовъ 15-ти рублеваго, 14 фунтовъ 12-ти рублеваго и 2 фунта 10-ти рублеваго. Спрашивается, сколько будетъ стоить фунтъ смѣси?

Здѣсь $a = 10$, $a' = 14$, $a'' = 2$; $p = 15$, $p' = 12$, $p'' = 10$. Слѣдовательно

$$x = \frac{10.15 + 14.12 + 2.10}{10 + 14 + 2} = 13 \text{ рублямъ.}$$

II-ой случай. Пусть будетъ m извѣстная цѣна единичнаго количества смѣси, A ея количество, $p, p', p'' \ldots$ извѣстныя цѣны составныхъ веществъ. Спрашивается количество каждаго вещества, предполагая извѣстнымъ число сихъ послѣднихъ.

Изобразивъ чрезъ $x, y, z, \ldots$ количества составныхъ веществъ, получимъ, какъ и выше, уравненіе

$$m = \frac{px + p'y + p''z + \ldots}{A}$$

откуда

$$px + p'y + p''z + \ldots = mA;$$

сверхъ того, по условію задачи, имѣемъ:

$$x + y + z + \ldots = A.$$

И такъ получаемъ два уравненія для опредѣленія неизвѣстныхъ $x, y, z, \ldots$ Если ихъ будетъ болѣе двухъ, то задача останется *неопредѣленною.* Смот. INDÉTERMINÉ. Въ случаѣ двухъ смѣшиваемыхъ веществъ, предыдущія уравненія приводятся къ слѣдующимъ:

$$px + p'y = mA, \quad x + y = A,$$

изъ которыхъ выводимъ:

$$x = \frac{(m - p')A}{p - p'}, \quad y = \frac{(p - m)A}{p - p'}.$$

Примѣръ. Желаютъ составить 28 фунтовъ смѣси изъ двухъ сортовъ чаю, одного по 16 рублей за фунтъ, а другаго по 9 рублей, такъ, чтобы фунтъ смѣси обходился по 15 рублей. Спрашивается, сколько надобно взять фунтовъ чаю 1-го сорта, и сколько 2-го?

*

Изобразимъ чрезъ x число фунтовъ 1-го сорта чаю, чрезъ y, 2-го сорта; такъ какъ $m=15$, $A=28$, $p=16$, $p'=9$, то получимъ:

$$x=\frac{(15-9)28}{16-9}=24 \text{ фунт. } y=\frac{(16-15)28}{16-9}=4 \text{ фунт.}$$

Хотя обыкновенно *правило смѣшенія* включается въ Ариѳметику, но намъ кажется, что лучше относить его къ Алгебрѣ, тѣмъ болѣе, что часто встрѣчаются задачи неопредѣленныя, какъ мы то замѣтили выше. Отсылаемъ читателя къ статьямъ: CARRÉS (MÉTHODE DES MOINDRES), MOYENNE, и GRAVITÉ (CENTRE DE). Сличая между собою изложенные въ нихъ способы, онъ усмотритъ большое сходство съ пріёмами правила смѣшенія.

ALMAGESTE. АЛМАГЕСТЪ. Знаменитое сочиненіе объ Астрономіи *Птолемея*, философа Александрійской школы. Въ Латинскомъ переводѣ, оно извѣстно подъ заглавіемъ: *Almagesti seu magnae compositionis opus*. Твореніе это раздѣлено на 13 книгъ, заключающихъ въ себѣ всѣ труды, наблюденія и теоріи предшествовавшихъ Птолемею астрономовъ, а также и его собственныя изслѣдованія. Алмагестъ есть древнѣйшее изъ всѣхъ извѣстныхъ намъ сочиненій объ Астрономіи; оно было написано Птолемеемъ около 140 года по Р. Х.

ALMANACH. АЛЬМАНАХЪ; то же, что *Календарь*, развѣ только съ тѣмъ различіемъ, что въ Альманахѣ, сверхъ астрономическихъ показаній, помѣщались обыкновенно разныя предсказанія о погодѣ, ни на чемъ не основанныя. См. CALENDRIER.

ALONGÉ или **RALONGÉ. ПРОДОЛГОВАТЫЙ.** Вообще въ Геометріи разумѣютъ подъ симъ названіемъ такія фигуры или тѣла, коихъ протяженія въ длину превосходятъ остальныя протяженія. Въ этомъ смыслѣ говорятъ: *продолговатый шестиугольникъ, осьмиугольникъ, эллипсъ, сфероидъ* и проч. *Продолговатою циклоидою (cycloide ralongée)* называется такая, коей основаніе болѣе окружности круга производящаго.

ALPHABET. АЛФАВИТЪ. Такъ какъ Греческія буквы весьма часто употребляются въ Анализѣ, то мы приведемъ здѣсь весь алфавитъ, съ названіемъ буквъ на Французскомъ и Русскомъ языкахъ:

$A\alpha$, Alpha, Альфа.	$N\nu$, Nu, Ню.
$B\beta\zeta$, Bêta, Бета.	$\Xi\xi$, Xi, Кси.
$\Gamma\gamma$, Gamma, Гамма.	$O o$, Omicron, Омикронъ.
$\Delta\delta$, Delta, Дельта.	$\Pi\pi\varpi$, Pi, Пи.
$E\epsilon$, Epsilon, Эпсилонъ.	$P\rho$, Rho, Ро.
$Z\zeta$, Zêta, Зета.	$\Sigma\sigma\varsigma$, Sigma, Сигма.
$H\eta$, Êta, Эта.	$T\tau$, Tau, Тау.
$\Theta\vartheta\theta$, Thêta, Тета.	$\Upsilon\upsilon$, Upsilon, Ипсилонъ.
$I\iota$, Iota, Іота.	$\Phi\varphi$, Phi, Фи.
$K\kappa$, Cappa, Каппа.	$X\chi$, Chi, Хи.
$\Lambda\lambda$, Lambda, Ламбда.	$\Psi\psi$, Psi, Пси.
$M\mu$, Mu, Мю.	$\Omega\omega$, Oméga, Омега.

ALPHONSINES (TABLES). АЛЬФОНСОВЫ ТАБЛИЦЫ. Такъ называются астрономическія таблицы, составленныя по повелѣнію *Альфонса X*, Короля Кастильскаго, прозваннаго *Мудрымъ*. Таблицы сіи, надъ составленіемъ которыхъ трудились многіе астрономы, были окончены въ 1252 году. Въ первый разъ онѣ были напечатаны въ Венеціи, 1483 года.

ALTERNANDO. (Ариѳ.) **ПЕРЕСТАНОВКА** среднихъ членовъ въ Геометрической пропорціи. См. ALTERNE (PROPORTION).

ALTERNATIF (MOUVEMENT). (Мех.) **ПОПЕРЕМѢННОЕ ДВИЖЕНІЕ.** См. ÉLÉMENTAIRES (MACHINES).

ALTERNATIVEMENT. ПОПЕРЕМѢННО. *Les termes de cette série sont alternativement positifs et négatifs; члены этого ряда попеременно положительные и отрицательные.*

ALTERNATION или **PERMUTATION. ПЕРЕСТАНОВЛЕНІЕ, ПЕРЕМѢЩЕНІЕ, ПЕРЕЛОЖЕНІЕ.** Различныя перемѣны, происходящія отъ послѣдовательнаго перестановленія буквъ. Напримѣръ, три буквы a, b, c допускаютъ 6 различныхъ перестановленій, именно: abc, acb, bac, bca, cab, cba. Вообще, если имѣемъ m буквъ, то число переложеній выразится произведеніемъ $1.2.3\ldots m$. И такъ, четыре вещи перестанавливаются 24 образами; пять вещей 120-ью; шесть 720-ью и такъ далѣе. — *Поперемѣнность.*

ALTERNATION, CHANGEMENT или употребительнѣе **VARIATION DE SIGNE.** (Алг.) **ПЕРЕМѢНА ЗНАКОВЪ.** Отъ $+$ къ $-$, и отъ $-$ къ $+$. Напримѣръ, въ уравненіи $x^5-2x^4-x^3+x^2-7x+1=0$ имѣемъ *четыре перемѣны знаковъ*, именно: отъ $+x^5$ къ $-2x^4$, отъ $-x^3$ къ $+x^2$, отъ

$+ x^2$ къ $- 7x$, и отъ $- 7x$ къ $+ 1$. Когда два члена имѣютъ одинакіе знаки, то такой порядокъ называютъ *повтореніемъ* или *послѣдовательностію знаковъ (permanence de signe)*. И такъ, въ предыдущемъ уравненіи члены $- 2x^4$ и $- x^3$ составляютъ *одно повтореніе знаковъ*. Смот. DÉCARTES (RÈGLE DES SIGNES DE).

ALTERNE (PROPORTION). (Ариѳ.) Пропорція, происходящая отъ *перестановленія* среднихъ членовъ. Когда въ геометрической пропорціи $a:b::c:d$ переставляемъ средніе члены, то получаемъ другую $a:c::b:d$, которая, въ отношеніи къ первой, называется *пропорціею съ переставленными средними членами.* Такую перестановку называютъ иногда *Alternando*. Смот. PROPORTION.

ALTERNÉE (FONCTION). (Анал.) **ЗНАКОПЕРЕМѢННОЮ ФУНКЦІЕЮ** нѣсколькихъ количествъ называется такое выраженіе, которое, при перемѣнѣ одного изъ сихъ самыхъ количествъ на другое, перемѣняетъ только знакъ, но не измѣняется въ своей величинѣ. Для примѣра знакоперемѣнныхъ функцій съ двумя количествами можно привести слѣдующія выраженія:

$$y - x, \ (y^3 - x^3)(x + y - 1), \ \log.\left(\frac{y}{x}\right);$$

произведеніе $(y-x)(z-x)(z-y)$ есть знакоперемѣнная функція съ тремя количествами; вообще

$$(y-x)(z-x)(z-y)(t-x)(t-y)(t-z)\ldots.$$

будетъ такого же рода функція съ перемѣнными $x, y, z, t, \ldots.$

Коль скоро извѣстна одна знакоперемѣнная функція, то очень легко вывести и общій видъ этого рода выраженій. Дѣйствительно, такъ какъ $y - x$ принадлежитъ къ числу знакоперемѣнныхъ функцій, то, изобразивъ чрезъ $\varphi(x, y)$ ихъ общій видъ, легко усмотрѣть, что отношеніе $\frac{\varphi(x, y)}{y - x}$ должно быть *симметрическою* функціею измѣняемыхъ x и y. Слѣдовательно выраженіе

$$\varphi(x,y) = (y-x) f(x,y),$$

гдѣ $f(x,y)$ означаетъ произвольную симметрическую функцію, есть общій видъ знакоперемѣнныхъ функцій съ двумя величинами. Замѣтимъ, что вторую часть предыдущаго уравненія можно замѣнить разностію $F(x,y) - F(y,x)$, разумѣя уже подъ F совершенно произвольную функцію.

Точно такимъ образомъ докажемъ, что знакоперемѣнная функція съ тремя измѣняемыми выражается общимъ видомъ

$$\varphi(x,y,z) = (y-x)(z-x)(z-y) f(x,y,z),$$

гдѣ $f(x,y,z)$, какъ и выше, изображаетъ симметрическую функцію перемѣнныхъ x, y, z.

Разсматриваніе знакоперемѣнныхъ функцій бываетъ иногда полезно: въ Алгебрѣ, напримѣръ, уравненія первой степени со многими неизвѣстными рѣшаются весьма просто при пособіи этого рода выраженій.

ALTERNES (ANGLES). (Геом.) **ПРОТИВУПОЛОЖНЫЕ, ПЕРЕКРЕСТНЫЕ УГЛЫ.** Когда двѣ параллельныя линіи ED, GF (черт. 4, листъ 1) пересѣчены прямою HI, то сія послѣдняя составляетъ съ линіями ED, GF углы *внутренніе* и *внѣшніе*. Углы ELM и FML, также DLM и GML, по причинѣ взаимнаго ихъ положенія относительно сѣкущей и параллельныхъ линій, называются *внутренними противоположными* (*alternes internes*), а углы HLD и GMI, также HLE и FMI — *внѣшними противуположными* (*alternes externes*).

ALTIMÈTRE. (Практ. Геом.) **АЛТИМЕТРЪ, ВЫСОТОМѢРЪ.** Инструментъ, служащій для измѣренія высотъ. Онъ состоитъ изъ мѣдной линейки AB (черт. 5, листъ 1) съ двумя вертикальными AF, BG, изъ которыхъ послѣдняя свободно двигается по длинѣ AB, оставаясь къ ней перпендикулярною. Всѣ три линейки раздѣлены на равныя части, изображающія, напримѣръ, сажени съ подраздѣленіями. Пазы въ вертикальныхъ линейкахъ служатъ для того, чтобы можно было поднимать и опускать по произволенію два мѣдные квадратика a и b, съ круглыми отверстіями, сквозь которыя смотрятъ на измѣряемый предметъ.

Дабы объяснить употребленіе этого инструмента, положимъ, что по измѣренному разстоянію IK (черт. 6, листъ 1) ищется высота KL. Для сего придвигаемъ линейку BG *Алтиметра* до дѣленія на AB, соотвѣтствующаго измѣренному разстоянію IK. Потомъ, установивъ инструментъ въ горизонтальномъ положеніи, и обративъ BG къ предмету KL, двигаемъ квадратики a и b до тѣхъ поръ, пока увидимъ сквозь ихъ отверстія вершину L. Очевидно, что разность дѣленій, указываемыхъ центрами обоихъ квадратиковъ, то есть bc, изобразитъ высоту точки L надъ точкою c или a. Придавъ къ этой высотѣ вертикальное разстояніе квадратика a отъ земли, получимъ искомую высоту KL.

ALTIMÉTRIE. АЛТИМЕТРІЯ, ВЫСОТОМѢРІЕ. Часть практической Геометріи, занимающаяся измѣреніемъ приступныхъ и неприступныхъ высотъ. На сей конецъ употребляютъ разные способы, болѣе или менѣе точные, именно: измѣряются высоты посредствомъ кольевъ и посредствомъ *Алтиметра* (Смот. предыдущую статью). Точнѣйшие способы состоятъ въ тригонометрическихъ дѣйствіяхъ при пособіи угломѣрныхъ и другихъ инструментовъ и въ барометрическихъ измѣреніяхъ. Смот. BAROMÉTRIQUE (FORMULE).

ALTITUDE. (Геод.) **АЛТИТУДА, ВЫСОТА НАДЪ УРОВНЕМЪ МОРЯ.** *Altitude d'un point; высота точки надъ поверхностію моря.*

ALUCHONS или **ALICHONS.** (Мех.) **ЗУБЬЯ, ПАЛЬЦЫ.** Въ большихъ колесахъ, на которыя насаживаются зубья отдѣльно, сіи послѣдніе называются *пальцами.* Въ зубчатыхъ колесахъ малаго размѣра, въ которыхъ всѣ части сплошныя, они называются *зубцами.* Смот. DENT.

AM.

AMBE. АМБА. Смот. LOTERIE.

AMBIANT. ОКРУЖАЮЩІЙ. *Fluide, air ambiant; окружающая жидкость, окружающій воздухъ.*

AMBIGÈNE. (Геом.) **ПЕРЕСѢЧНАЯ ИПЕРБОЛА.** Особеннаго рода кривая линія третьей степени. Чертежъ 7 (Листъ 1), на которомъ сія кривая изображена, показываетъ, что она имѣетъ двѣ ассимптоты: одну *внѣшнюю* AG, а другую *внутреннюю* AF, которую пересѣкаетъ въ точкѣ C.

AMBIGU. ОБОЮДНЫЙ. *Signe ambigu, обоюдный знакъ;* то есть, изъ знаковъ $+$ и $-$ тотъ или другой, когда еще не опредѣлено который изъ нихъ именно. — Иногда же подъ *signe ambigu* разумѣютъ то же что подъ *double signe, двоякій знакъ,* то есть знакъ $\pm$.

AMBIGUË (FORME). (Теор. Чис.) **ОБОЮДНЫЙ ВИДЪ.** Такъ назвалъ *Гауссъ* въ книгѣ: *Disquisitiones arithmeticae,* видъ второй степени: $ax^2 + bxy + cy^2$, когда въ этой формулѣ $2b$ будетъ дѣлиться на-цѣло на a. Здѣсь всѣ три величины a, b, и c предполагаются цѣлыми. Смот. FORME, DÉTERMINANT.

AMBIGUITÉ. (Триг.) **ОБОЮДНОСТЬ, СОМНИТЕЛЬНОСТЬ, НЕОПРЕДѢЛЕННОСТЬ.** Когда, напримѣръ, въ плоскомъ треугольникѣ даны двѣ стороны и прилежащій одной сторонѣ уголъ, то встрѣчается въ этомъ случаѣ *обоюдность* или *неопредѣленность*; дѣйствительно, если данныя стороны будутъ AB и BC, а извѣстный уголъ BAC (черт. 8, листъ 1), то описавъ изъ точки B радіусомъ BC дугу CDC', получимъ два треугольника ABC и ABC', которые оба удовлетворяютъ условіямъ задачи. Слѣдовательно, она остается неопредѣленною, пока не будетъ извѣстно, долженъ ли уголъ C быть острый или тупой. Этотъ случай извѣстенъ въ Тригонометріи подъ наименованіемъ *обоюднаго* или *сомнительнаго.*

AMBLYGONE (TRIANGLE) или **TRIANGLE OBTUSANGLE.** (Геом.) **ТУПОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИКЪ.** Треугольникъ имѣющій одинъ уголъ тупой.

AMENER. (Исч. Вѣр.) **ВЫКИНУТЬ, ВЫДЕРНУТЬ, ВЫНУТЬ.** *Amener le nombre 7 avec deux dès; выкинуть число 7 двумя косточками. Amener des boules blanches; вынуть, выдернуть бѣлые шары.* — Иногда *amener* значитъ *привести. Amener un instrument à la position horizontale; привести инструментъ въ горизонтальное положеніе.*

AMIABLES (NOMBRES). (Теор.Чис.) **ДРУЖНЫЯ ЧИСЛА.** Такъ называются два числа, имѣющія то свойство, что сумма всѣхъ дѣлителей одного изъ нихъ, равна другому, и на оборотъ. Таковы числа 284 и 220. Сумма дѣлителей перваго изъ нихъ: $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$, а сумма дѣлителей втораго: $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$. Числа 17296, 18416 также *дружныя*, равно какъ и 9363584, 9437056. Относительно же разысканія дружныхъ чиселъ, требующаго довольно подробнаго изложенія, мы отсылаемъ читателей къ сочиненію *Лежандра*: *Théorie des nombres,* troisième édition, T. II, стр. 148.

AMORTISSEMENT. ПОГАШЕНІЕ ДОЛГОВЪ, АМОРТИЗАЦІЯ. Финансовыя дѣйствія, употребляемыя для уничтоженія или уменьшенія Государственнаго долга. На сей конецъ, назначается ежегодно, независимо отъ прочихъ Государственныхъ расходовъ, особенная сумма, для уплаты, какъ процентовъ должнаго капитала, такъ и нѣкоторой части самаго капитала. — Основанія финансовыхъ оборотовъ, относящихся къ погашенію долговъ, были столь разнообразны, въ различныхъ Государствахъ и въ разныя времена, что подробное описаніе этой отрасли финансовъ могло бы составить особый трактатъ. Скажемъ только, что аналитическое рѣшеніе вопросовъ, которые могутъ встрѣтиться по этому предмету, можетъ быть всегда отнесено къ задачамъ о сложныхъ процентахъ и срочныхъ уплатахъ, почему и отсылаемъ читателей къ статьямъ: INTÉRÊT, ANNUITÉS.

AMPLITUDE. (Геом.) **АМПЛИТУДА;** хорда параболической дуги.

AMPLITUDE. (Эл. функ.) **АМПЛИТУДА; ШИРОТА, ОБЪЯТНОСТЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФУНКЦІИ.** Такъ называется уголъ φ, изображающій верхній предѣлъ эллиптическихъ интеграловъ всѣхъ трехъ видовъ:

$$\int_0^{\varphi}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2x}},\qquad \int_0^{\varphi}dx\sqrt{1-k^2\sin^2x},$$

$$\int_0^{\varphi}\frac{dx}{(1-a^2\sin^2x)\sqrt{1-k^2\sin^2x}}.$$

Co-AMPLITUDE. Ко-амплитуда, со-широта, со-объятность. Такъ называется φ' относительно интеграла $\int_0^{\varphi}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2x}}$; или φ относительно интеграла $\int_0^{\varphi'}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2x}}$, когда сіи два интеграла удовлетворяютъ уравненію

$$\int_0^{\varphi}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2x}}+\int_0^{\varphi'}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2x}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2x}}.$$

Математики часто употребляютъ слѣдующія знакоположенія: изобразивъ чрезъ u эллиптическую функцію $\int_0^{\varphi}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2x}}$, пишутъ:

$\varphi = \mathrm{am}.u$, $\mathrm{Sin}\ \varphi = \mathrm{Sin.am}.u$, $\varphi' = \mathrm{coam}.u$, $\mathrm{Sin}\,\varphi' = \mathrm{Sin.\ coam}.u$ и проч. Смот. ÉLLIPTIQUES (FONCTIONS).

AMPLITUDE. (Мех.) **ДАЛЬНОСТЬ ПОЛЁТА,** то есть горизонтальное разстояніе, перейденное брошеннымъ тѣломъ. — *Amplitude d'une oscillation, широта, величина размаха* (маятника); то есть, удвоенный уголъ уклоненія маятника отъ вертикальной линіи. Самый же уголъ уклоненія, называется *уклономъ (écart)*. Смот. PENDUL.

AMPLITUDE. (Астр.) **АМПЛИТУДА, АМПЛИТУДЪ, ОБЪЯТНОСТЬ.** Дуга горизонта, заключающаяся между точкою, въ которой свѣтило восходитъ или заходитъ и истинною точкою востока или запада. Амплитуда называется *восточною (ortive)*, когда считается отъ точки востока для восходящей звѣзды; она называется *западною (occase)* когда считается отъ точки запада для звѣзды заходящей.

Амплитуда, какъ восточная такъ и западная, для свѣтилъ, находящихся между экваторомъ и сѣвернымъ полюсомъ, будетъ всегда *сѣверная*, а для тѣхъ, кои находятся между экваторомъ и южнымъ полюсомъ, она будетъ всегда *южная*. Такимъ образомъ амплитуда солнца есть сѣверная отъ равноденствія весенняго до осенняго, а южная послѣ сего послѣдняго до перваго.

Такъ какъ разсматривается горизонтъ истинный и видимый, то и амплитуда свѣтилъ бываетъ *истинная* и *видимая*. Рефракція и возвышеніе глаза надъ поверхностію моря суть главнѣйшія причины, по которымъ видимый горизонтъ отдѣляется отъ истиннаго.

Мореплаватели обыкновенно употребляютъ амплитуду солнца для опредѣленія склоненія магнитной стрѣлки или измѣненій компаса *(variation du compas)*. Для этого, посредствомъ компаса, наблюдаютъ они амплитуду нижняго края солнца въ то мгновеніе, когда онъ восходитъ или заходитъ. Потомъ вычисляютъ, по извѣстнымъ формуламъ, видимую амплитуду сего края; разность между вычисленною и наблюденною амплитудою дастъ склоненіе магнитной стрѣлки или компаса.

AN.

ANACAMPTIQUE. АНАКАМПТИКА. Прежнее названіе *Катоптрики*. Смот. CATOPTRIQUE.

ANACLASTIQUE. АНАКЛАСТИКА. Такъ называли прежде ту часть Оптики, которая нынѣ извѣстна подъ наименованіемъ *Діоптрики*. Смот. DIOPTRIQUE.

ANAGRAMME. АНАГРАММА. Такая перестановка буквъ какого либо слова, которая производитъ другое слово, имѣющее опредѣленное значеніе. Напримѣръ изъ слова *кипа* составляется анаграмма *пика* и *паки*; изъ *Римъ* — *миръ*; изъ *Москва* — *смоква* и проч.

ANALEMME. (Астр.) **АНАЛЕММА** (отъ *ἀνάλημμα*, высота), есть проэкція ортографическая сферы, на плоскости меридіана, при чемъ глазъ, предположенный въ безконечномъ разстояніи, находится на горизонтѣ въ точкѣ востока или запада. Сія проэкція, въ которой экваторъ и горизонтъ представляются прямыми линіями, даетъ, посредствомъ простаго черченія, высоту солнца въ данный часъ, и на оборотъ — для данной высоты солнца, часъ дня. Она также служитъ къ опредѣленію времени восхожденія и захожденія солнца, когда даны широта мѣста и день года. — Астрономическій и гномоническій инструментъ, описанный *Птолемеемъ*.

ANALOGIE. СХОДСТВО, ПОДОБІЕ, АНАЛОГІЯ, ПОДОБООБРАЗІЕ. Смот. INDUCTION. *Conclure par analogie, заключить по сходству, по аналогіи.* — **ПРОПОРЦІЯ.**

ANALOGIES DE NEPER. (Сфер. Триг.) **НЕПЕРОВЫ АНАЛОГІИ.** Такъ называются четыре пропорціи, найденныя Неперомъ, и служащія для упрощенія многихъ случаевъ, представляющихся при рѣшеніи сферическихъ треугольниковъ. Неперъ предложилъ эти формулы безъ доказательства; *Валлисъ* первый доказалъ ихъ. Если изобразимъ чрезъ a, b, c бока, а чрезъ A, B, C противолежащіе имъ углы сферическаго треугольника, то *Неперовы аналогіи* будутъ:

$$Cos\,\tfrac{1}{2}(a+b) : Cos\,\tfrac{1}{2}(a-b) :: Cot\,\tfrac{1}{2}C : tg\,\tfrac{1}{2}(A+B)$$
$$Sin\,\tfrac{1}{2}(a+b) : Sin\,\tfrac{1}{2}(a-b) :: Cot\,\tfrac{1}{2}C : tg\,\tfrac{1}{2}(A-B)$$
$$Cos\,\tfrac{1}{2}(A+B) : Cos\,\tfrac{1}{2}(A-B) :: tg\,\tfrac{1}{2}c : tg\,\tfrac{1}{2}(a+b)$$
$$Sin\,\tfrac{1}{2}(A+B) : Sin\,\tfrac{1}{2}(A-B) :: tg\,\tfrac{1}{2}c : tg\,\tfrac{1}{2}(a-b).$$

ANALOGIES DIFFÉRENTIELLES. ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ АНАЛОГІИ. Измѣняя безконечно мало углы и стороны въ сферическомъ треугольникѣ, получимъ нѣкоторыя отношенія между ихъ дифференціалами; сіи-то отношенія именуются *дифференціальными аналогіями*, и употребляются въ Астрономіи. — Извѣстно изъ Сферической Тригонометріи, что изобразивъ чрезъ a, b, c, A, B, C бока и углы сферическаго треугольника, имѣемъ слѣдующія три формулы:

$$(1)\left\{\begin{array}{l} Cos\,c = Cos\,a.\,Cos\,b + Sin\,a.\,Sin\,b.\,Cos\,C. \\ Cos\,b = Cos\,a.\,Cos\,c + Sin\,a.\,Sin\,c.\,Cos\,B. \\ Cos\,a = Cos\,b.\,Cos\,c + Sin\,b.\,Sin\,c.\,Cos\,A. \end{array}\right.$$

Дифференцируя ихъ въ предположеніи a и b постоянныхъ, получимъ:

$$Sin\,a.\,Sin\,b.\,Sin\,C.dC = Sin\,c.dc.$$
$$Sin\,a.\,Sin\,c.\,Sin\,B.dB = (Sin\,a.\,Cos\,c.\,Cos\,B - Cos\,a.\,Sin\,c)\,dc$$
$$Sin\,b.\,Sin\,c.\,Sin\,A.dA = (Sin\,b.\,Cos\,c.\,Cos\,A - Cos\,b.\,Sin\,c)\,dc;$$

совокупляя эти уравненія съ уравненіями (1) получимъ *дифференціальныя аналогіи* между dC, dB, dA и dc. Такъ же легко будетъ рѣшить задачу и въ томъ случаѣ, когда предположимъ, что всѣ шесть количествъ a, b, c, A, B, C принимаются за перемѣнныя.

ANALOGIE DES DIFFÉRENCES AVEC LES PUISSANCES. (Анал.) **АНАЛОГІЯ, СХОДСТВО МЕЖДУ РАЗНОСТЯМИ И СТЕПЕНЯМИ.** *Лейбницъ* первый замѣтилъ сходство между дифференціалами произведенія нѣсколькихъ множителей и степенными выраженіями, также, между интегралами и отрицательными степенями. *Лагранжъ*, въ напечатанномъ имъ Разсужденіи въ 1772 году, придалъ бо́льшую всеобщность выводамъ Лейбница, распространилъ ихъ на *конечныя разности*, и вывелъ, по наведенію, нѣсколько весьма примѣчательныхъ формулъ, которыя вскорѣ послѣ того были доказаны *Лапласомъ* въ седьмомъ томѣ *Savans étrangers*. Формулы, выражающія подобныя сходства, безъ сомнѣнія весьма полезны въ Анализѣ, ибо онѣ служатъ, во многихъ случаяхъ, и къ облегченію памяти, и къ упрощенію выкладокъ. Приведемъ здѣсь нѣсколько такихъ формулъ.

Пусть будетъ s функція перемѣнныхъ $x, y, z, \ldots$. Чтобы получить дифференціалъ n-го порядка этой функціи, употребляемъ слѣдующую *аналогическую* формулу:

$$d^n s = (d_x + d_y + d_z + \ldots)^n s,$$

въ которой, по возведеніи въ степень n, и по умноженіи всѣхъ членовъ на s, выраженія $d^n{}_x s$, $d_x{}^{n-1} d_y s$ и проч. будутъ изображать не степени и не произведенія, а дифференціалы различныхъ порядковъ; и такъ $d^n{}_x s$ означаетъ дифференціалъ n-го порядка функціи s относительно перемѣнной x; $d_x^{n-1} d_y s$, диффиренціалъ n-го порядка функціи s, взятый $(n-1)$ разъ относительно перемѣнной x и одинъ разъ относительно y, и такъ далѣе. Слѣдовательно, въ случаѣ трехъ перемѣнныхъ x, y, z, и n равнаго двумъ, получимъ посредствомъ приведенной формулы:

$$d^2s = d^2_x s + d^2_y s + d^2_z s + 2d_x d_y s + 2d_x d_z s + 2d_y d_z s.$$

Вотъ еще примѣръ:

$$\Delta u = (e^{\frac{d}{dx}h} - 1)u \quad \text{и} \quad \Delta^n u = (e^{\frac{d}{dx}h} - 1)^n u,$$

гдѣ u есть функція перемѣнной x, а e основаніе Неперовой системы логариѳмовъ. Смот. LOGARITHME. Эти формулы, по разложеніи вторыхъ частей въ рядъ, доставляютъ величины для разностей Δu и $\Delta^n u$. Показатели надъ характеристикою d будутъ, очевидно, изображать *порядки* диффиренціаловъ.

Для интеграловъ въ разностяхъ есть подобная формула, именно:

$$\Sigma^n u = (e^{\frac{d}{dx}h} - 1)^{-n} u,$$

которая имѣетъ мѣсто съ тѣмъ условіемъ, чтобы, по разложеніи второй ея части, вездѣ замѣнили характеристику d^{-p} кратнымъ интеграломъ $\int^p$, откуда

$$\frac{d^{-p}u}{dx^{-p}} = \int^p u\,dx^p.$$

Для бо́льшихъ подробностей по сему предмету, отсылаемъ читателей къ третьему тому книги: *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, соч. *S. F. Lacroix*, втор. изд. 1819.

ANALOGIQUE. АНАЛОГИЧЕСКІЙ, СХОДСТВЕННЫЙ, ПОДОБООБРАЗНЫЙ. *Formule analogique, аналогическая формула.* Смот. выше.

ANALYSE. АНАЛИЗЪ. Внимательное разсмотрѣніе предметовъ съ цѣлію открыть ихъ свойства. Въ такомъ обширномъ значеніи, Анализъ обнимаетъ всѣ науки. Въ болѣе ограниченномъ смыслѣ, подъ симъ наименованіемъ разумѣютъ способъ, который можетъ быть предложенъ въ такомъ видѣ: предполагаютъ найденнымъ то̀, что̀ еще неизвѣстно; изъ допущенной ипотезы выводятъ различныя слѣдствія, и останавливаются на тѣхъ изъ нихъ, которыя, по сущности предмета намъ даны; дабы удовлетворить этимъ слѣдствіямъ, должны быть выполнены нѣкоторыя условія; условія сіи служатъ потомъ къ опредѣленію ипотезы, предположенной сначала извѣстною, но которая, на самомъ дѣлѣ, была намъ неизвѣстна, ибо ее именно мы имѣли въ виду найти. Сказанное легко объяснится примѣромъ. Положимъ, что желаемъ рѣшить вопросъ, обращается ли земля около неподвижной оси, внутри ея находящейся? Принимая землю за эллипсоидъ вращенія, коего плотность въ 5 разъ болѣе плотности воды, допустимъ сперва, что она не имѣетъ вращательнаго движенія. Потомъ опредѣляемъ, посредствомъ вычисленія, измѣненіе отъ полюса до экватора длинъ секунднаго маятника. Сличая эти длины съ тѣми, которыя получаемъ помощію наблюденій, усматриваемъ, что первыя изъ нихъ не уменьшаются съ широтами въ такой быстрой прогрессіи какъ вторыя, откуда заключаемъ, что земля дѣйствительно имѣетъ вращательное движеніе. И въ самомъ дѣлѣ извѣстно, что посредствомъ наблюденій надъ длинами маятника, можно даже опредѣлить величину центробѣжной силы, раждающейся отъ сего движенія.

Способъ *аналитическій* противуположенъ способу *синтетическому* (Смот. SYNTHÈSE), въ которомъ не дѣлаютъ никакого предположенія, и не принимаютъ неизвѣстныхъ величинъ за извѣстныя.

Все сказанное нами объ Анализѣ, относится къ способу открытія истины, общеизвѣстному и употребляемому всѣми Учеными. Теперь займемся въ частности *Математическимъ анализомъ*. Новѣйшіе Геометры, въ изложеніи своихъ теорій, избрали путь аналитическій, и придерживаются этого способа такъ постоянно, что *Математическій Анализъ*, объявъ почти всѣ ученія математическія, сдѣлался, такъ сказать, синонимомъ *математическихъ наукъ*. Однакоже не должно смѣшивать эти два наименованія: ибо, въ составъ *наукъ математическихъ* или *Математики*, входятъ всѣ истины, доставляемыя ей какъ способомъ аналитическимъ, такъ и синтетическимъ, между тѣмъ какъ Анализъ заключаетъ въ себѣ только перваго рода истины; но итогъ сихъ послѣднихъ, какъ мы замѣтили выше, многимъ превышаетъ число истинъ, доказываемыхъ путемъ Синтеза.

Математическій Анализъ отличается отъ всѣхъ наукъ предметомъ своихъ изысканій, своею независимостію, точностію и ясностію. Предметъ Анализа — ученіе о величинахъ всѣхъ возможныхъ родовъ. — Сперва онъ изучаетъ величины вообще, то есть, не опредѣляя ихъ сущности. Вотъ предметъ *Чистаго Анализа (Analyse pure)*, который заключаетъ въ себѣ *Алгебру, Теорію чиселъ* и *Трансцендентный Анализъ*. Смот. ALGÈBRE, NOMBRES (THÉORIE DES), TRANSCENDANTE (ANALYSE). — Далѣе, Анализъ переходитъ къ обозрѣнію различныхъ родовъ величинъ, какъ осязаемыхъ, такъ и тѣхъ, которыя мы только воображаемъ, и называется тогда *Прикладнымъ (Analyse appliquée)*. Во первыхъ, онъ разсматриваетъ протяженіе, и въ этомъ случаѣ принимаетъ названіе *Анализа Геометрическаго* или *Аналитической Геометріи*; Смот. GÉOMÉTRIE. Потомъ, занимается разсматриваніемъ протяженія, времени и вещества, принимая въ соображеніе только непроницаемость сего послѣдняго. Вотъ предметъ *Аналитической Механики*, или просто *Механики*. Смот. MÉCANIQUE. За симъ, Анализъ переходитъ къ разсматриванію различныхъ веществъ, дѣйствительно существующихъ въ природѣ, и заимствуетъ отъ наблюденій и Физики только тѣ показанія, которыя необходимы для опредѣленія тѣлъ, подлежащихъ его изслѣдованіямъ. Подобныя приложенія Анализа составляютъ: *Небесная Механика, теорія тепла, теорія свѣта, звука, волнъ, электричества, магнетизма, волосныхъ явленій* и проч. См. MÉCANIQUE CÉLESTE, CHALEUR, LUMIÈRE, SON, ONDES, ÉLECTRICITÉ, MAGNÉTISME, CAPILLAIRE (ACTION) и проч.

Но всѣ поименованныя теоріи основаны, или на законахъ выведенныхъ изъ опытовъ, или, за недостаткомъ такихъ, просто, на ипотезахъ, болѣе или менѣе правдоподобныхъ. Математическій Анализъ не ограничивается разсматриваніемъ явленій, коихъ причины дѣйствительно извѣстны, или предполагаются извѣстными: онъ подвергаетъ своимъ изслѣдованіямъ такія явленія, коихъ причины вовсе неизвѣстны, и относительно которыхъ невозможно даже предложить никакой ипотезы. Это приложеніе, вѣнецъ умственныхъ созданій нашихъ временъ, есть *Анализъ* или *Исчисленіе Вѣроятностей*; Смот. PROBABILITÉS (CALCUL DES).

Мы сказали, что Математическій Анализъ отличается отъ всѣхъ наукъ своею независимостію, то есть тѣмъ, что онъ не заимствуется никакими истинами другихъ отраслей человѣческихъ познаній. И въ самомъ дѣлѣ, всѣ науки занимаются, или физическими тѣлами органическими и неорганическими, или человѣкомъ, или его дѣйствіями *). Но для *чистаго* и *геометрическаго Анализа* нѣтъ никакой необходимости въ томъ, чтобы тѣла дѣйствительно существовали, и къ тому жъ, легко понять, что наука, имѣющая предметомъ только понятіе о величинѣ, нисколько не зависитъ отъ природы человѣка и его дѣйствій. Что касается до *данныхъ*, которыми Анализъ заимствуется отъ Физики, то и это единственно для того, чтобы узнать требованія сей науки, и въ такомъ случаѣ, онъ служитъ ей опорою при изслѣдованіяхъ, превосходящихъ силы наблюдательныхъ наукъ.

Анализъ есть наука самая ясная, потому что она самая строгая; ибо, только то ясно, что со строгостію опредѣлено. Дѣйствительно, если какой либо предметъ не строго, то есть, не вполнѣ опредѣленъ, то этотъ предметъ не можетъ быть для насъ яснымъ, и понятіе о немъ соединено съ какою-то неопредѣленностію, которую иначе нельзя устранить, какъ пополняя то, чего недоставало въ прежнемъ опредѣленіи. Къ сожалѣнію, всѣ наши знанія, болѣе или менѣе, заслуживаютъ нареканіе за недостатокъ въ той ясности, полнотѣ, положительности, если смѣемъ такъ выразиться, которыя отличаютъ въ высшей степени математическій Анализъ.

Анализъ, приложенный къ Геометріи, былъ извѣстенъ древнимъ геометрамъ; Платону, жившему за 400 лѣтъ до Р. Х., приписываютъ введеніе аналитическаго способа въ доказательства и строенія геометрическія. По сущности своей, Анализъ Древнихъ и нашъ Анализъ одно и то же: только, въ наши времена, орудія этого способа получили значительныя усовершенствованія, и многія приложенія, неизвѣстныя древнимъ, разширили предѣлы нашихъ знаній въ области Физическихъ Наукъ.

Приведемъ примѣръ древняго Анализа, а потомъ покажемъ синтетическое рѣшеніе той же задачи для сличенія обоихъ способовъ.

*) Само собой понимается, что мы исключаемъ изъ этого числа *науки Богословскія*.

ЗАДАЧА.

Данъ кругъ DEFK (черт. 9, листъ 1) *и прямая AB (предполагаемъ, что она не пересѣкаетъ круга); найти на окружности этого круга такую точку E, что если проведемъ прямыя EA и EB, и соединимъ потомъ точки I и H пересѣченія ихъ съ окружностію, то прямая IH была бы параллельна данной прямой AB.*

АНАЛИЗЪ.

Положимъ, что задача рѣшена, то есть, что искомая точка дѣйствительно въ E, а HI параллельна линіи BA. Пусть будетъ IG касательная къ кругу въ точкѣ I, и G точка пересѣченія этой касательной съ прямою AB.

Очевидно, что уголъ HIG равный углу IGB, по причинѣ параллельности прямыхъ BA и IH, будетъ также равенъ углу HEI или AEB, ибо какъ первый, такъ и второй измѣряются половиною дуги IKH. Съ другой стороны, уголъ EBA принадлежитъ обоимъ треугольникамъ AEB и IGB; слѣдовательно, эти два треугольника подобны между собою. И такъ имѣемъ пропорцію: $AB : BE :: BI : BG$, изъ которой выводимъ, что прямоугольникъ $BI \times BE$ равенъ прямоугольнику $AB \times BG$; но прямоугольникъ $BI \times BE$ равенъ квадрату касательной BF, которая извѣстна, ибо точка B дана по условію задачи. Слѣдовательно получимъ пропорцію: $AB : BF :: BF : BG$, изъ которой усматриваемъ, что для опредѣленія неизвѣстной линіи BG, стоитъ только найти третью пропорціональную къ линіямъ AB и BF.

И такъ, для рѣшенія задачи, слѣдуетъ: 1°. На данной линіи BA, отъ точки B, отложить линію BG, опредѣляемую изъ пропорціи $AB : BF :: BF : BG$. 2°. Чрезъ точку G провести касательную къ данному кругу, чрезъ что̀ опредѣлится точка I на его окружности. 3°. Соединить точку B съ I и продолжить линію BI до ея встрѣчи съ окружностію. Опредѣленная такимъ образомъ точка E будетъ искомая.

СИНТЕЗЪ.

Строеніе. На данной прямой BA, отъ точки B, откладываемъ линію BG, равную четвертому члену пропорціи $AB : BF :: BF : BG$, откуда заключаемъ, что прямоугольникъ $AB \times BG$ равенъ квадрату BF^2; потомъ, проводимъ чрезъ точку G касательную GI къ данному кругу. Точку B соединяемъ съ I, и продолживъ линію BI до ея встрѣчи съ окружностію въ E, соединяемъ опять E съ A. Эта прямая EA пересѣчетъ окружность въ нѣкоторой точкѣ H; соединяя сію послѣднюю съ I, получимъ прямую HI, параллельную линіи AB, что̀ и надлежало опредѣлить.

Доказательство. Такъ какъ по строенію $AB : BF :: BF : BG$, то прямоугольникъ $AB \times BG$ равенъ квадрату BF^2; но BF^2, по свойству сѣкущей, равняется прямоугольнику $BI \times BE$: слѣдовательно $AB : BE :: BI : BG$; отсюда заключаемъ, что треугольники ABE и IBG подобны между собою, а уголъ IGB равенъ углу BEA. Но уголъ BEA, или, что всё равно, уголъ IEH равенъ углу HIG, ибо тотъ и другой измѣряются половиною дуги IKH; слѣдовательно уголъ HIG равенъ IGB, почему линія IH будетъ параллельна прямой AB, что̀ и надлежало доказать.

Чтобы еще болѣе ознакомить нашихъ читателей съ способомъ аналитическимъ, мы предлагаемъ, для сравненія, доказательство геометрической теоремы посредствомъ Анализа, Синтеза и приведенія къ противорѣчію [Смот. ABSURDE (RÉDUCTION A L')].

Предполагая мѣру угловъ при центрѣ извѣстною, и зная какъ свойства угловъ, такъ и свойства параллельныхъ линій, имѣемъ въ виду доказать слѣдующую теорему:

Уголъ при окружности ABD (черт. 10, листъ 1), *коего одна сторона BD проходитъ чрезъ центръ C, измѣряется половиною дуги AD, заключающейся между его сторонами AB и DB.*

АНАЛИЗЪ.

Положимъ теорему справедливою, и пусть $AE = ED = \frac{1}{2} AD$; m будетъ измѣряться дугою AE или ED. Слѣдовательно, если чрезъ E проведемъ діаметръ ECF, то уголъ n, имѣющій мѣрою также дугу ED, будетъ равняться углу m, и по этой причинѣ діаметръ ECF будетъ параллеленъ хордѣ AB. И въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $AE = ED$, и какъ сверхъ того $ED = BF$, то $AE = BF$, откуда заключаемъ, что AB и ECF параллельны между собою. Слѣдовательно, и проч.

*

СИНТЕЗЪ.

Проводимъ діаметръ ECF параллельно AB; слѣдовательно уголъ $m = n$; но n имѣетъ мѣрою $ED = BF$, а BF, по свойству параллельныхъ хордъ, равняется AE; слѣдовательно $AE = ED = \frac{1}{2}AD$. И такъ $m = \frac{1}{2}AD$, что̀ и надлежало доказать.

ПРИВЕДЕНІЕ КЪ ПРОТИВОРѢЧІЮ.

Положимъ, что уголъ m имѣетъ мѣрою дугу бо́льшую или ме́ньшую $\frac{1}{2}AD$, напримѣръ $E'D$. Проводя діаметръ $E'CF'$, будетъ $n' = m$, ибо оба угла сіи измѣряются одною и тою же дугою $E'D$; и такъ, діаметръ $E'CF'$ параллеленъ хордѣ AB. Но такъ какъ $E'D >$ или $< AE'$, то будетъ также $BF' >$ или $< AE'$, а это показываетъ, что діаметръ $E'CF'$ не параллеленъ линіи AB. Слѣдовательно, и проч.

Многіе математики опредѣляютъ Анализъ *способомъ рѣшать математическія задачи, приводя ихъ къ уравненіямъ;* но это опредѣленіе, какъ легко заключить изъ сказаннаго нами объ Анализѣ, не всегда справедливо. И дѣйствительно, очень можетъ случиться, что доказывая какую либо истину или рѣшая задачу, мы употребляемъ уравненія, а придерживаемся способа синтетическаго, или, наоборотъ, не вводя уравненій, руководствуемся способомъ аналитическимъ.

Здѣсь также мѣсто объяснить различіе между тремя наименованіями *Анализъ*, *Анализисъ* и *Аналитика*, употребляемыми на Русскомъ языкѣ: между *Анализомъ* и *Анализисомъ* не полагается другаго различія, какъ развѣ только то̀, что второе слово употреблялось у насъ преимущественно въ Геометріи, а первое, въ тѣхъ математическихъ теоріяхъ, въ которыя входятъ алгебрическіе знакоположенія и способы. Подъ *Аналитикою* нѣкоторые разумѣютъ *Приложеніе Алгебры къ Геометріи*, или, правильнѣе, *Аналитическую Геометрію* (Смот. GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE), а другіе, *Дифференціальное и Интегральное Исчисленіе*. Также, называютъ часто *Неопредѣленною Аналитикою* ту часть Теоріи Чиселъ, которая занимается разысканіемъ раціональныхъ рѣшеній неопредѣленныхъ уравненій. Смот. INDÉTERMINÉE (ANALYSE). Намъ кажется, что такъ какъ *Анализъ* принимается просто въ смыслѣ *способа* умствованія, то естественнѣе всего удержать только одно наименованіе *Анализа*.

ANALYSE PURE или GÉNÉRALE. **Чистый, общій Анализъ.** Смот. выше. Чистый Анализъ раздѣляютъ нѣкоторые слѣдующимъ образомъ:

1° *Analyse des quantités finies* или *Analyse algébrique*. *Анализъ конечныхъ величинъ* или *Алгебрическій Анализъ*. Смот. ALGÈBRE.

2° *Analyse des quantités infiniment petites* или *Analyse infinitésimale*. *Анализъ безконечно малыхъ величинъ*, или, просто *Анализъ безконечныхъ*. Смот. INFINITÉSIMALE (ANALYSE), DIFFÉRENTIEL, INTÉGRAL.

3° *Analyse indéterminée*. *Неопредѣленный Анализъ*. Смот. INDÉTERMINÉE (ANALYSE).

Къ этимъ тремъ отдѣламъ можно прибавить еще *Анализъ цѣлыхъ чиселъ (Analyse des entiers)* и *Анализъ раціональныхъ количествъ (Analyse des quantités rationnelles)*, собственно входящіе въ составъ *Теоріи Чиселъ*. Смот. NOMBRES (THÉORIE DES).

ANALYSE APPLIQUÉE. **Прикладной Анализъ.** Смот. статью ANALYSE. — Иногда подъ *прикладнымъ анализомъ* разумѣютъ способъ приводить задачу въ уравненіе.

ANALYSE D'UNE COURBE. (Геом.) **РАЗБОРЪ, ИЗСЛѢДОВАНІЕ КРИВОЙ ЛИНІИ.** Разысканіе ея вида и различныхъ свойствъ. См. COURBE.

ANALYSER UNE COURBE или **FAIRE L'ANALYSE D'UNE COURBE. ДѢЛАТЬ РАЗБОРЪ КРИВОЙ ЛИНІИ, ИЗСЛѢДОВАТЬ КРИВУЮ.** Найти видъ кривой и различныя ея свойства.

ANALYSTE. АНАЛИЗТЪ; человѣкъ свѣдущій въ Анализѣ.

ANALYTIQUE. АНАЛИТИЧЕСКІЙ; свойственный или принадлежащій Анали́зу. *Méthode analytique; аналитическій, раздробительный способъ.* Смот. ANALYSE.

MÉCANIQUE ANALYTIQUE. **Аналитическая Механика.** Вообще, изложеніе правилъ Механики, руководствуясь однимъ Анализомъ, и безъ пособія геометрическихъ соображеній. — Заглавіе безсмертнаго труда *Лагранжа;* въ этомъ твореніи, великій Геометръ привелъ всю Механику къ одной формулѣ, выражающей начало, найденное *Иваномъ Бернулли*, и извѣстное подъ наименоваваніемъ *Начала возможныхъ скоростей;* Смот. VIRTUELLES (PRINCIPE DES VITESSES).

Analytique (Parallélogramme). Аналитическій параллелограммъ. См. PARALLÉLOGRAMME.

ANAMORPHIQUE (MACHINE). АНАМОРФИЧЕСКАЯ МАШИНА. Машина для составленія *анаморфозъ*; Смот. ниже. Читатели найдутъ описаніе двухъ такихъ машинъ, изобрѣтенныхъ *Яковомъ Леопольдомъ*, въ книгѣ: *Dictionnaire universel de Mathématique et de Physique*, соч. *Saverien*.

ANAMORPHOSE или **DÉFORMATION.** (Персп.) **АНАМОРФОЗА, АНАМОРФОЗЪ, ВИДОИЗВРАЩЕНІЕ;** *искаженное, сбивчивое, превратное изображеніе.* Такъ называется изображеніе, вообще искаженное, но которое, при извѣстномъ положеніи глаза, представляетъ совершенное сходство съ какимъ либо предметомъ, въ естественномъ его видѣ. Анаморфозы могутъ быть начерчены или на плоскости, или на кривой поверхности. Онѣ раздѣляются на два рода: на анаморфозы *прямыя (directes)* и *отраженныя (réfléchies)*. На первыя смотрятъ простымъ глазомъ; вторыя должны быть усматриваемы чрезъ отраженіе, для чего употребляютъ обыкновенно зеркала цилиндрическія, коническія или пирамидальныя.

Въ сочиненіи механика *Якова Леопольда*: *Anamorphosis mechanica nova*, напечатанномъ въ 1714 году, описаны изобрѣтенныя имъ двѣ *анаморфическія* машины, посредствомъ которыхъ составляются механически анаморфозы чрезъ отраженіе. Первая изъ нихъ служитъ для зеркалъ цилиндрическихъ, а вторая для коническихъ. Что касается до *теоретическаго* способа составленія искаженныхъ изображеній, то употребляютъ на сей конецъ *способъ квадратовъ*, который весьма удобенъ при построеніи прямыхъ анаморфозъ на плоскости. Вотъ въ чемъ состоитъ этотъ способъ.

Положимъ, что дано изображеніе въ естественномъ его видѣ; строимъ около него квадратъ *ABCD* (черт. 11, листъ 1), который, въ свою очередь, разбиваемъ на нѣкоторое число малыхъ квадратиковъ (на чертежѣ на 25). Потомъ, взявъ сторону *AB* квадрата, переносимъ ее въ *ab* (чертежъ 12, листъ 1), такъ что $ab = AB$; сторону *ab* раздѣляемъ на столько же частей, сколько ихъ находится въ *AB* (на чертежѣ на 5 частей). Изъ средины *E* прямой *ab* возставляемъ перпендикуляръ *EI*, а изъ точки *I*, перпендикуляръ *IK*. Длины этихъ двухъ перпендикуляровъ совершенно произвольны; но должно замѣтить, что изображеніе будетъ тѣмъ болѣе искажено, чѣмъ длиннѣе будетъ линія *EI*, а короче линія *IK*. Каждую точку дѣленія прямой *ab* соединяемъ съ точкою *I*, а потомъ точку *K* съ точкою *a*. Чрезъ каждую изъ точекъ *d, e, f, g, h*, пересѣченія прямой *Ka* съ линіями *bI, 1I, 2I, 3I, 4I* проводимъ линіи, параллельныя прямой *ab*. Такимъ образомъ получаемъ трапецію *abcd*, состоящую изъ столькихъ малыхъ трапецій, сколько въ квадратѣ *ABCD* заключается квадратиковъ. Тогда, въ каждой изъ малыхъ трапецій чертежа 12, изображаемъ глазомѣрно то̀, что̀ находится въ соотвѣтственномъ квадратикѣ чертежа 11, и получаемъ совершенно искаженное изображеніе. Но если въ точкѣ *I*, перпендикулярно къ плоскости трепеціи *abcd*, поставимъ пластинку *LM* (черт. 13) такой длины, что высота отверстія *M* надъ точкою *I* равняется разстоянію *IK*, и потомъ будемъ смотрѣть на чертежъ сквозь сіе отверстіе, то увидимъ изображеніе въ естественномъ его видѣ, именно въ томъ, въ какомъ оно представлено въ квадратѣ *ABCD*.

Для бо̀льшихъ подробностей о построеніи анаморфозъ, мы отсылаемъ читателей къ Курсамъ Начертательной Геометріи, и въ частности, къ Трактатамъ о Перспективѣ. Смот. также статью *Anamorphose* въ *Encyclopédie méthodique*, отдѣленіе *Mathématiques*.

ANCIENNE GÉOMÉTRIE или **GÉOMÉTRIE DES ANCIENS. ДРЕВНЯЯ ГЕОМЕТРІЯ, ГЕОМЕТРІЯ ДРЕВНИХЪ,** то есть, Геометрія въ томъ видѣ, въ какомъ она была до *Декарта*, когда еще не прикладывали къ ней аналитическихъ вычисленій. — Иногда же подъ *Геометріею Древнихъ* разумѣютъ состояніе этой науки отъ временъ Декарта до изобрѣтенія Дифференціальнаго и Интегральнаго исчисленій. Смот. GÉOMÉTRIE.

ANDROIDE. (Мех.) **АНДРОИДЪ, АВТОМАТЪ, САМОДВИГЪ.** Смот. AUTOMATE.

ANÉANTIR. (Алг.) **УНИЧТОЖИТЬ.** Смот. ANNULER.

s'Anéantir. Уничтожаться. *Cette quantité s'anéantit, s'annule, s'évanouit d'elle même; это количество само собою уничтожается, обращается въ нуль.*

ANÉMOMÈTRE. (Mex.) **АНЕМОМЕТРЪ, ВѢТРОМѢРЪ.** Снарядъ, посредствомъ котораго измѣряется сила вѣтра.

ANÉMOSCOPE. (Mex.) **АНЕМОСКОПЪ, ВѢТРОУКАЗАТЕЛЬ.** Машина, указывающая перемѣны вѣтра.

ANGLE. (Геом. Мех. Физ. Астр.) **УГОЛЪ.** Подъ этимъ наименованіемъ разумѣютъ бо́льшую или ме́ньшую степень взаимнаго наклоненія двухъ встрѣчающихся прямыхъ линій. Прямыя линіи въ такомъ случаѣ называются *сторонами угла (côtés, jambes de l'angle)*, а точка встрѣчи, *вершиною угла (sommet, pointe de l'angle)*. Это взаимное наклоненіе измѣряется длиною дуги, описанной изъ вершины угла радіусомъ равнымъ единицѣ, и ограниченной двумя встрѣчающимися прямыми; очевидно, что въ такомъ смыслѣ, уголъ будетъ изображенъ извѣстною длиною, или отвлеченнымъ числомъ. — *Угломъ* называютъ также неограниченное пространство, заключающееся между двумя пересѣкающимися прямыми линіями.

Angle rectiligne. Прямолинейный уголъ, то есть такой, коего обѣ стороны прямыя линіи.

Angle curviligne. Криволинейный уголъ, составляемый двумя кривыми линіями.

Angle mixtiligne. Разнолинейный уголъ, у котораго одна сторона прямая, а другая, кривая линія.

Angle droit. Прямой уголъ. Уголъ, составляемый двумя прямыми, взаимно перпендикулярными. Смот. PERPENDICULAIRE.

Angle aigu. Острый уголъ. Уголъ ме́ньшій прямаго.

Angle obtus. Тупой уголъ. Уголъ бо́льшій прямаго.

Angle de suite. Смежные углы. Смот. ADJACENTS (ANGLES) во второмъ значеніи.

Angles opposés au sommet, par le sommet или angles verticaux. Углы противуположные вершинами, вершинные углы, вертикальные углы; углы составляемые двумя пересѣкающимися прямыми. На черт. 14 (листъ 1) углы AOB и COD, также AOC и BOD *противуположны вершинами.*

Angles correspondants. Соотвѣтственные углы. Такъ называются углы находящіеся по одну сторону прямой, пересѣкающей двѣ параллельныя линіи, и обращенные своими отверстіями въ одну и ту же сторону. Таковы углы $BO'C'$ и AOC' (черт. 15, листъ 1); углы $BO'C$ и AOC; также $C'O'B'$ и $C'OA'$, и еще $B'O'C$ и $A'OC$.

Angles au centre. Углы при центрѣ. Углы составляемые радіусами, проведенными изъ центра многоугольника къ каждому изъ его угловъ. Сумма угловъ при центрѣ очевидно равна четыремъ прямымъ. — Уголъ, составляемый двумя радіусами, проведенными въ кругѣ.

Angle a la circonférence или Angle inscrit. Уголъ при окружности или вписанный уголъ, то есть такой, котораго вершина находится при окружности круга. Таковъ уголъ BAC (черт. 16, листъ 1). Уголъ при окружности измѣряется половиною дуги, заключающейся между его сторонами; и такъ, уголъ BAC имѣетъ мѣрою половину дуги BFC. Уголъ BOC, коего вершина находится внутри круга, измѣряется половиною дуги BFC, заключающейся между его сторонами, сложенною съ половиною дуги AGE, отсѣченной ихъ продолженіями OA и OE. Уголъ BDC, коего вершина D находится внѣ круга, имѣетъ мѣрою половину дуги BFC, безъ половины дуги AGE, заключающихся между его сторонами DB и DC.

Angle de contingence. Уголъ смежности. Уголъ касанія. Смот. CONTINGENCE.

Angle plano-linéaire. Плосколинейный уголъ. Уголъ, составляемый прямою линіею съ плоскостію.

Angle plan. Плоскій уголъ. Уголъ, составляемый двумя встрѣчающимися прямыми. — *Плоскостной уголъ*, образуемый двумя пересѣкающимися плоскостями.

Angle solide или Angle polyèdre. Многогранный уголъ. Угловое пространство, образуемое нѣсколькими плоскостями, пересѣкающимися по-двѣ, и имѣющими общую точку, которая называется *вершиною многограннаго угла (sommet de l'angle solide)*. Плоскости въ такомъ случаѣ именуются *гранями (faces)*, а ихъ пересѣченія, *ребрами (arêtes)*. Смот. COIN.

Angle solide droit. Прямой трегранный уголъ. Угловое пространство, заключающееся между тремя пересѣкающимися и взаимно перпендикулярными плоскостями.

Angles solides symétriques. Симметрическіе многогранные углы. Два многогранные угла называются *симметрическими между собою*, когда, по приведеніи ихъ въ надлежащее положеніе, ребра одного изъ нихъ будутъ соотвѣтственно параллельны ребрамъ другаго, но направлены въ противныя стороны. Очевидно впрочемъ, что число ребръ въ обоихъ углахъ будетъ одно и то же.

Angle dièdre. Двугранный уголъ. Пространство, заключающееся между двумя пересѣкающимися плоскостями. Мѣрою двуграннаго угла служитъ плоскій уголъ, получаемый чрезъ разсѣченіе плоскостей граней, плоскостію имъ перпендикулярною.

Angle trièdre. Трегранный уголъ. Когда три плоскости, встрѣчаясь въ одной точкѣ, пересѣкаются взаимно, то образуютъ уголъ, именуемый *трегранным*ъ.

Angle-tétraèdre. Четырегранный уголъ.

Angle pentaèdre. Пятигранный уголъ, и такъ далѣе, по числу пересѣкающихся плоскостей.

Angle sphérique. Сферическій уголъ. Уголъ, составляемый взаимнымъ наклоненіемъ двухъ плоскостей, пересѣкающихъ шаръ въ его центрѣ.

Angle de direction. Уголъ направленія. Смотр. DIRECTION.

Angle d'élévation. Уголъ возвышенія. Уголъ, составляемый какою либо линіею (напримѣръ, осью орудія) съ горизонтальною плоскостію.

Angle d'inclinaison. Уголъ наклоненія.

Angle visuel или optique. Зрительный, оптическій уголъ. Уголъ, составляемый двумя лучами зрѣнія, проведенными отъ глаза наблюдателя къ двумъ предметамъ.

Angle d'incidence и Angle de réflexion. Смотр. INCIDENCE.

Angle horraire. Часовой уголъ. Уголъ при полюсѣ экватора, заключающійся между меридіаномъ и кругомъ склоненія, который проходитъ чрезъ свѣтило. Часовой уголъ измѣряется дугою экватора, заключающеюся между точками, въ которыхъ меридіанъ и кругъ склоненія пересѣкаются съ экваторомъ, и потому сей послѣдній называется также *часовымъ кругомъ (cercle horraire)*. Часовые углы считаются всегда отъ меридіана, или къ Западу, или къ Востоку до 180° или до 12 час.; или отъ меридіана къ Западу до 360° или до 24 час. Въ Астрономіи часовые углы свѣтилъ имѣютъ весьма большое употребленіе; они служатъ къ опредѣленію времени, высоты свѣтила, азимута, широты мѣста и проч. Въ гражданскомъ быту, часовые углы солнца употребляются для опредѣленія часовъ дня. Когда солнце удалилось отъ меридіана на 15°, 30°.... 180°, тогда считаютъ *одинъ, два....двѣнадцать часовъ*.

Angle parallactique. Параллактическій уголъ. Уголъ при свѣтилѣ, заключающійся между кругами склоненія и вертикальнымъ, проходящими чрезъ свѣтило.

Angle de position. Уголъ положенія. Уголъ при свѣтилѣ, составляемый кругами склоненія и широты, проходящими чрезъ свѣтило.

Angle d'élongation. Уголъ удаленія, то есть, уголъ при центрѣ земли, между радіусомъ векторомъ солнца и укращеннымъ разстояніемъ планеты отъ земли.

Angle de commutation. Уголъ измѣненія. Уголъ при центрѣ солнца, между радіусомъ векторомъ земли и укращеннымъ радіусомъ векторомъ планеты.

ANGUINÉE. (Геом.) **ЗМІЕВИДНАЯ, ИЗВИВНАЯ ИПЕРБОЛА.** Ньютонъ, въ разборѣ кривыхъ линій третьяго порядка, назвалъ *зміевидными иперболами* нѣкоторыя кривыя, относящіяся къ сему порядку. Чертежъ 17 (листъ 1) представляетъ такую кривую. Она пересѣкаетъ свою ассимптоту въ точкѣ B, и имѣетъ въ D и E точки изгиба. Уравненіе этой кривой слѣдующее:

$$x^2y + aby - a^2x = 0.$$

ANGULAIRE. (Геом.) **УГЛОВОЙ.** Относящійся къ угламъ. *Espace angulaire; угловое пространство.— Круговой, дуговой.*

ANGULAIRES (SECTIONS) или **SECTIONS CIRCULAIRES.** (Геом.) **КРУГОВЫЯ, ДУГОВЫЯ СѢЧЕНІЯ.** То есть, дѣленіе окружности круга, или какой либо круговой дуги на извѣстное число равныхъ частей. Также, разысканіе закона, по которому возрастаютъ и уменьшаются синусы или хорды *кратныхъ (arcs multiples)* и *дольныхъ дугъ (arcs sous-multiples)*.

Теорія круговыхъ сѣченій есть одно изъ примѣчательнѣйшихъ открытій *Віета*. Онъ напечаталъ его въ 1579 году въ своемъ *Canon Mathematicus,* заключающемъ въ себѣ таблицы синусовъ, построенныя на основаніи выведенныхъ имъ формулъ для круговыхъ сѣченій.

Возьмемъ полукругъ $AHFDB$ (черт. 18 листъ 1), раздѣленный на какое угодно число равныхъ частей (на чертежѣ, на *восемь*). Пусть будетъ радіусъ $OA = 1$, а хорда $BI = x$; Віетъ нашелъ слѣдующія формулы:

$$AB = 2$$
$$AC = x$$
$$AD = x^2 - 2$$
$$AE = x^3 - 3x$$
$$AF = x^4 - 4x^2 + 2$$
$$AG = x^5 - 5x^3 + 5x$$
$$AH = x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и вообще, изобразивъ чрезъ ω дугу CB, дополнительная хорда кратной дуги $m\omega$ опредѣлится рядомъ

$$x^m - \frac{m}{1}x^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1\cdot 2}x^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{m-6} + \frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{m-8} - \text{и пр.}$$

Полагая же хорду $BC = y$, получимъ:

$$BC = y$$
$$BD = y\sqrt{4-y^2}$$
$$BE = 3y - y^3$$
$$BF = (2y - y^3)\sqrt{4-y^2}$$
$$BG = 5y - 5y^3 + y^5$$
$$BH = (3y - 4y^3 + y^5)\sqrt{4-y^2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и вообще, для хорды чётно-кратной дуги $2m\omega$, полагая хорду дуги ω равною y, найдемъ:

$$\left(my - \frac{(m+1)m(m-1)}{1\cdot 2\cdot 3}y^3 + \frac{(m+2)(m+1)m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}y^5 - \frac{(m+3)(m+2)(m+1)m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}y^7 + \ldots\right)\sqrt{4-y^2}$$

а для хорды нечётно-кратной дуги $(2m+1)\omega$

$$(2m+1)\left(y - \frac{(m+1)m}{2\cdot 3}y^3 + \frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}y^5 - \frac{(m+3)(m+2)(m+1)m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}y^7 + \ldots\right)$$

Замѣтимъ, что хотя мы и предположили, что полуокружность раздѣлена на нѣкоторое число равныхъ дугъ, но приведенныя нами формулы будутъ справедливы для какой ни есть дуги, хотя бы она и не вмѣщалась цѣлое число разъ въ окружности круга.

Легко видѣть, что посредствомъ сихъ формулъ, можно приводить къ рѣшенію численныхъ уравненій раздѣленіе произвольной дуги на какое угодно число равныхъ частей. Дѣйствительно, положимъ что требуется раздѣлить дугу s, коей хорда $= a$, на 5 равныхъ частей; въ такомъ случаѣ получимъ уравненіе $y^5 - 5y^3 + 5y = a$. Одинъ изъ корней будетъ равняться хордѣ пятой части дуги s, другой $\frac{1}{5}(\pi - s)$, третій $\frac{1}{5}(\pi + s)$, четвертый $\frac{1}{5}(2\pi + s)$, пятый $\frac{1}{5}(3\pi + s)$. Точно такъ будетъ и вообще.

Въ такомъ состояніи находилась теорія круговыхъ сѣченій, и даже никто не воображалъ, чтобы она могла подвинуться впередъ, какъ въ 1801 году, вышло въ свѣтъ примѣчательное сочиненіе *Гаусса* подъ заглавіемъ: *Disquisitiones Arithmeticae*, въ которомъ эта теорія истощена. Гауссъ доказываетъ, что дѣленіе окружности на m равныхъ частей возможно посредствомъ *циркуля* и *линейки*, когда m изображаетъ *простое число (nombre premier)* вида $2^n + 1$. И такъ, окружность можетъ быть раздѣлена на 17 частей, ибо 17 число простое вида $2^4 + 1$. То же самое можно сказать о числахъ $257 = 2^8 + 1$ и $65537 = 2^{16} + 1$. Если изобразимъ вообще чрезъ M число, на которое окружность можетъ быть раздѣлена *геометрически*, то, ниже предѣла 300, найдемъ слѣдующія тридцать восемь значеній для M:

2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96, 102, 120, 128, 136, 160, 170, 192 204, 240, 255, 256, 257, 272,

въ чемъ легко удостовѣриться соображаясь съ открытіемъ Гаусса и съ тѣмъ, что было извѣстно до него относительно дѣленія окружности.

Мы сказали выше, что теорія круговыхъ сѣченій *истощена* Гауссомъ. Дѣйствительно, въ упомянутомъ выше сочиненіи, онъ предлагаетъ слѣдующую теорему: Чтобы *геометрическое дѣленіе окружности на M равныхъ частей было возможно, число M не должно заключать иныхъ простыхъ нечётныхъ дѣлителей, какъ только вида $2^n + 1$, и сверхъ того, сіи дѣлители должны быть всѣ различны между собою.*

Если M не удовлетворяетъ симъ условіямъ, то, по утвержденію Гаусса, онъ можетъ доказать невозможность *геометрическаго* раздѣленія окружности на M равныхъ частей.

Мы отсылаемъ читателей къ статьѣ BINOMES (ÉQUATIONS), въ которой говорено подробнѣе объ открытіяхъ Гаусса относительно сего предмета. Смот. также PENTAGONE RÉGULIER.

ANGULAIRE (MOUVEMENT). (Мех.) **УГЛОВОЕ ДВИЖЕНІЕ.** Движеніе системы около неподвижной точки или оси. Подобное движеніе чаще называется *вращательнымъ*. Смот. ROTATION (MOUVEMENT DE).

VITESSE ANGULAIRE. (Мех.) Угловая скорость. Когда неизмѣняемая система обращается около неподвижной оси, то отношеніе скорости каждой точки, къ ея разстоянію отъ оси, есть одно и то же для всѣхъ точекъ. Сіе-то отношеніе именуется *угловою скоростію*. Если эта скорость постоянна, то вращательное движеніе будетъ *равномѣрное*.

ANGULEUX. (Геом.) **УГЛОВАТЫЙ;** имѣющій нѣсколько угловъ. *Corps anguleux, угловатое тѣло.*

ANIMÉ PAR DES FORCES. (Мех.) **ПОБУЖДАЕМЫЙ СИЛАМИ.** Смот. FORCE.

ANNEAU. (Геом.) См. ANNULAIRE (SURFACE).

ANNEAU ASTRONOMIQUE. См. CADRAN ÉQUINOXIAL PORTATIF.

ANNEAU DE SATURNE. (Астр.) **САТУРНОВО КОЛЬЦО.** Смот. SATURNE.

ANNEAUX COLORÉS. (Опт.) **ЦВѢТНЫЯ КОЛЬЦА.** Когда на плоское, или съ весьма малою выпуклостію стекло, тщательно выполированное, положимъ другое, двояко-выпуклое, но имѣющее едва замѣтную кривизну, то между ними останется слой воздуха, коего толстота вообще достаточна для того, чтобы лучи свѣта, выходя изъ выпуклаго стекла, преломлялись или отражались. Если свѣтъ будетъ падать на выпуклое стекло, то замѣтимъ около точки прикосновенія поверхностей стеколъ болѣе или менѣе значительное число разноцвѣтныхъ концентрическихъ полосъ, которыя называются *цвѣтными кольцами*. Мы изложимъ здѣсь вкратцѣ обстоятельства, сопровождающія это явленіе, и замѣтимъ прежде всего, что необходимо произвести треніе между стеклами и придавить одно къ другому, дабы по возможности, уменьшить толстоту слоя воздуха, заключающагося между ними. Достигнувъ этого условія, замѣтимъ, что *въ точкѣ прикосновенія стеколъ образуется черное пятно; около него, въ видѣ концентрическихъ круговъ, появляются цвѣтныя кольца, коихъ цвѣта сохраняютъ всегда такую послѣдовательность: въ первомъ кольцѣ, начиная отъ чернаго пятна* — голубой, бѣлый, желтый, красный; *во второмъ* — фіолетовый, голубой, зеленый, желтый, красный; *въ третьемъ* — пурпуровый, голубой, желтый, красный; *въ четвертомъ* — зеленый, красный; *въ пятомъ* — голубой, зеленоватый, красный; *въ шестомъ* — голубой, зеленоватый, блѣдно-красный; *въ седьмомъ* — голубой-зеленоватый, бѣло-красноватый. Первое изъ сихъ колецъ называется *цвѣтнымъ кольцомъ перваго порядка*, второе — *кольцомъ втораго порядка*, и такъ далѣе.

Нютонъ, замѣтившій цвѣтныя кольца, старался открыть законы и причину этого явленія. Онъ тщательно измѣрилъ радіусы колецъ различныхъ порядковъ въ мѣстахъ наиболѣе яркихъ, и нашелъ, что длины ихъ пропорціональны квадратнымъ корнямъ изъ нечётныхъ чиселъ 1, 3, 5, 7, 9, 11....; длины же радіусовъ тёмныхъ колецъ нашлись пропорціональными квадратнымъ корнямъ изъ чётныхъ чиселъ 0, 2, 4, 6, 8, 10... Отсюда Нютонъ вывелъ, посредствомъ весьма простаго вычисленія, что промежутки между поверхностями стеколъ при свѣтлыхъ кольцахъ возрастаютъ какъ числа прогрессіи 1, 3, 5, 7, 9, 11...., а при тёмныхъ, какъ чётныя числа 0, 2 4, 6, 8, 10.... Для сихъ опытовъ онъ употреблялъ одно стекло плоское, а другое выпуклое, принадлежащее шару, коего діаметръ былъ во сто одинъ футъ. Онъ нашелъ, что толстота слоя воздуха, соотвѣтствующая самой свѣтлой части перваго кольца, составляла $\frac{1}{178000}$ долю англійскаго дюйма; слѣдовательно, самой свѣтлой части втораго кольца соотвѣтствовала толстота въ $3 \times \frac{1}{178000}$ дюйма; третьяго, $5 \times \frac{1}{178000}$ и проч.

Нютонъ производилъ также опыты надъ цвѣтными кольцами впуская между стеклами каплю воды; опыты сіи показали, что порядокъ цвѣтовъ и относительныя размѣренія колецъ не измѣняются, а только радіусы ихъ уменьшаются въ отношенiи 7 къ 8, откуда происходитъ измѣненiе толстоты слоевъ воды и воздуха въ отношенiи 3 къ 4, а это отношенiе есть именно то, которое существуетъ между преломляемостiю изъ воды въ воздухъ. Опыты надъ другими веществами, какъ то: масломъ, стекломъ и проч. привели къ тому же самому слѣдствiю, именно, что *толстоты слоевъ, соотвѣтствующiя опредѣленному цвѣту кольца, обратно пропорцiональны показателямъ преломленiя тѣхъ веществъ, которыя заключаются между стеклами.*

Когда Ньютонъ привелъ явленiе цвѣтныхъ колецъ къ симъ законамъ, столь же простымъ, сколько и правильнымъ, то онъ приложилъ старанiе подвести ихъ подъ одинъ законъ, еще простѣйшiй; для достиженiя этой цѣли, онъ приписалъ свѣту свойство, которое назвалъ *accès de facile réflexion et de facile transmission*, то есть, *приступы удобнаго отраженiя и прохожденiя свѣта.*

Принимая свѣтъ за вещество, составленное изъ частицъ, выходящихъ изъ свѣтящихся тѣлъ и движущихся съ чрезвычайною быстротою, Ньютонъ вывелъ слѣдующее заключенiе: такъ какъ свѣтъ въ приведенныхъ выше опытахъ, а также въ тонкихъ пластинкахъ, отражается при перiодическихъ толстотахъ e, $3e$, $5e$, $7e$..., разумѣя подъ e толстоту слоя при первомъ свѣтломъ кольцѣ, а проходитъ, напротивъ того, при послѣдовательныхъ же толстотахъ 0, $2e$, $4e$, $6e$..., то свѣтородныя частицы должны имѣть, по существу своему, нѣкоторое стремленiе, равнымъ образомъ перiодическое, располагающее ихъ, при извѣстныхъ обстоятельствахъ, попеременно отражаться при толстотахъ e, $3e$, $5e$, $7e$....., а проходить, при толстотахъ 0, $2e$, $4e$, $6e$...... Этому свойству, по которому каждый лучъ свѣта, при переходѣ изъ одной середины въ другую, прiобрѣтаетъ способность попеременно отражаться и проходить при встрѣчѣ съ третьею серединою, Ньютонъ далъ наименованiе *приступовъ удобнаго отраженiя и прохожденiя свѣта.*

Толстота $2e$, измѣняющаяся для различныхъ веществъ, опредѣляетъ длину приступа. Приводимъ таблицу для величинъ $2e$, составленную Ньютономъ для простыхъ лучей въ пустотѣ, воздухѣ, водѣ и стеклѣ; замѣтимъ, что величины $2e$ выражены здѣсь во сто миллiонныхъ частяхъ англiйскаго дюйма. Для воздуха, онѣ выведены непосредственными опытами, а для прочихъ веществъ получены чрезъ раздѣленiе найденныхъ наблюденiемъ чиселъ на показатели преломленiя, то есть, на $\frac{3389}{3388}$ для пустоты, на $\frac{3}{4}$ для воды и на $\frac{20}{31}$ для стекла. Всѣ сiи величины относятся къ предположенiю перпендикулярно падающихъ лучей.

Толстота 2e для различныхъ лучей.

	въ пустотѣ	въ воздухѣ	въ водѣ	въ стеклѣ
Крайнiй фiолетовый	3,99816	3,99698	2,99773	2,57870
Предѣлъ фiолетоваго и синяго.........	4,32436	4,32308	3,24231	2,78908
Предѣлъ синяго и голубаго...........	4,51475	4,51342	3,38507	2,91188
Предѣлъ голубаго и зеленаго.........	4,84284	4,84142	3,63107	3,12350
Предѣлъ зеленаго и желтаго.........	5,23886	5,23732	3,92799	3,37891
Предѣлъ желтаго и оранжеваго.......	5,61963	5,61798	4,21349	3,62450
Предѣлъ оранжеваго и краснаго.......	5,86586	5,86414	4,39811	3,78331
Крайнiй красный...	6,34628	6,34441	4,75831	4,09317

Мы должны, по свойству нашей книги, ограничиться симъ краткимъ показанiемъ явленiя цвѣтныхъ колецъ. Читатели, желающiе ознакомиться съ этимъ важнымъ, и вмѣстѣ любопытнымъ предметомъ, найдутъ надлежащiя подробности въ курсахъ Физики, преимущественно же въ трактатахъ объ Оптикѣ. Въ системѣ волненiя по началу интерференцiй свѣта, явленiя цвѣтныхъ колецъ объясняются самымъ удовлетворительнымъ образомъ.

ANNÉE. (Астр.) **ГОДЪ.** Извѣстное число дней, составляющихъ перiодъ, постоянный или перемѣняющiйся, солнечный или лунный, смотря потому — обращенiемъ ли солнца или луны измѣряется время. Годъ раздѣляется на *Астрономическiй* и *Гражданскiй.*

Годъ Астрономическiй (année astronomique) имѣетъ различныя значенiя:

1) Année tropique. Годъ тропическiй есть истинный солнечный годъ; то есть, время которое солнце употребляетъ, чтобъ возвратиться къ тому же тропику, и слѣдовательно время, которое нужно для того, чтобы каждое годовое время снова возвращалось въ томъ же порядкѣ.

Тропическій годъ содержитъ 365 дней 5 часовъ 48 минутъ 51 секунду средняго солнечнаго времени.

2) Année sidérale. Годъ звѣздный. Время, которое солнце употребляетъ, чтобы возвратиться къ той же звѣздѣ. Звѣздный годъ болѣе тропическаго 20′20″. Причина такой разности состоитъ въ слѣдующемъ: точки равноденственныя отступаютъ ежегодно на 50″1; поэтому солнце совершитъ тропическій годъ прежде, нежели оно возвратится къ той же звѣздѣ: т. е. когда оно пройдетъ только 359°59′9″9 эклиптики. Остальныя 50″1 проходитъ оно въ 20′20″ средняго солнечнаго времени.

3) Année anomalistique. Годъ аномалистическій. Время, которое солнце употребляетъ для возвращенія къ той же аномаліи; онъ болѣе звѣзднаго 5′6″2, и болѣе тропическаго 25′27″2. Разность сія происходитъ отъ того, что линія абсидовъ солнца имѣетъ прямое движеніе въ разсужденіи неподвижныхъ звѣздъ на 11″1, а въ разсужденіи точекъ равноденственныхъ на 61″2.

Année civile. Годъ гражданскій у всѣхъ народовъ былъ или солнечный или лунный. По причинѣ различныхъ способовъ вычислять солнечный гражданскій годъ, произошли также различныя названія: годъ *Юліанскій*, *Григоріанскій*, *общій* и *високосный*.

Année Julienne. Годъ Іюліанскій содержитъ 365 солнечныхъ дней и 6 часовъ, и слѣдовательно онъ болѣе истиннаго солнечнаго тропическаго года 11′9″, которыя составляютъ почти одинъ день въ 134 года, или почти 3 дня въ 400 лѣтъ. Но такъ какъ для удобности счисленія нужно, чтобы каждый годъ начинался началомъ дня или сутокъ, то условились считать въ первыхъ трехъ годахъ сряду по 365 дней, а въ четвертомъ 366 дней. Первые три года называются *простыми* (*années communes*), а четвертый *високоснымъ* (*bissextile*). Годы отъ Р. Х. дѣлящіеся на-цѣло на 4, суть високосные, а прочіе, простые. Это счисленіе изобрѣтено Александрійскимъ Астрономомъ *Созигеномъ*, и введено въ употребленіе Іюліемъ Кесаремъ за 45 лѣтъ до Р. Х.

Разность 11′9″ между Іюліанскимъ и истиннымъ тропическимъ годомъ, накопляясь со временемъ, наконецъ сдѣлалась очевидною, и причинила немаловажныя замѣшательства въ праздновапіи Пасхи, такъ что Папа Григорій XIII искалъ способовъ исправить недостатки Іюліанскаго Календаря. И дѣйствительно, весеннее равноденствіе, которое во время Никейскаго Собора, въ 325 году, было 21 Марта, упадало въ 1582 году на 11 Марта. Поэтому, въ томъ же самомъ 1582 году, Папа повелѣлъ лишніе 10 дней, вошедшіе въ предыдущіе годы съ 325 до 1582, исключить изъ нихъ, причислить къ настоящему, и 5 Октября 1582 года считать 15 числомъ того же мѣсяца, такъ что весеннее равноденствіе въ слѣдующемъ году пришлось опять 21 Марта. Но чтобы впредъ весеннее равноденствіе не удалялось отъ 21 Марта, было постановлено оставить 1600 годъ високоснымъ, а годы 1700, 1800, 1900, которые по Іюліанскому счисленію високосные, оставить простыми, 2000 годъ считать високоснымъ, и вообще, послѣдніе годы трехъ столѣтій сряду дѣлать простыми, а послѣдній годъ четвертаго столѣтія принимать високоснымъ; такимъ образомъ лишніе три дня, входящіе въ каждыя четыреста лѣтъ, исключаются изъ нихъ, и придаются къ настоящему году.

Эта перемѣна, хотя не вполнѣ удовлетворительна для Астрономовъ, но принята теперь почти всѣми Европейскими Державами подъ названіемъ *Григоріанскаго лѣтосчисленія*. Въ Германіи оно принято въ 1700, а въ Англіи въ 1752 году. Іюліанскій Календарь остался только въ Россіи.

Année Grégorienne. Годъ Григоріанскій есть истинный тропическій солнечный годъ, изъ 365 д. 5 ч. 48 м. 51 с. Въ этомъ счисленіи, какъ и въ Іюліанскомъ, годы состоятъ изъ цѣлаго числа дней, т. е. первые три года изъ 365, а четвертый изъ 366 дней, съ тѣмъ только различіемъ, что въ Іюліанскомъ счисленіи, всѣ столѣтніе годы високосные, а въ Григоріанскомъ, три столѣтніе годы сряду считаются простыми, а четвертый, за ними слѣдующій, остается високоснымъ.

Annee commune. Простой или общій годъ состоящій изъ 365 дней.

Année bissextile. Високосный годъ содержащій въ себѣ 366 дней. Смот. выше.

Année lunaire. Лунный годъ, подобно солнечному, раздѣляется на астрономическій и гражданскій.

*

Лунный астрономическій годъ состоитъ изъ двѣнадцати синодическихъ лунныхъ мѣсяцевъ. Лунный мѣсяцъ измѣряется или временемъ, которое луна употребляетъ для возвращенія къ одной и той же точкѣ равноденственной, или временемъ, которое проходитъ между двумя послѣдовательными новолуніями. Первый мѣсяцъ называется *періодическимъ (mois periodique)*, и равенъ 27 д. 7 ч. 43 м. 6; второй, *синодическимъ (mois synodique)*, и равенъ 29 д. 12 ч. 44 м. 3 с. Слѣдовательно, лунный астрономическій годъ содержитъ 354 д. 8 ч. 48 м. 36 с.

Такъ какъ синодическій мѣсяцъ почти равенъ 29 суткамъ съ половиною, то поэтому принимаютъ *лунный гражданскій мѣсяцъ* состоящимъ поперемѣнно изъ 29 и 30 дней.

Лунный гражданскій годъ раздѣляется на *простой* и на *вставочный*.

Простой лунный годъ (année lunaire commune) состоитъ изъ двѣнадцати гражданскихъ лунныхъ мѣсяцевъ, слѣдовательно, изъ 354 дней.

Вставочный лунный годъ (année embolistique или *intercalaire)* составляютъ тринадцать такихъ мѣсяцевъ, или 384 дня.

ANNOTATION. (Анал.) **ЗНАКОПОЛОЖЕНІЕ, ОБОЗНАЧЕНІЕ.** То же, что NOTATION (См.)

ANNUAIRE. МѢСЯЦОСЛОВЪ, КАЛЕНДАРЬ.

ANNUITÉS (Алг.) **СРОЧНЫЯ, ГОДОВЫЯ УПЛАТЫ.** Когда заемщикъ, должный имъ капиталъ съ процентами, уплачиваетъ въ равновременные сроки, то *взносы* въ такомъ случаѣ называются *срочными уплатами*.

Чтобы найти отношеніе, существующее между капиталомъ, который слѣдуетъ выплатить, и срочными уплатами, надлежитъ отнести къ одному и тому же времени какъ величину капитала, такъ и дѣйствительныя значенія послѣдовательныхъ уплатъ. Изобразимъ чрезъ A уплачиваемый капиталъ, чрезъ a годовую уплату, и чрезъ p таксу процентовъ со 100; См. INTÉRÊT. Пусть будетъ t число сроковъ, напримѣръ годовыхъ, предполагаемыхъ для погашенія долга A.

По наступленіи перваго срока, напримѣръ, по истеченіи перваго года, долгъ заемщика, увеличенный процентами, будетъ $A\left(1+\frac{d}{100}\right)$; Смот. INTÉRÊT SIMPLE; но онъ уплачиваетъ сумму a: слѣдовательно, долгъ его будетъ только

$$A\left(1+\frac{d}{100}\right)-a.$$

По наступленіи втораго срока, этотъ долгъ, съ присовокупленіемъ къ нему годовыхъ процентовъ, будетъ

$$\left[A\left(1+\frac{d}{100}\right)-a\right]\left(1+\frac{d}{100}\right)=A\left(1+\frac{d}{100}\right)^2-a\left(1+\frac{d}{100}\right);$$

но такъ какъ, по предположенію, заемщикъ въ каждый срокъ вноситъ сумму a, то, послѣ второй уплаты, останется за нимъ сумма

$$A\left(1+\frac{d}{100}\right)^2-a\left(1+\frac{d}{100}\right)-a.$$

Точно такимъ образомъ найдемъ, что послѣ третьей уплаты, долгъ опредѣлится выраженіемъ

$$A\left(1+\frac{d}{100}\right)^3-a\left(1+\frac{d}{100}\right)^2-a\left(1+\frac{d}{100}\right)-a,$$

и такъ далѣе. По наступленіи послѣдняго срока, то есть, по истеченіи t лѣтъ, и когда послѣдняя годовая уплата a будетъ внесена заемщикомъ, долгъ его очевидно выразится чрезъ

$$A\left(1+\frac{d}{100}\right)^t-a\left(1+\frac{d}{100}\right)^{t-1}-a\left(1+\frac{d}{100}\right)^{t-2}-\cdots\cdots$$
$$-a\left(1+\frac{d}{100}\right)-a,$$

и эта величина, по условію вопроса, должна обратиться въ нуль. Слѣдовательно

$$A\left(1+\frac{d}{100}\right)^t=$$
$$a\left[\left(1+\frac{d}{100}\right)^{t-1}+\left(1+\frac{d}{100}\right)^{t-2}+\cdots+\left(1+\frac{d}{100}\right)+1\right].$$

Вторая часть этого уравненія содержитъ въ себѣ члены, составляющіе геометрическую прогрессію; опредѣливъ ихъ сумму по извѣстнымъ правиламъ (Смот. PROGRESSION GÉOMÉTRIQUE), найдемъ

$$A\left(1+\frac{d}{100}\right)^t=a\frac{\left(1+\frac{d}{100}\right)^t-1}{\left(\frac{d}{100}\right)},$$

или, полагая для краткости $1+\frac{d}{100}=r$,

$$Ar^t=a\frac{r^t-1}{r-1}.$$

Въ этомъ послѣднемъ уравненіи заключается рѣшеніе всѣхъ задачъ о *годовыхъ уплатахъ*. Если желаемъ, по данной величинѣ годовой уплаты, опредѣлить величину уплачиваемаго капитала, то опредѣляемъ A изъ предыдущаго уравненія, и находимъ:

$$(1)\qquad A=\frac{a(r^t-1)}{(r-1)r^t}.$$

Если имѣемъ въ виду найти величину годовой уплаты по данному долгу A, то выводимъ a изъ того же уравненія, и получаемъ:

$$(2) \qquad a = \frac{A(r-1)\,r^t}{r^t-1}.$$

Еще могутъ представиться слѣдующіе два вопроса: 1° Опредѣлить число лѣтъ t, потребныхъ для погашенія извѣстнаго долга A, когда величина годовой уплаты a и такса процентовъ даны. 2° Найти таксу процентовъ по даннымъ A, a и r.

Для рѣшенія перваго изъ сихъ двухъ вопросовъ, даемъ которому нибудь изъ предыдущихъ уравненій видъ

$$r^t = \frac{a}{a-A(r-1)},$$

и взявъ логариѳмы, получаемъ

$$t\,Log.\,r = Log.\,a - Log.\,[a-A(r-1)],$$

откуда

$$(3) \qquad t = \frac{Log.\,a - Log.\,[a-A(r-1)]}{Log.\,r}.$$

Для рѣшенія втораго вопроса, слѣдуетъ опредѣлить изъ уравненія

$$(4) \qquad [a-A(r-1)]\,r^t = a$$

неизвѣстную r; оно будетъ степени $t+1$, и слѣдовательно, чѣмъ значительнѣе число сроковъ, тѣмъ выше степень сего уравненія и сложнѣе рѣшеніе вопроса. Для примѣра приведемъ слѣдующую задачу:

Спрашивается, какую сумму надобно вносить ежегодно, чтобы выплатить 100000 *рублей въ* 10 *лѣтъ, считая по* 5 *процентовъ со ста?*

Здѣсь $A = 100000$ р., $t = 10$, $r = 1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$, а величина a неизвѣстна. Слѣдовательно, надлежитъ употребить формулу (2), которая доставляетъ

$$a = \frac{100000 \times 00{,}5\,(1{,}05)^{10}}{(1{,}05)^{10}-1};$$

производя означенныя здѣсь выкладки (для простоты, посредствомъ логариѳмовъ), найдемъ

$$a = 12949 \text{ руб. } 12 \text{ коп.}$$

ANNULAIRE (SURFACE), TORE, ARMILLE, ANNEAU. (Геом.) **КОЛЬЦЕВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ, КОЛЬЦО.** Такъ называется поверхность вращенія, образуемая кругомъ, обращающимся около прямой линіи. При обращеніи круга, его плоскость должна заключать въ себѣ ось вращенія, а центръ оставаться въ плоскости, перпендикулярной къ сей оси. Разстояніе же центра отъ этой самой оси, превышающее радіусъ круга производителя, предполагается постояннымъ.

Изъ правила *Гюльдена* [Смот. CENTROBARIQUE (MÉTHODE)] слѣдуетъ, что объёмъ кольцевой поверхности равенъ произведенію окружности круга, описываемаго центромъ производящаго круга, на площадь сего послѣдняго; а поверхность кольца, произведенію той же окружности, на окружность производящаго круга.

ANNULER или **ANÉANTIR. УРАВНЯТЬ НУЛЮ, УНИЧТОЖИТЬ.** *En annulant l'expression* $4x-1$, *l'on tire* $x = \frac{1}{4}$. *Уравнивая нулю выраженіе* $4x-1$, *выводимъ* $x = \frac{1}{4}$. *S'annuler, s'anéantir; обратиться въ нуль, уничтожиться.*

ANOMALIE. (Астр.) (Отъ греческаго *α, безъ*, и *ὁμαλός, равный*, собственно: *неравность*). **АНОМАЛІЯ.** Аномаліею въ Астрономіи называется вообще всякая неравность въ движеніи свѣтилъ, или уклоненіе ихъ отъ извѣстнаго порядка; преимущественно же аномаліею называется уголъ при солнцѣ *), заключающійся между радіусомъ векторомъ планеты и большею осью эллипса, описаннаго планетою. Пусть ADB (черт. 1, листъ II) половина эллипса, описаннаго планетою, C его центръ, CA большая, а CD малая полуось, S солнце въ фокусѣ, CS эксцентрицитетъ, p мѣсто планеты, слѣдовательно Sp ея истинное разстояніе отъ солнца; уголъ ASp называется *истинною аномаліею (anomalie vraie)* планеты. Если на діаметрѣ AB опишемъ полукругъ $AD'B$, потомъ изъ точки p опустимъ перпендикуляръ на AB, и продолжимъ его до пересѣченія съ кругомъ въ P, то уголъ ACP, или дуга AP, заключающаяся между A и верхнею точкою P перпендикуляра MP, называется *эксцентрическою аномаліею (anomalie excentrique)*. Изъ солнца S произвольнымъ радіусомъ, напримѣръ SA, опишемъ кругъ $AFGH$, и вообразимъ, что по окружности сего круга движется равномѣрно какая нибудь точка въ одну сторону съ планетою, и притомъ такъ, что точка и планета проходятъ чрезъ большую ось AB эллипса въ одно время и въ той же сторонѣ въ разсужденіи солнца; слѣдовательно, время обращенія точки въ кругѣ будетъ равно времени обращенія планеты въ эллипсѣ. Положимъ теперь,

*) Вообще при центральномъ тѣлѣ, около котораго движется другое тѣло, и описываетъ кругъ, эллипсъ, параболу или иперболу.

что планета и точка начали двигаться въ одно мгновеніе изъ A, и что послѣ времени t планета пришла въ p, а движущаяся точка въ P'; въ такомъ случаѣ уголъ ASP' называется *среднею аномаліею (anomalie moyenne)*, а движущаяся такимъ образомъ точка — *среднею планетою (astre fictif)*.

Выраженіе средней аномаліи посредствомъ дуги круга много облегчаетъ вычисленія, и основано на второмъ законѣ Кеплера, въ слѣдствіе котораго *площади эллипса, описанныя радіусомъ векторомъ планеты, пропорціональны временамъ*, — и еще на томъ соображеніи, что въ кругѣ площади пропорціональны дугамъ. Если цѣлыя площади круга и эллипса описаны въ одно время и притомъ такъ, что въ кругѣ движеніе радіуса вектора равномѣрно, а въ эллипсѣ оно подчиняется упомянутому сей-часъ Кеплерову закону, то площади, описанныя радіусомъ векторомъ въ эллипсѣ, будутъ пропорціональны дугамъ круга, въ тѣ же времена описаннымъ. Средняя аномалія есть главнѣйшій элементъ при вычисленіи истиннаго мѣста планеты для даннаго времени, и поэтому она составляетъ основаніе всѣхъ астрономическихъ таблицъ. Аномалія эксцентрическая служитъ въ Анализѣ для вычисленія аномаліи истинной посредствомъ средней, и обратно; и такъ, она есть вспомогательная величина, служащая для перехода отъ средней аномаліи къ истинной, а отъ истинной къ средней.

Опредѣленіе истинной аномаліи въ функціи средней, или угла ASp посредствомъ эллиптическаго сектора, принадлежитъ къ числу важнѣйшихъ вопросовъ въ Астрономіи, и извѣстенъ подъ наименованіемъ *Кеплеровой задачи*. Смот. KEPLER (PROBLÊME DE). Сей знаменитый Астрономъ разрѣшилъ ее приближенно, и помѣстилъ въ превосходномъ сочиненіи своемъ: *De stella Martis*. *Валлисъ* и *Нютонъ* рѣшили ее посредствомъ продолговатой циклоиды; но ихъ рѣшеніе въ практической Астрономіи не употребляется. Впослѣдствіи занимались этимъ предметомъ *Лагиръ, Кейль, Кассини, Германъ, Мехенъ, Симсонъ, Лаландъ, Каніоли, Боссю, Лагранжъ, Деламбръ, Оріани, Шубертъ, Гаусъ, Лапласъ*, и проч. Смот. *Mémoires de l'Académie des sciences*, 1710 и 1719; *Transactions philosophiques* 1707 и 1713; *Mémoires de Pétersbourg* T. I; *Prix de l'Académie* 1766; *Mémoires de l'Académie de Berlin* 1769; *Trigonométrie de Cagnoli; Astronomie de Lalande; Astronomie par Delambre; Astronomie par Schubert.*

ANOMALISTIQUE. АНОМАЛИСТИЧЕСКІЙ. Аномалистическое обращеніе планеты есть время, которое она употребляетъ для описанія цѣлаго эллипса, или, что всё равно, для возвращенія въ тотъ же абсидъ, изъ котораго вышла. Это время было бы равно звѣздному обращенію, еслибы абсиды не имѣли движенія; но абсиды всѣхъ планетныхъ путей, исключая путь Венеры, движутся въ разсужденіи звѣздъ впередъ или по порядку знаковъ. Смот. APHÉLIE. И такъ, аномалистическое обращеніе всѣхъ планетъ, за исключеніемъ Венеры, болѣе звѣзднаго ихъ обращенія; но аномалистическое обращеніе Венеры менѣе звѣзднаго. — *Année anomalistique; аномалистическій годъ.* Смот. ANNÉE.

ANSE DE PANIER. (Геом.) **ЛОЖНЫЙ ЭЛЛИПСЪ, КОРОБОВАЯ ДУГА, КОРОМЫСЛО.** Такъ называется кривая $AFDHB$ (черт. 19, листъ 1), похожая на эллипсъ, и образуемая нѣсколькими круговыми дугами, вогнутыми въ одну сторону. Сумма угловъ, измѣряемыхъ сими дугами, равняется двумъ прямымъ угламъ. Число дугъ, составляющихъ *ложный эллипсъ*, должно быть всегда *нечётное*. Средняя изъ нихъ FDH дѣлится пополамъ линіею CD, именуемою *высотою ложнаго эллипса*.

На черт. 19 представленъ *ложный эллипсъ о трехъ дугахъ*. Пусть AB изображаетъ его діаметръ, C средину сей линіи. Изъ точки C возставляемъ перпендикуляръ, который беремъ равнымъ CD, то есть *высотѣ ложнаго эллипса*. Пусть будутъ AF и BH крайнія дуги, а FDH средняя. Центры K и M крайнихъ дугъ должны находиться на діаметрѣ AB, чтобы касательныя въ точкахъ A и B были перпендикулярны къ этому діаметру, какъ въ эллипсѣ. Равнымъ образомъ, центръ E средней дуги, долженъ находиться на продолженной линіи CD для того, чтобы касательная въ точкѣ D была параллельна діаметру AB, какъ и въ эллипсѣ. Удовлетворивъ симъ условіямъ, очевидно удовлетворяемъ вмѣстѣ и остающемуся, въ слѣдствіе котораго, сумма трехъ угловъ, измѣряемыхъ тремя дугами AF, BH и FDH должна равняться 180°. Дѣйствительно, уголъ измѣряемый дугою AF есть

AKF, или, что всё равно *EKM*, дуга *BH* измѣряется угломъ *BMH* или *EMK*, а средняя дуга *FDH* угломъ *KEM*. Но сумма угловъ *EKM*, *EMK* и *KEM* очевидно равна двумъ прямымъ. — Ложные эллипсы употребляются въ Строительномъ Искусствѣ. Нерѣдко сводамъ даютъ видъ ложныхъ элипсовъ, и тогда они называются *коробовыми сводами*.

ANTÉCÉDENT. (Ариө.) **ПРЕДЫДУЩІЙ.** Первый членъ отношенія; второй именуется *послѣдующимъ (conséquent)*. Геометрическая пропорція имѣетъ два *предыдущихъ* и два *послѣдующихъ*. Напримѣръ, въ пропорціи

$$a : b = c : d,$$

a и *c* называются *предыдущими*, а *b* и *d* *послѣдующими*.

Изъ этого видно, что когда отношеніе написано въ видѣ дроби, то ея числителя можно назвать *предыдущимъ*, а знаменателя *послѣдующимъ*. Смот. PROPORTION.

ANTELONGIORES, то же что BARLONGS (Смот.)

ANTICARTÉSIENS. АНТИКАРТЕЗІАНЫ. Противники Декартовой системы о вихряхъ. См. TOURBILLONS (SYSTÊME DES).

ANTI-DÉVELOPPÉE. (Геом.) **ПРОТИВУ-РАЗВЕРЗАЮЩАЯСЯ, АНТИ-ЭВОЛЮТА.** Смот. DÉVELOPPÉE.

ANTILOGARITHME или **MÉSALOGARITHME.** (Анал.) **АНТИЛОГАРИӨМЪ** или **ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ, ОБРАТНЫЙ ЛОГАРИӨМЪ.** Такъ называютъ иногда дополненіе логариөма синуса, тангенса, секанса. Смот. COMPLÉMENT DU LOGARITHME.

ANTIPARALLÈLES (LIGNES). (Геом.) **АНТИПАРАЛЛЕЛЬНЫЯ ЛИНІИ.** Проведемъ въ плоскости двѣ какія ни есть линіи *A* и *B*; пусть будутъ *C* и *D* двѣ другія линіи, пересѣкающія *A* и *B*. Если уголъ, составляемый прямою *C* съ линіею *A* или *B*, равенъ углу, составляемому прямою *D* съ линіею *B* или *A*, то линіи *C* и *D* называются *антипараллельными*. Онѣ были бы параллельны между собою, еслибы уголъ, составляемый линіею *C* съ *A* или *B*, равнялся углу, составляемому прямою *D* съ *A* или *B*.

Сѣченіе косаго конуса съ круговымъ основаніемъ, плоскостію *антипараллельною* его основанію, есть кругъ.

ANTITHÈSE. Уст. сл. то же что **TRANSPOSITION.** (Алг.) **ПЕРЕНЕСЕНІЕ.** Такъ называли нѣкоторые алгебристы дѣйствіе, посредствомъ котораго переносится какой нибудь членъ уравненія изъ одной части въ другую. И такъ, изъ уравненія $x^2 + px - q = 0$, выводимъ, *чрезъ перенесеніе (par antithèse)*, $x^2 + px = q$.

AP.

APAGOGIE или **DÉMONSTRATION APAGOGIQUE. АПАГОГІЯ, АПАГОГИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**; доказательство какого либо предложенія тѣмъ путемъ, когда показываемъ невозможность противнаго ему предложенія.

APHÉLIE. (Астр.) **АФЕЛІЙ.** Отъ Греческ. *ἀπὸ*, *далеко*, и *ἥλιος*, *солнце*. Точка пути планеты, въ которой ея разстояніе отъ солнца бываетъ наибольшее. Афелій есть одна изъ двухъ крайнихъ точекъ большой оси эллипса, описываемаго планетою, и дальнѣйшая отъ солнца; другая крайняя точка этой самой оси, противуположная первой, и ближайшая къ солнцу, называется *Перигелій (Périhélie)*. — Въ древнихъ системахъ Астрономіи, въ которыхъ земля предполагается неподвижною въ центрѣ Вселенной, Афелій обращается въ *Апогей (Apogée)*, а Перигелій въ *Перигей (Périgée)*. Отъ взаимнаго притяженія планетъ, сіи точки имѣютъ безпрерывное движеніе отъ Запада къ Востоку, исключая абсиды Венеры, которые движутся противъ порядка знаковъ; скорости движенія, при разныхъ планетахъ, различны, что можно видѣть изъ прилагаемой здѣсь таблицы.

	Вѣковое движеніе перигелія планетъ.	
	Звѣздное:	*Тропическое:*
Меркурій .	583″,56	5604″,69
Венера....	— 276, 83	4755, 30
Земля	1179, 81	6200, 94
Марсъ	1582, 43	6603, 56
Юпитеръ .	663, 86	5685, 00
Сатурнъ ..	1937, 07	6958, 20
Уранъ.....	293, 33	5260, 46

Подъ *Апогеемъ* въ древней Астрономіи разумѣли точку, въ которой планета находится въ дальнѣйшемъ разстояніи отъ земли. Разсматривая только видимое движеніе, еще и теперь говорятъ, что солнце находится въ Апогеѣ, когда земля пришла въ свой Афелій. Апогей противополагается

Перигею, или точкѣ, въ которой планета находится въ ближайшемъ разстояніи отъ земли.

Такъ какъ луна движется въ эллипсѣ, коего одинъ фокусъ занимаетъ земля, то поэтому, когда луна приходитъ въ точку своего эллипса, дальнѣйшую отъ земли, тогда она дѣйствительно находится въ Апогеѣ; а въ Перигеѣ въ то время, когда приходитъ въ точку, ближайшую къ землѣ.

APLANÉTIQUE (COURBE). (Геом.) **АПЛАНЕТИЧЕСКАЯ КРИВАЯ.** Кривая такого свойства, что всѣ лучи, исходящіе изъ одной свѣтящейся точки, и падающіе на сію кривую, собираются, по преломленіи, въ одинъ фокусъ. Изобразивъ чрезъ r и r_1 разстоянія какой ни есть точки кривой отъ свѣтящейся точки и отъ фокуса, въ которомъ собираются преломленные лучи, получимъ слѣдующее уравненіе для апланетической кривой:

$$\frac{r}{\lambda} - \frac{r_1}{\lambda_1} = c,$$

гдѣ $\frac{\lambda}{\lambda_1}$ означаетъ *показатель преломленія (dénominateur de la refraction),* а c постоянную величину. Если же изобразимъ чрезъ a, b координаты свѣтящейся точки, чрезъ a_1, b_1 координаты фокуса, а чрезъ x и y прямоугольныя перемѣнныя координаты кривой, то предыдущее уравненіе приметъ видъ

$$\frac{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}{\lambda} - \frac{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}}{\lambda_1} = c.$$

Изъ этого уравненія видимъ, что апланетическая кривая принадлежитъ къ разряду кривыхъ четвертаго порядка.

Названіе *апланетической кривой* предложилъ Г. *Кетеле,* Профессоръ въ Брюсселѣ, занимающійся съ успѣхомъ нѣкоторыми частями Элементарной Математики.

APLATI. (Геом.) **СЖАТЫЙ.** *Sphéroide aplati, сжатый сфероидъ;* такой, у коего ось менѣе діаметра экватора.

APLATISSEMENT. СЖАТІЕ, СПЛЮЩЕННОСТЬ. *Aplatissement du sphéroide terrestre; сжатіе земнаго сфероида.* См. FIGURE DE LA TERRE.

APLOMB. (Практ. Геом.) **ОТВѢСНО, ВЕРТИКАЛЬНО.** Перпендикулярно къ горизонтальной плоскости. *Fil aplomb* или *fil à-plomb, отвѣсъ, отвѣсикъ;* нить съ свинцовою гирькою.

APOGÉE. (Астр.) **АПОГЕЙ.** Смот. APHÉLIE.

APOLLONIENNES (PARABOLE ET HYPERBOLE). (Геом.) **АПОЛЛОНІЕВЫ ПАРАБОЛА и ИПЕРБОЛА.** Такъ называютъ иногда параболу и иперболу, втораго порядка, для отличенія ихъ отъ другихъ, высшихъ порядковъ.

Аполлоній, родомъ изъ Перги, что̀ въ Памфиліи, прозванный поэтому *Пергеемъ (Pergaeus),* родился около 200 лѣтъ до Р. Х. Онъ написалъ подробный трактатъ о *коническихъ сѣченіяхъ,* который дошелъ до насъ почти въ цѣлости. Сей знаменитый въ древности Геометръ, первый наименовалъ *параболой, эллипсомъ* и *иперболой* коническія кривыя. Эти названія, нетолько отличающія коническія кривыя однѣ отъ другихъ, но еще характеризующія каждую изъ нихъ въ особенности, сохранились до нашихъ временъ. Смот. въ статьяхъ PARABOLE, ELLIPSE, HYPERBOLE этимологіи этихъ словъ.

APOMÉCOMÉTRIE. АПОМЕКОМЕТРІЯ. Измѣреніе разстояній. Наука, относящаяся къ Тригонометріи.

APORE, APORON или APORISME. АПОРИЗМЪ. Трудная, неразрѣшимая, неприступная задача. Названіе, данное нѣкоторыми древними математиками такимъ задачамъ, коихъ рѣшеніе было чрезвычайно затруднительно, хотя невозможность рѣшить ихъ и не была доказана. Нѣкоторыя изъ сихъ задачъ были даже вовсе *неразрѣшимы.* Таковы напримѣръ: *геометрическое раздѣленіе всякаго угла на три равныя части, квадратура круга, удвоеніе куба* и проч. См. TRISECTION DE L'ANGLE, QUADRATURE DU CERCLE, DUPLICATION DU CUBE.

APOTHÈME. (Геом.) **АПОТЕМА.** Длина перпендикуляра, опущеннаго изъ центра многоугольника на одну изъ его сторонъ, или, что всё равно, радіусъ вписаннаго круга, если многоугольникъ правильный — *Апотемою* также называютъ *наклонную сторону конуса.*

APOTOME. (Ариѳ. и Геом.) **АПОТОМА.** Слово употребляемое нѣкоторыми математиками для означенія разности между двумя несоизмѣримыми величинами. Такова напримѣръ разность $\sqrt{2}-1$. Въ Геометріи это слово имѣетъ то же значеніе. Разность между діагональю квадрата и его стороною есть *апотома.* Смот. BINOME.

APPAREIL. ПРИБОРЪ, СНАРЯДЪ. Вообще какая либо физическая машина. *Appareil d'Atwood, Атвудовъ приборъ.*

APPARENCE. (Персп.) **ИЗОБРАЖЕНІЕ. — ВИДИМОСТЬ.** Изображеніе или проэкція какого либо тѣла или предмета на картинной плоскости.

APPARENT. (Персп.) **ВИДИМЫЙ.** *Lieu apparent, видимое мѣсто;* то мѣсто, въ которомъ видимъ предметъ. Напримѣръ, когда употребляемъ зрительныя стекла или зеркала, то видимъ предметъ не въ *истинномъ* его мѣстѣ, а въ другомъ, ближайшемъ, и это мѣсто называется *видимымъ.* Смот. VISION, MIROIR, TÉLESCOPE и проч. *Horison apparent, visuel* или *sensible, видимый горизонтъ.* Смот. HORISON. — *Ligne de niveau apparent, линія видимаго уровня.* Горизонтальная линія, то есть, линія перпендикулярная къ направленію отвѣса. Смот. NIVEAU. — *Diamètre apparent; видимымъ діаметромъ* тѣла называется уголъ, подъ которымъ истинный діаметръ представляется глазу наблюдателя. Этотъ уголъ очевидно уменьшается по мѣрѣ удаленія тѣла. *Diamètre apparent du soleil, de la lune; видимый діаметръ солнца, луны.* — *Mouvement apparent; видимое движеніе.* Кажущееся движеніе тѣла, или дѣйствительно движущагося, или находящагося въ покоѣ, между тѣмъ какъ глазъ наблюдателя непрестанно движется самъ.

APPLANISSEMENT. (Геом.) **РАЗВЕРТЫВАНІЕ, СПЛОСКИВАНІЕ;** приведеніе кривой поверхности, когда только это возможно, въ состояніе плоскости; См. DÉVELOPPABLE (SURFACE). *Courbe applanie, развернутая кривая;* кривая линія, называется *развернутой,* когда разсматриваютъ ее въ плоскости развертанія той поверхности, на которой она первоначально была начерчена.

APPLICATION, или, употребительнѣе **SUPERPOSITION.** (Геом.) **НАЛОЖЕНІЕ.** Дѣйствіе, посредствомъ котораго налагаютъ линію, фигуру, и проч. одну на другую. Напримѣръ, въ Геометріи доказываютъ, *посредствомъ наложенія,* что два треугольника, имѣющіе общее основаніе и прилежащіе углы равные, равны между собою. — Иногда подъ словомъ *application* разумѣютъ въ Геометріи то дѣйствіе, которое въ Ариѳметикѣ называется *дѣленіемъ.*

APPLICATION. (Мех.) **ПРИЛОЖЕНІЕ.** *Application d'une force à un point matériel, приложеніе силы къ матеріальной точкѣ.* Смот. FORCE.

APPLICATION *d'une science à une autre.* **ПРИЛОЖЕНІЕ,** *примѣненіе, приспособленіе одной науки къ другой.* Когда, для усовершенія какой нибудь науки, вводимъ въ нее правила и истины другой, то говоримъ, что вторую науку *прикладываемъ* къ первой.

Application de l'Algèbre или de l'Analyse a la Géométrie; Приложеніе Алгебры или Анализа къ Геометріи. См. GÉOMÉTRIE.

Application de la Géométrie a l'Algèbre. Приложеніе Геометріи къ Алгебрѣ.

Application de la Géométrie et de l'Algèbre a la Mécanique; Приложеніе Геометріи и Алгебры къ Механикѣ.

Application de la Statique a la Géométrie; Приложеніе Статики къ Геометріи, преимущественно состоящее въ употребленіи центровъ тяжести при опредѣленіи объёмовъ тѣлъ. Смот. CENTROBARIQUE (MÉTHODE); также BARICENTRIQUE (CALCUL).

APPLIQUÉE. ОРДИНАТА, ПРИЛОЖЕННАЯ. Смот. ORDONNÉE, также ABSCISSE.

Sciences appliquées. Прикладныя науки. *Mathématiques appliquées, Mécanique appliquée; прикладная Математика, Механика.* Смот. MATHÉMATIQUES, MÉCANIQUE и проч.

APPLIQUER или **SUPERPOSER.** (Геом.) **НАЛОЖИТЬ.** *Appliquer une droite sur une autre, наложить прямую линію на другую.* — *Appliquer une science à une autre; приложить одну науку къ другой.* — *Appliquer; раздѣлить.* Смот. APPLICATION.

APPLIQUER. (Мех.) **ПРИЛОЖИТЬ.** *Deux forces appliquées à un même point; двѣ силы приложенныя къ одной и той же точкѣ.* Смот. FORCE.

APPRÉCIABLE (QUANTITÉ). (Анал.) **ОЩУТИТЕЛЬНАЯ, ЧУВСТВИТЕЛЬНАЯ ВЕЛИЧИНА.** Такъ называется величина, хотя малая, но которая однакожъ можетъ быть выражена, и не должна быть откидываема въ вычисленіи. Въ этомъ самомъ смыслѣ употребляютъ слово ASSIGNABLE (QUANTITÉ), (Смот.).

APPROCHÉE (VALEUR). (Анал.) **ПРИБЛИЖЕННАЯ, ПРИБЛИЗИТЕЛЬНАЯ ВЕЛИЧИНА.** Такъ называется величина какого либо количества, мало разнствующая отъ истиннаго его значенія, и чѣмъ менѣе она будетъ разнствовать отъ того значенія, тѣмъ приближеннѣе будетъ эта величина.

Разсматриваніе приближенныхъ величинъ весьма важно по своимъ многоразличнымъ приложеніямъ въ математическомъ Анализѣ. Дѣйствительно, часто опредѣленіе истинныхъ значеній количествъ приводитъ къ вычисленіямъ сложнымъ до такой степени, что они почти не могутъ быть произведены; но еще чаще случается, что разысканіе сихъ истинныхъ значеній превосходитъ силы настоящаго Анализа; и тогда, чтобы составить себѣ приблизительное понятіе объ искомыхъ количествахъ, мы, по необходимости, должны прибѣгать къ ихъ приближеннымъ величинамъ; но даже и въ такомъ случаѣ, не всегда достигаемъ цѣли. Способы, посредствомъ которыхъ опредѣляются приближенныя величины, называются *способами приближенія (méthodes d'approximation)*. Еслибы они имѣли надлежащую степень точности, то можно бы было обойтись безъ истинныхъ величинъ; подъ *точнымъ* способомъ приближенія мы разумѣемъ такой, который, при выкладкахъ удобопроизводимыхъ, приводитъ къ опредѣленію величины, по произволенію мало-разнствующей отъ истинной, и сверхъ того, доставляющій предѣлы погрѣшностей, то есть, предѣлы разности между истиннымъ значеніемъ искомаго количества, и тою приближенною величиною, на которой останавливаемся.

Важнѣйшіе вопросы изъ Естественной Философіи рѣшаются посредствомъ способовъ приближенія. Къ сожалѣнію, въ бо́льшей части случаевъ, ихъ нельзя назвать точными, ибо, чаще всего, предѣлы погрѣшностей остаются неизвѣстными.

Употребительнѣйшій по своей простотѣ способъ приближенія есть *Нютоновъ*. Вотъ въ чемъ онъ состоитъ.

Положимъ, что имѣемъ m уравненій:

$$f_1(x, y, z \ldots) = 0$$
$$f_2(x, y, z \ldots) = 0$$
$$f_3(x, y, z \ldots) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

съ m неизвѣстными $x, y, z \ldots\ldots$ Предполагается, что первыя приближенныя величины сихъ послѣднихъ извѣстны; пусть будутъ онѣ соотвѣтственно $a, b, c \ldots\ldots$ Послѣ сего принимаемъ $x = a + \varepsilon$, $y = b + \varepsilon'$, $z = c + \varepsilon'' \ldots$, гдѣ $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' \ldots$ изображаютъ довольно малыя количества. Предыдущія уравненія обратятся въ слѣдующія:

$$f_1(a + \varepsilon,\ b + \varepsilon',\ c + \varepsilon'' \ldots) = 0$$
$$f_2(a + \varepsilon,\ b + \varepsilon',\ c + \varepsilon'' \ldots) = 0$$
$$f_3(a + \varepsilon,\ b + \varepsilon',\ c + \varepsilon'' \ldots) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

По способу Нютона, надлежитъ въ этихъ уравненіяхъ удержать только первыя степени количествъ $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' \ldots$ по причинѣ ихъ малости; въ слѣдствіе такого условія, они примутъ видъ линейныхъ уравненій:

$$A_1 + B_1\varepsilon + C_1\varepsilon' + D_1\varepsilon'' + \ldots = 0$$
$$A_2 + B_2\varepsilon + C_2\varepsilon' + D_2\varepsilon'' + \ldots = 0$$
$$A_3 + B_3\varepsilon + C_3\varepsilon' + D_3\varepsilon'' + \ldots = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

которыя легко могутъ быть разрѣшены. Такимъ образомъ получатся вторыя приближенныя величины $a + \varepsilon$, $b + \varepsilon'$, $c + \varepsilon'' \ldots\ldots$ неизвѣстныхъ $x, y, z \ldots$ Изобразивъ ихъ чрезъ $a', b', c' \ldots$, и дѣйствуя надъ сими послѣдними точно такъ какъ надъ $a, b, c \ldots\ldots$, получимъ третьи приближенныя величины $a'', b'', c'' \ldots$, и такъ далѣе.

Но къ сожалѣнію случается часто, что величины поправокъ $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' \ldots$, доставляемыя симъ способомъ, бываютъ весьма значительны, между тѣмъ какъ онѣ предполагаются довольно малыми, отъ чего приближеніе становится ошибочнымъ. Такой случай встрѣчается, напримѣръ, въ опредѣленіи возмущеній, коимъ подвергается движеніе планетъ около солнца; изслѣдованіе такого движенія привело въ затрудненіе величайшихъ геометровъ, *Эйлера* и *Лагранжа*, подчинившихъ Анализу возмущенія планетъ. Но они исправили прежній способъ введеніемъ весьма остроумныхъ пріёмовъ, чѣмъ положили основаніе важной теоріи вѣковыхъ неравенствъ элементовъ планетныхъ орбитъ. См. PERTURBATION. Въ другихъ изслѣдованіяхъ, напримѣръ, въ теоріи движенія жидкостей, способъ Нютона представляетъ другаго рода неудобство, именно: мы остаемся въ неизвѣстности относительно величинъ, которыя пренебрегаемъ, то есть, не видимъ, какъ велики дѣлаемыя нами погрѣшности. Даже, при рѣшеніи численныхъ алгебрическихъ уравненій, способъ Нютона въ томъ видѣ, въ какомъ онъ его предложилъ, часто представляетъ сказанное неудобство. Извѣстный Французскій математикъ *Фурье*, исправилъ въ этомъ отношеніи сей способъ. Ньютонъ, для опредѣленія корня алгебрическаго уравненія $f(x)=0$, предполагалъ, что величина того корня извѣстна по приближенію до $\frac{1}{10}$. Пусть будетъ a эта приближенная величина; предпологая $x=a+\varepsilon$, получимъ $f(a+\varepsilon)=f(a)+f'(a)\varepsilon+f''(a)\frac{\varepsilon^2}{1\cdot2}+f'''(a)\frac{\varepsilon^3}{1\cdot2\cdot3}+\ldots..$ [Смот. TAYLOR (THÉORÈME DE)]. Но такъ какъ $f(a+\varepsilon)=0$, и какъ сверхъ того члены, заключающіе въ себѣ множителями ε^2, ε^3 и проч. должны быть откинуты, то получимъ:

$$f(a)+f'(a)\varepsilon=0 \text{ откуда } \varepsilon=-\frac{f(a)}{f'(a)};$$

слѣдовательно, вторая приближенная величина для x будетъ $a-\frac{f(a)}{f'(a)}$; изъ этой второй приближенной величины выведемъ третью, изъ третьей четвертую, и такъ далѣе. Но такъ какъ значенія опущенныхъ членовъ $f''(a)\frac{\varepsilon^2}{1\cdot2}$, $f'''(a)\frac{\varepsilon^3}{1\cdot2\cdot3}\ldots$ могутъ быть одного и того же порядка величинъ съ неоткинутыми $f(a)$ и $f'(a)\varepsilon$, то можетъ случиться (и на самомъ дѣлѣ часто случается), что послѣдовательныя приближенныя величины, вмѣсто того чтобы приближаться болѣе и болѣе къ значенію корня, напротивъ того удаляются отъ него, и поэтому менѣе точны первой величины a. Фурье доказалъ, что значеніе $a-\frac{f(a)}{f'(a)}$ будетъ ближе къ истинной величинѣ корня нежели a, если знаемъ два предѣла a и b, такіе, что между ними заключается только одинъ корень функціи $f(x)$, и вмѣстѣ съ тѣмъ не заключается ни одного корня функцій $f'(x)$ и $f''(x)$; сверхъ того, надобно еще чтобы функціи $f(a)$ и $f''(a)$ имѣли одинакіе знаки. Если это послѣднее условіе не выполнено, то болѣе приближенная величина корня будетъ $b-\frac{f(b)}{f'(b)}$, которая выводится изъ способа Ньютона, когда начинаемъ приближеніе съ большаго предѣла b. — И такъ, способъ Ньютона можетъ быть приложенъ только къ тому предѣлу, для котораго $f(x)$ и $f''(x)$ имѣютъ одинакіе знаки, и сверхъ того, допускается еще, что предѣлы искомаго корня заключаютъ единственно этотъ корень уравненія $f(x)=0$, и не заключаютъ ни одного уравненій $f'(x)=0$ и $f''(x)=0$; симъ условіямъ вообще легко бываетъ удовлетворить. Но еслибы мы желали непремѣнно начать приближеніе съ меньшаго предѣла a въ томъ случаѣ, когда $f(a)$ и $f''(a)$ имѣютъ противные знаки, то, вмѣсто величины $a-\frac{f(a)}{f'(a)}$, слѣдовало бы принять величину $a-\frac{f(a)}{f'(b)}$; равнымъ образомъ, когда функціи $f(b)$ и $f''(b)$ съ противными знаками, а приближаемся къ корню съ предѣла b, то вмѣсто значенія $b-\frac{f(b)}{f'(b)}$, надлежитъ принять величину $b-\frac{f(b)}{f'(a)}$.

Пояснимъ примѣромъ Ньютоновъ способъ приближенія, исправленный Г-мъ Фурье.

Пусть будетъ уравненіе третьей степени:

$$f(x)=x^3-2x-5=0,$$

для котораго имѣемъ

$$f(x)=x^3-2x-5$$
$$f'(x)=3x^2-2$$
$$f''(x)=6x.$$

Вещественный корень этого уравненія заключается между 2 и 2,1; слѣдовательно, можно принять $a=2$, $b=2{,}1$. Сверхъ того, легко удостовѣриться, что между предѣлами 2 и 2,1 не заключается ни одного корня функцій $f'(x)$ и $f''(x)$, то есть, уравненій $3x^2-2=0$ и $6x=0$. И такъ, если желаемъ начать приближеніе съ меньшаго предѣла a, то опредѣляемъ функціи

$$f(a)=f(2)=-1$$
$$f'(a)=f'(2)=10$$
$$f''(a)=f''(2)=12,$$

и, по причинѣ что $f(a)$ и $f''(a)$ съ противными знаками, мы должны принять за приближенное значеніе корня величину $a-\frac{f(a)}{f'(b)}$; но $f'(b)=11{,}23$, почему вторая приближенная величина корня будетъ $2+\frac{1}{11{,}23}=2{,}089$, которая ближе къ истинному значенію чѣмъ 2. И дѣйствительно, еслибы продолжали приближеніе по объясненному способу, то нашли бы величину 2,0945, точную до $\frac{1}{10000}$. Начиная съ большаго предѣла $b=2{,}1$, найдемъ:

$$f(b)=f(2{,}1)=0{,}061$$
$$f'(b)=f'(2{,}1)=11{,}23$$
$$f''(b)=f''(2{,}1)=12{,}6;$$

*

такъ какъ $f(b)$ и $f''(b)$ съ одинакими знаками, то употребляемъ формулу $b - \frac{f(b)}{f'(b)}$, и получаемъ для приближенной величины корня число 2,096, которое ближе къ истинному его значенію, чѣмъ 2,1.

Что касается до рѣшенія по приближенію дифференціальныхъ уравненій по способу Ньютона, то отсылаемъ читателей къ труду Г. Остроградскаго: *Note sur la méthode des approximations successives*. (Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg. VI. Série. Sciences Mathématiques, physiques et naturelles. Tome III.). Въ этой Запискѣ, нашъ знаменитый математикъ предлагаетъ значительныя улучшенія, которыя возвышаютъ еще достоинство Ньютонова способа.

Сверхъ изложеннаго способа приближенія, есть еще и другіе, менѣе употребительныя, но которые имѣютъ, каждый, свое преимущество. Таковъ способъ приближенія посредствомъ *непрерывныхъ дробей*, предложенный Лагранжемъ. Смот. CONTINUE (FRACTION). Но этотъ способъ можно назвать общимъ только въ отношеніи алгебрическихъ уравненій; что касается до трансцендентныхъ, въ особенности тѣхъ, которыя заключаютъ въ себѣ дифференціалы, то онъ только въ небольшомъ числѣ случаевъ можетъ быть приложенъ.

Для рѣшенія по приближенію алгебрическаго уравненія $f(x) = 0$ посредствомъ непрерывныхъ дробей, ищемъ сперва, чрезъ послѣдовательныя подстановленія, два смежныя цѣлыя числа, между которыми заключается одинъ или нѣсколько корней. Положимъ, для простоты, что между числами a и $a+1$, заключается только одинъ корень. Принимаемъ $x = a + \frac{1}{z}$, и подставляя эту величину въ предложенное уравненіе, получаемъ $f(a+\frac{1}{z}) = 0$, которое будетъ, относительно z, той же самой степени какъ $f(x) = 0$ въ разсужденіи x. Выводя опять изъ уравненія $f(a+\frac{1}{z}) = 0$ смежныя числа b и $b+1$, между которыми заключается, корень z, полагаемъ снова $z = b + \frac{1}{z'}$. Здѣсь должно замѣтить, что такъ какъ, по предположенію, между a и $a+1$ находится только одинъ корень уравненія $f(x) = 0$, то поэтому уравненіе $f(a+\frac{1}{z}) = 0$ будетъ допускать только одинъ корень, бо́льшій единицы. Но еслибы между a и $a+1$ заключалось нѣсколько корней, то функція $f(a+\frac{1}{z})$ имѣла бы столько же корней, бо́льшихъ единицы; изобразимъ чрезъ $b, b', b''\ldots$ наименьшія цѣлыя числа, ближайшія къ симъ корнямъ; въ такомъ случаѣ слѣдовало бы приближаться отдѣльно къ каждому изъ корней, коихъ вторыя приближенныя величины нашлись бы $a+\frac{1}{b}$, $a+\frac{1}{b'}$, $a+\frac{1}{b''}\ldots$ Возвратимся теперь къ прежнему нашему предположенію. Мы сказали, что корень z уравненія $f(a+\frac{1}{z}) = 0$ заключается между b и $b+1$, и положили $z = b + \frac{1}{z'}$; подставляя эту величину въ $f(a+\frac{1}{z})$, получимъ опять уравненіе въ z' одинакой степени съ первоначальнымъ $f(x) = 0$, и доставляющее, по прежнему, одинъ только корень, бо́льшій единицы. Предполагая, что сей послѣдній заключается между c и $c+1$, возьмемъ $z' = c + \frac{1}{z''}$, и продолжая такимъ образомъ, увидимъ что искомый корень x уравненія $f(x) = 0$, выразится непрерывною дробью

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \ldots\ldots}}}$$

Самое важное преимущество этого способа состоитъ въ томъ, что при его употребленіи, знаемъ всегда предѣлы погрѣшностей, и можемъ уменьшать ихъ по произволенію. Дѣйствительно, по свойству непрерывныхъ дробей [Смот. CONTINUE (FRACTION)], главныя дроби

$$\frac{a}{1},\ \frac{ab+1}{b},\ \frac{abc+c+a}{bc+1},\ \frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b},\ \ldots\ldots$$

будутъ попеременно то менѣе, то болѣе искомаго корня x.

Возьмемъ, напримѣръ, разсмотрѣнное нами выше уравненіе

$$x^3 - 2x - 5 = 0;$$

вещественный корень этого уравненія заключается между предѣлами 2 и 3. Слѣдовательно, надлежитъ принять $x = 2 + \frac{1}{z}$; тогда получимъ

$$z^3 - 10z^2 - 6z - 1 = 0.$$

Ближайшее цѣлое число, удовлетворяющее этому уравненію, есть 10; и такъ, должно предположить $z = 10 + \frac{1}{z'}$, что приводитъ къ уравненію

$$61z'^3 - 94z'^2 - 20z' - 1 = 0,$$

для котораго $z' > 1$ и < 2, почему полагаемъ $z' = 1 + \frac{1}{z''}$, и находимъ

$$54z''^3 + 25z''^2 - 89z'' - 61 = 0.$$

Здѣсь опять $z'' > 1$ и < 2; слѣдовательно, должно принять $z'' = 1 + \frac{1}{z'''}$. Точно такимъ образомъ получимъ $z^{III} = 2 + \frac{1}{z^{IV}}$, $z^{IV} = 1 + \frac{1}{z^{V}}$, $z^{V} = 3 + \frac{1}{z^{VI}}$, $z^{VI} = 1 + \frac{1}{z^{VII}}$, $z^{VII} = 1 + \frac{1}{z^{VIII}}$, $z^{VIII} = 12 + \frac{1}{z^{IX}}$, и такъ далѣе. Подставляя послѣдовательно вмѣсто $z, z', z'', z''' \ldots$ ихъ значенія, найдемъ для искомаго корня x слѣдующую непрерывную дробь:

$$x = 2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12 + \ldots}}}}}}}}}$$

Главныя дроби будутъ:

$$\frac{2}{1},\ \frac{21}{10},\ \frac{23}{11},\ \frac{44}{21},\ \frac{111}{53},\ \frac{155}{74},\ \frac{576}{275},\ \frac{731}{349},\ \frac{1307}{624},\ \frac{16415}{7837} \ldots$$

Разлагая шестую дробь $\frac{155}{74}$ въ десятичную, получаемъ уже выводъ 2,0945, согласующійся съ приведеннымъ нами выше. Слѣдующія дроби доставляютъ величины корня, болѣе и болѣе точныя; если, напримѣръ, разложимъ въ десятичныя послѣднія двѣ изъ главныхъ дробей, то получимъ

$$\frac{1307}{624} = 2{,}0945512 \ldots$$

$$\frac{16415}{7837} = 2{,}0945514 \ldots$$

откуда заключаемъ, что истинная величина вещественнаго корня уравненія $x^3 - 2x - 5 = 0$, заключается между числами 2,0945512 и 2,0945514; слѣдовательно, если возьмемъ которое угодно изъ нихъ, то погрѣшность будетъ менѣе $\frac{2}{10000000}$, ибо первое изъ найденныхъ значеній менѣе корня, а второе болѣе, по свойству непрерывныхъ дробей. Принявъ цифры, общія обѣимъ десятичнымъ дробямъ, найдемъ $x = 2{,}094551$, гдѣ всѣ цифры точны. —

Для приближенія къ корнямъ алгебрическихъ уравненій было предложено много другихъ способовъ, болѣе или менѣе удовлетворительныхъ. Таковъ между прочими способъ *Даніила Бернулли*, основанный на теоріи возвратныхъ рядовъ; Смот. RÉCURRENTE (SÉRIE). Положимъ что данное уравненіе есть $f(x) = 0$, а $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ его корни. Получимъ

$$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots;$$

взявъ производную, и раздѣливъ на $f(x)$, найдется

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \frac{1}{x-\gamma} + \ldots$$

Но такъ какъ

$$\frac{1}{x-\alpha} = \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\alpha^2}{x^3} + \frac{\alpha^3}{x^4} + \text{ и проч.}$$

$$\frac{1}{x-\beta} = \frac{1}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\beta^2}{x^3} + \frac{\beta^3}{x^4} + \text{ и проч.}$$

$$\frac{1}{x-\gamma} = \frac{1}{x} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\gamma^2}{x^3} + \frac{\gamma^3}{x^4} + \text{ и проч.}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

то, изобразивъ чрезъ m степень предложеннаго уравненія, получимъ:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{m}{x} + (\alpha + \beta + \gamma + \ldots)\frac{1}{x^2}$$
$$+ (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \ldots)\frac{1}{x^3}$$
$$+ (\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \ldots)\frac{1}{x^4} + \text{ и пр.}$$

И такъ, если разложимъ, чрезъ алгебрическое дѣленіе $\frac{f(x)}{f(x)}$ въ рядъ, простирающійся по возрастающимъ степенямъ количества $\frac{1}{x}$, то коэффиціенты различныхъ степеней $\frac{1}{x}$ будутъ изображать суммы послѣдовательныхъ степеней всѣхъ корней предложеннаго уравненія. Предполагая для краткости

$$S_0 = m$$
$$S_1 = \alpha + \beta + \gamma + \ldots$$
$$S_2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \ldots$$
$$S_3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_{r-1} = \alpha^{r-1} + \beta^{r-1} + \gamma^{r-1} + \ldots$$
$$S_r = \alpha^r + \beta^r + \gamma^r + \ldots$$

найдемъ

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = S_0 \cdot \frac{1}{x} + S_1 \cdot \frac{1}{x^2} + S_2 \cdot \frac{1}{x^3} + S_3 \cdot \frac{1}{x^4} + \ldots$$
$$+ S_{r-1} \cdot \frac{1}{x^r} + S_r \cdot \frac{1}{x^{r+1}} + \text{ и проч.}$$

Легко видѣть, что отношеніе двухъ послѣдовательныхъ коэффиціентовъ этого ряда, именно:

$$\frac{S_r}{S_{r-1}} = \frac{\alpha^r + \beta^r + \gamma^r + \ldots}{\alpha^{r-1} + \beta^{r-1} + \gamma^{r-1} + \ldots}$$

$$= \alpha \cdot \frac{1 + \frac{\beta^r}{\alpha^r} + \frac{\gamma^r}{\alpha^r} + \ldots}{1 + \frac{\beta^{r-1}}{\alpha^{r-1}} + \frac{\gamma^{r-1}}{\alpha^{r-1}} + \ldots}$$

приближается тѣмъ болѣе къ корню α, чѣмъ α будетъ болѣе въ отношеніи къ остальнымъ корнямъ $\beta, \gamma \ldots$ и еще, по мѣрѣ увеличенія степени r.

И такъ, если уравненіе $f(x) = 0$ имѣетъ одинъ корень, значительно превышающій всѣ остальные, то, разложивъ $\frac{f'(x)}{f(x)}$ въ рядъ по степенямъ $\frac{1}{x}$, и составивъ дроби

$$\frac{S_1}{S_0}, \frac{S_2}{S_1}, \frac{S_3}{S_2} \ldots\ldots \frac{S_r}{S_{r-1}},$$

заключаемъ, что эти отношенія будутъ болѣе и болѣе приближаться къ истинной величинѣ сказаннаго корня.

Впрочемъ, должно замѣтить, что при употребленіи въ такомъ видѣ изложеннаго способа, предполагается, что уравненіе $f(x) = 0$ не имѣетъ мнимыхъ корней, или, по крайней мѣрѣ, что модули ихъ менѣе наибольшаго вещественнаго корня. Несмотря на то, при надлежащихъ измѣненіяхъ, способъ Даніила Бернулли можетъ быть приложенъ къ опредѣленію всѣхъ вещественныхъ корней уравненія. Мы не можемъ входить здѣсь въ такія подробности; замѣтимъ только, что для опредѣленія наименьшаго корня уравненія $f(x) = 0$, стоитъ только принять $x = \frac{1}{z}$, и тогда наименьшій корень уравненія $f(x) = 0$ будетъ соотвѣтствовать наибольшему уравненія $f(\frac{1}{z}) = 0$; слѣдовательно, для опредѣленія корня x въ этомъ случаѣ, стоило бы только разложить дробь $\frac{f'(x)}{f(x)}$ въ рядъ, по возрастающимъ положительнымъ степенямъ количества x.

Способъ Даніила Бернулли былъ измѣненъ *Эйлеромъ*, и предложенъ имъ въ другомъ, болѣе удовлетворительномъ видѣ. Вотъ краткое изложеніе измѣненнаго Эйлеромъ способа.

Подобно предыдущему, онъ основанъ на опредѣленіи такого ряда

$$p, q, r, s, t, u \ldots,$$

въ которомъ бы отношенія

$$\frac{q}{p}, \frac{r}{q}, \frac{s}{r}, \frac{t}{s}, \frac{u}{t} \ldots\ldots$$

болѣе и болѣе приближались къ истинному значенію корня. И такъ, полагая

$$x = \frac{q}{p},\ x = \frac{r}{q},\ x = \frac{s}{r},\ x = \frac{t}{s},\ x = \frac{u}{t} \ldots$$

получимъ

$$x = \frac{q}{p},\ x^2 = \frac{r}{p},\ x^3 = \frac{s}{p},\ x^4 = \frac{t}{p},\ x^5 = \frac{u}{p} \ldots$$

Подставляя эти приближенныя величины для x, x^2, x^3, x^4, $x^5 \ldots$ въ данное уравненіе, и принявъ произвольныя числа вмѣсто количествъ $p, q, r \ldots$, начинающихъ рядъ, выводимъ послѣдовательно слѣдующія величины $s, t, u \ldots$

Чтобы не оставалось никакого недоразумѣнія при употребленіи этого способа, приложимъ его къ общему уравненію третьей степени

$$x^3 = Ax^2 + Bx + C;$$

подставляя приведенныя выше величины для x, x^2 и x^3, получаемъ

$$\frac{s}{p} = A\frac{r}{p} + B\frac{q}{p} + C,$$

или

$$s = Ar + Bq + Cp.$$

Слѣдовательно, для опредѣленія члена s, нужно знать три первыя величины p, q, r, которыя можно выбрать по произволу. Впрочемъ, есть правило, основанное на теоріи возвратныхъ рядовъ, посредствомъ котораго опредѣляемъ величины для p, q, r, вообще болѣе выгодныя, нежели произвольно взятыя; читатели найдутъ нѣкоторыя подробности объ этомъ предметѣ, въ статьѣ: RÉCURRENTE (SÉRIE). Слѣдующія величины $s, t, u \ldots$ уже выводятся посредствомъ p, q и r. И дѣйствительно, помножая предложенное уравненіе на x, на $x^2 \ldots$ получимъ

$$x^4 = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$
$$x^5 = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

подставляя же вмѣсто $x, x^2, x^3, x^4, x^5 \ldots$ приведенныя выше приближенныя ихъ значенія, найдемъ

$$t = As + Br + Cq$$
$$u = At + Bs + Cr$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Напримѣръ, имѣя уравненіе

$$x^3 = 3x^2 - x + 4,$$

и положивъ

$$p = 0,\quad q = 1,\quad r = 1$$

найдемъ

$$s = 2,\ t = 9,\ u = 29,\ v = 86,\ w = 265,\ \text{и проч.}$$

И такъ, рядъ приближенныхъ дробей къ корню x будетъ:

$$\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{9}{2}, \frac{29}{9}, \frac{86}{29}, \frac{265}{86} \ldots$$

Дробь $\frac{265}{86}$ вѣрна до $\frac{1}{100}$; для большей точности надлежало бы продолжать рядъ далѣе.

Употребленіе этого способа требуетъ, чтобы данное уравненіе заключало въ себѣ всѣ члены; впрочемъ, всегда легко будетъ привести уравненіе къ такому виду, предполагая въ немъ $x = y + \lambda$, гдѣ λ изображаетъ какую либо опредѣленную величину. Замѣтимъ также, что выборъ первыхъ членовъ $p, q, r\dots$ имѣетъ большое вліяніе на степень приближенія дробей $\frac{s}{r}, \frac{t}{s}, \frac{u}{t}\dots$ къ искомому корню x. Для дальнѣйшихъ подробностей по сему предмету, отсылаемъ читателей къ Алгебрѣ Эйлера; тамъ они увидятъ какимъ исключеніямъ подлежитъ этотъ способъ. —

Въ заключеніе приведемъ примѣръ рѣшенія по приближенію трансцендентнаго уравненія $x^x - 100 = 0$ по способу Нютона.

Легко усмотрѣть, что искомая величина x заключается между предѣлами 3,5 и 4; дѣйствительно, вычисляя величину $(3{,}5)^{3,5}$ посредствомъ логариѳмовъ, найдемъ что она падаетъ между 87 и $87\frac{1}{100}$, а $4^4 = 256$. Слѣдовательно, надлежитъ принять $x = 3{,}5 + \varepsilon$. Такъ какъ предыдущее уравненіе можетъ быть написано въ видѣ

$$x \, Log \, x = Log \, 100 = 2 \text{ *)},$$

то получимъ

$$f(x) = x \, Log \, x - 2 = 0.$$

Но мы видѣли, что поправка ε опредѣляется дробью $-\frac{f(a)}{f'(a)}$, въ которой a изображаетъ первую приближенную величину неизвѣстной x; въ настоящемъ случаѣ $a = 3{,}5$; и такъ, получимъ

$$f'(x) = Log \, x + M,$$

разумѣя подъ M модуль Бригговыхъ логариѳмовъ, то есть, число 0,43429; слѣдовательно

$$f(3{,}5) = (3{,}5) \, Log \, (3{,}5) - 2 = -0{,}09576$$

$$f'(3{,}5) = Log \, (3{,}5) + 0{,}43429 = 0{,}97836$$

$$\varepsilon = -\frac{f(3{,}5)}{f'(3{,}5)} = \frac{0{,}09576}{0{,}97836} = 0{,}09788,$$

и наконецъ

$$x = 3{,}598.$$

Второе дѣйствіе, подобное первому, но въ которомъ надлежало бы принять за приближенную величину x число 3,598, привело бы насъ къ значенію x еще болѣе точному.

*) Мы разумѣемъ здѣсь *Бригговы* логариѳмы, для которыхъ модуль $= 0{,}43429$. Смот. LOGARITHME.

Мы отсылаемъ читателей къ слѣдующимъ статьямъ, имѣющимъ близкую связь съ способами приближенія: CONTINUE (FRACTION); SÉRIE; RÉCURRENTE (SÉRIE); RETOUR DES SUITES; BURMANN (SÉRIE DE); LAGRANGE (THÉORÊME DE); LAMBERT (SÉRIE DE); OMALE (FONCTION); также къ сочиненіямъ: *Лагранжа — Résolution des équations numériques*; *Фурье — Analyse des équations déterminées*, 1831.

APPROCHER. (Анал.) **ПРИБЛИЖАТЬСЯ.** *Approcher de la vraie valeur d'une racine; приближаться къ истинной величинѣ корня.* См. APPROCHÉE (VALEUR).

APPROCHER DE LA CERTITUDE. **ПРИБЛИЖАТЬСЯ** къ достовѣрности, къ несомнѣнности. (Исч. Вѣр.) По мѣрѣ того какъ увеличивается дробь, выражающая вѣроятность, мы говоримъ, что сія послѣдняя *приближается къ достовѣрности.* Для большей ясности, приведемъ примѣръ, въ которомъ употребимъ это выраженіе. Положимъ, что изъ урны, заключающей бѣлые и черные шары, мы вынимаемъ по одному шару, замѣчая его цвѣтъ, и наблюдая притомъ каждый разъ впускать вынутый шаръ обратно въ урну. Допустимъ, что повторивъ дѣйствіе весьма значительное число разъ $p+q$, выдернули p бѣлыхъ шаровъ, а q черныхъ. Въ такомъ случаѣ вѣроятность, что отношеніе числа бѣлыхъ шаровъ къ числу черныхъ, заключается, напримѣръ, между предѣлами $\frac{p}{q} - \frac{1}{10000}$ и $\frac{p}{q} + \frac{1}{10000}$, будетъ выражаться дробью, весьма близкою къ единицѣ, и эта дробь будетъ увеличиваться, по мѣрѣ увеличенія числа вынутыхъ шаровъ. Что касается до вѣроятности, выражаемой сею дробью, то говоримъ, что она неопредѣленно *приближается къ достовѣрности*, по мѣрѣ увеличенія числа извлекаемыхъ изъ урны шаровъ, и окончательно обратится въ достовѣрность, если это число превзойдетъ всякій предѣлъ.

APPROCHES (COURBE AUX — ÉGALES). (Мех.) **КРИВАЯ РАВНАГО ПРИБЛИЖЕНІЯ.** Такъ называется кривая, по которой тѣло, побуждаемое одною силою тяжести, переходитъ въ равныя времена, равныя вертикальныя пространства. Въ безвоздушномъ пространствѣ, *кривая* *равнаго приближенія* есть *кубическая парабола втораго порядка.*

Дѣйствительно, пусть будетъ AB (черт. 20, листъ I), искомая кривая, а IK вертикальная линія. Положимъ, что по истеченіи времени t, движущееся тѣло, изъ точки A перешло въ положеніе M; пусть будетъ v его скорость въ это самое мгновеніе. По условію вопроса надобно выразить, что am пропорціонально времени t; предполагая $am = x$ и $mM = y$, будетъ

$$t = \lambda x,$$

разумѣя подъ λ постоянное количество. Но извѣстно изъ правилъ Динамики, что скорость тѣла, движущагося по какой ни есть кривой линіи, выражается корнемъ квадратнымъ $\sqrt{2gx}$, гдѣ g означаетъ силу тяжести, а x вертикальную высоту, перейденную тѣломъ; Смот. CURVILIGNE (MOUVEMENT). И такъ

$$v = \sqrt{2gx};$$

но, съ другой стороны, изобразивъ чрезъ s дугу кривой AM, имѣемъ $v = \frac{ds}{dt}$; См. VITESSE. Слѣдовательно получимъ два уравненія

$$t = \lambda x \text{ или } dt = \lambda dx$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gx};$$

но $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, почему будетъ

$$\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = \lambda\sqrt{2g}.x^{\frac{1}{2}},$$

откуда

$$dy = \sqrt{2g\lambda^2.x - 1}.dx.$$

Интегрируя это уравненіе, получимъ

$$y + C = \tfrac{2}{3}.\frac{1}{2g\lambda^2}(2g\lambda^2x - 1)^{\frac{3}{2}}$$

или

$$(y + C)^2 = \tfrac{4}{9}\cdot\frac{1}{4g^2\lambda^4}(2g\lambda^2x - 1)^3,$$

гдѣ C изображаетъ постоянное произвольное количество. Вотъ уравненіе искомой кривой линіи, и мы видимъ, что оно дѣйствительно принадлежитъ кубической параболѣ второй степени; если примемъ $C = 0$, $2g\lambda^2 = 1$, и положимъ $x - 1 = z$, то оно приметъ слѣдующій простой видъ: $y^2 = \frac{4}{9}z^3$ или $z^3 = \frac{9}{4}y^2$.

Задача *кривой равнаго приближенія* была предложена *Лейбницемъ* въ 1687 году въ видѣ вызова, съ тою цѣлію, чтобы показать нѣкоторымъ Картезіанамъ недостаточность Геометріи Декарта, и вмѣстѣ съ тѣмъ выставить на видъ всю важность только возникающаго ДиФференціальнаго исчисленія. Одинъ *Гугенсъ* рѣшилъ задачу безъ пособія новаго Анализа; вскорѣ послѣ того, *Яковъ Бернулли*, руководствуясь Анализомъ безконечныхъ, предложилъ также рѣшеніе вопроса, не зная способовъ Лейбница и Гугенса. Впослѣдствіи *Вариньонъ*, а послѣ него *Мопертюи*, рѣшили задачу въ болѣе общемъ видѣ. Первый принялъ законъ измѣненія тяжести произвольнымъ, а перейденное вертикальное разстояніе не просто пропорціональнымъ времени, но, выражаясь по нашему, равнымъ какой ни есть Функціи времени. Мопертюи вывелъ уравненіе кривой равнаго приближенія принимая въ расчетъ и сопротивленіе воздуха.

APPROXIMATION (MÉTHODES D'). (Анал.) **СПОСОБЫ ПРИБЛИЖЕНІЯ.** Способы, посредствомъ которыхъ опредѣляются величины неизвѣстныхъ, не истинныя, но другія, мало разнствующія отъ настоящихъ. Способы приближенія употребляются вообще при рѣшеніи уравненій алгебрическихъ и трансцендентныхъ. Превращеніе количествъ въ непрерывныя дроби, разложеніе неизвѣстныхъ въ безконечные ряды и нѣкоторыя другія дѣйствія, относятся къ способамъ этого рода. См. APPROCHÉE (VALEUR).

APPROXIMATION. ПРИБЛИЖЕНІЕ. *Approximation lente, rapide; медленное, быстрое приближеніе. Pousser l'approximation jusqu'aux décimales de l'ordre n; довести приближеніе до n-го порядка десятичныхъ цифръ, до n-ой десятичной цифры. Borner l'approximation aux quatrièmes puissances; ограничить приближеніе четвертыми степенями;* то есть, откидывать пятую, шестую и высшія степени.

Par approximation; по приближенію, приблизительно. Trouver les racines d'une équation par approximation; найти по приближенію корни уравненія.

APPROXIMATIF, — IVE. ПРИБЛИЖЕННЫЙ, — НАЯ. *Valeur approximative; приближенная величина.* Смот. APPROCHÉE.

APPROXIMATIVEMENT. ПРИБЛИЗИТЕЛЬНО, *приближенно, по приближенію.*

APPROXIMÉE (RÉSOLUTION — DES ÉQUATIONS). РѢШЕНІЕ УРАВНЕНІЙ ПО ПРИБЛИЖЕНІЮ. Смот. APPROCHÉE (VALEUR).

APPUI. (Mex.) **ПОДПОРА.** *Point d'appui; точка подпоры, точка опоры, подпорная точка.* Неподвижная точка въ рычагѣ (или въ другой машинѣ), около которой силы уравновѣшиваются между собою; слѣдовательно, предполагается что равнодѣйствующая этихъ силъ проходитъ чрезъ *точку подпоры*, и уничтожается ея сопротивленіемъ. Смот. LEVIER.

APPUYER (S'). (Геом.) **СТОЯТЬ, ОПИРАТЬСЯ.** Въ Геометріи говоримъ, что уголъ при окружности *стоитъ на дугѣ* или *опирается на дугу*. Такъ напримѣръ на чертежѣ 9 (листъ I), уголъ IEH, имѣющій свою вершину E при окружности, *стоитъ* на дугѣ IKH.

APRETÉ. (Мех.) **ШЕРОХОВАТОСТЬ.** Свойство поверхности тѣла, представляющей неровности или негладкости, отъ которыхъ значительно увеличивается треніе. Смот. FROTTEMENT.

APSIDES. (Астр.) **АПСИДЫ.** Оконечности большой оси планетной орбиты. *Ligne des apsides, линія апсидовъ;* линія, соединяющая афелій и перигелій, или апогей и перигей. См. APHÉLIE.

AR.

ARABES (CHIFFRES). (Ариѳ.) **АРАБСКІЯ ЦИФРЫ.** Смот. CARACTÈRES COMMUNS.

ARBELON. (Геом.) **АРБЕЛОНЪ,** *Скирка.* Такъ названа въ *Леммахъ Архимеда* фигура $AaCbBcDdA$ (черт. 21, листъ I), ограниченная съ одной стороны полукружіемъ $AaCbB$, а съ другой, полукружіями AdD и DcB. — Легко доказать, что площадь *арбелона* равна площади круга, имѣющаго діаметромъ перпендикуляръ DC, возставленный изъ точки касанія D двухъ малыхъ полу-круговъ, и продолженный до встрѣчи съ большимъ полукругомъ.

ARBITRAGE. (Ком. Ариѳ.) **АРБИТРАЖЪ.** Вычисленія, посредствомъ которыхъ, сравнивая данные вексельные курсы, находимъ, чрезъ какое мѣсто выгоднѣе получить или перевести деньги. Напримѣръ, если бы Петербургскій банкиръ, который долженъ получить извѣстную сумму въ Лондонѣ, желалъ бы вычислить, что̀ выгоднѣе для него, получить ли прямо эту сумму изъ Лондона, или перевести ее чрезъ Парижъ или Амстердамъ, то такая задача относилась бы къ арбитражу.

Всѣ вопросы этого рода рѣшаются весьма простымъ образомъ посредствомъ тройнаго правила. Смот. CHANGE, CONJOINTE (RÈGLE).

ARBITRAIRE. (Анал.) **ПРОИЗВОЛЬНЫЙ.** *Constante arbitraire; произвольное постоянное количество, произвольная постоянная.* Таковы, напримѣръ, величины, прибавляемыя къ неопредѣленнымъ интеграламъ дифференціальныхъ функцій или уравненій. Смот. INTÉGRAL (CALCUL), CONSTANTE.

Что касается до произвольныхъ величинъ, вводимыхъ интегрированіемъ уравненій въ конечныхъ разностяхъ, то эти величины не суть постоянныя по необходимости, какъ то всегда бываетъ въ дифференціальныхъ уравненіяхъ; но только онѣ не должны перемѣняться при переходѣ независимой перемѣнной x въ состояніе $x + \Delta x$. Такъ напримѣръ, если Δx количество постоянное, равное h, а $\Delta y = 0$, то можно будетъ принять y равнымъ всякому количеству, сохраняющему одну и ту же величину, при перемѣнѣ x въ $x + h$. Въ разрядѣ круговыхъ функцій есть множество такихъ, которыя пользуются этимъ свойствомъ. Таковы напримѣръ $Sin \frac{2\pi x}{h}$, $Cos \frac{2\pi x}{h}$, разумѣя подъ π полуокружность. — И такъ, уравненію въ разностяхъ $\Delta y = 0$ удовлетворяемъ не только интеграломъ

$$y = C$$

разумѣя подъ C постоянное количество, но и еще

$$y = \varphi \left(Sin \frac{2\pi x}{h},\ Cos \frac{2\pi x}{h}\right),$$

гдѣ φ изображаетъ совершенно произвольную функцію.

Elimination des constantes arbitraires. Исключеніе постоянныхъ произвольныхъ количествъ. Пусть будетъ

$$f(x, y, a, b, c \ldots) = 0$$

конечное уравненіе между двумя перемѣнными величинами x, y и постоянными количествами a, b, $c \ldots$ Если возьмемъ послѣдовательныя производныя (Смот. DÉRIVÉE) этого уравненія, то получимъ

$$f'(x, y, a, b, c \ldots) = 0$$
$$f''(x, y, a, b, c \ldots) = 0$$
$$f'''(x, y, a, b, c \ldots) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Совокупляя одно или нѣсколько изъ сихъ послѣднихъ уравненій съ первообразнымъ $f(x, y, a, b, c\ldots) = 0$, можемъ *исключить* одно или нѣсколько изъ *произвольныхъ постоянныхъ количествъ* $a, b, c\ldots$. Уравненіе, получаемое чрезъ подобное исключеніе, называется *дифференціальнымъ*. Оно будетъ *перваго* порядка, если исключили одну произвольную величину между двумя уравненіями $f(x, y, a, b, c\ldots) = 0$ и $f'(x, y, a, b, c\ldots) = 0$; *втораго* — если исключили два изъ количествъ a, b, $c\ldots$ между тремя уравненіями $f(x, y, a, b, c\ldots) = 0$, $f'(x, y, a, b, c\ldots) = 0$ и $f''(x, y, a, b, c\ldots) = 0$; и такъ далѣе.

Дифференціальное уравненіе перваго порядка можетъ быть получено однимъ только образомъ чрезъ исключеніе даннаго постояннаго количества между первообразнымъ уравненіемъ $f(x, y, a, b, c\ldots) = 0$ и его первою производною $f'(x, y, a, b, c\ldots) = 0$. Но примѣчательно то, что дифференціальныя уравненія высшихъ порядковъ могутъ быть получаемы нѣсколькими образами посредствомъ исключенія постоянныхъ произвольныхъ. Напримѣръ, уравненіе втораго порядка можно получить:

1°. Чрезъ исключеніе двухъ постоянныхъ, напримѣръ a и b изъ уравненій

$$f(x, y, a, b, c\ldots) = 0$$
$$f'(x, y, a, b, c\ldots) = 0$$
$$f''(x, y, a, b, c\ldots) = 0.$$

2°. Исключая постоянное количество, напримѣръ a изъ уравненій $f(x, y, a, b, c\ldots) = 0$ и $f'(x, y, a, b, c\ldots) = 0$, получится уравненіе вида

$$\varphi(x, y, y', b, c\ldots) = 0,$$

гдѣ y' изображаетъ $\frac{dy}{dx}$; взявъ производную, найдемъ

$$\varphi'(x, y, y', b, c\ldots) = 0.$$

Совокупляя послѣднія два уравненія, исключимъ вторую постоянную b, и получимъ то же дифференціальное уравненіе втораго порядка.

3°. Исключая постоянную величину b изъ уравненій $f(x, y, a, b, c\ldots) = 0$ и $f'(x, y, a, b, c) = 0$, найдемъ уравненіе вида

$$\psi(x, y, y', a, c\ldots) = 0,$$

и совокупивъ сіе послѣднее съ его производною

$$\psi'(x, y, y', a, c\ldots) = 0$$

для исключенія величины a, получимъ опять то же самое дифференціальное уравненіе втораго порядка.

Fonctions arbitraires. **Произвольныя функціи.** Такъ называютъ функціи одной, или нѣсколькихъ перемѣнныхъ, когда дѣйствія, которыя должно произвести надъ измѣняемыми, произвольны или неизвѣстны. Такого рода функціи входятъ въ полные интегралы частныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Положимъ, напримѣръ, что имѣемъ *частное дифференціальное уравненіе* $\frac{dz}{dx} = f(x, y)$; помноживъ на dx получимъ $\frac{dz}{dx}\,dx = f(x, y)\,dx$, и взявъ интегралъ относительно x, найдется $z = \int f(x, y)\,dx + C$. Въ этомъ выраженіи, C изображаетъ не просто *постоянную произвольную величину*, но какую угодно *функцію* перемѣнной y, такъ что можемъ принять $C = \varphi(y)$, разумѣя подъ φ произвольную функцію. Если бы имѣли уравненіе $\frac{du}{dx} = f(x, y, z)$, то нашли бы $u = \int f(x, y, z)\,dx + \varphi(y, z)$ гдѣ $\varphi(y, z)$ изображаетъ произвольную функцію перемѣнныхъ y и z.

Elimination des fonctions arbitraires. **Исключеніе произвольныхъ функцій.** Чрезъ совокупленіе конечнаго уравненія между тремя перемѣнными съ частными его производными, можно исключить два количества, или постоянныя или перемѣнныя, и такимъ образомъ получить уравненіе, независимое отъ исключенныхъ величинъ. Посредствомъ такого дѣйствія мы можемъ составлять уравненія, выражающія свойства функцій какого либо количества, предполагая видъ тѣхъ функцій совершенно произвольнымъ. Объяснимъ это примѣромъ. Пусть будетъ уравненіе

$$z = \mathrm{f}(ax + by),$$

гдѣ подъ f разумѣемъ совершенно произвольную функцію. Полагая $ax + by = t$, получимъ:

$$z = \mathrm{f}(t),\ \frac{dt}{dx} = a,\ \frac{dt}{dy} = b,$$

и сверхъ того

$$\frac{dz}{dx} = \mathrm{f}'(t)\frac{dt}{dx},\ \frac{dz}{dy} = \mathrm{f}'(t)\frac{dt}{dy}.$$

Исключивъ изъ этихъ уравненій производную $\mathrm{f}'(t)$, и подставивъ вмѣсто $\frac{dt}{dx}$ и $\frac{dt}{dy}$ равныя имъ величины a и b, получимъ уравненіе

$$b\frac{dz}{dx}-a\frac{dz}{dy}=0,$$

которое справедливо, какой бы видъ мы не приняли для функціи f. И такъ, могли бы предположить

$$z=(ax+by)^m,\quad z=log(ax+by),$$
$$z=tang(ax+by) \text{ и проч.}$$

Слѣдовательно уравненіе $b\frac{dz}{dx}-a\frac{dz}{dy}=0$ заключаетъ въ себѣ признакъ, по которому можно судить, будетъ ли предложенное выраженіе въ x и y функціею отъ $ax+by$. Если бы напримѣръ, желали узнать, такого ли вида количество

$$z=Sin\,ax.Cos\,by+Sin\,by.Cos\,ax,$$

то составивъ производныя

$$\frac{dz}{dx}=a\,Cos\,ax.Cos\,by-a\,Sin\,by.Sin\,ax$$
$$\frac{dz}{dy}=-b\,Sin\,ax.Sin\,by+b\,Cos\,by.Cos\,ax,$$

опредѣлили бы потомъ

$$\left.\begin{array}{l} b\frac{dz}{dx}-a\frac{dz}{dy}=b\,(a\,Cos\,ax.Cos\,by-a\,Sin\,by.Sin\,ax) \\ \quad -a\,(b\,Cos\,by.Cos\,ax-b\,Sin\,ax.Sin\,by)\end{array}\right\}=0$$

Но такъ какъ вторая часть этого уравненія тожественно равна нулю, то заключаемъ, что приведенное выраженіе есть функція отъ $ax+by$; и дѣйствительно

$$Sin\,ax.Cos\,by+Sin\,by.Cos\,ax=Sin\,(ax+by).$$

Для приложенія способа исключенія произвольныхъ функцій, отсылаемъ къ статьямъ: LAGRANGE (THÉORÊME DE), DÉVELOPPABLE (SURFACE), CONIQUE (SURFACE), CYLINDRIQUE (SURFACE), GAUCHE (SURFACE), RÉVOLUTION (SURFACE DE).

VARIATION DES CONSTANTES ARBITRAIRES. Измѣненіе произвольныхъ постоянныхъ. Способъ, изобрѣтенный *Лагранжемъ*, и имѣющій многоразличныя приложенія въ математическомъ Анализѣ. Основаніе способа состоитъ въ измѣненіи, по извѣстнымъ правиламъ, количествъ, которыя сперва были принимаемы за постоянныя. Смот. VARIATION DES CONSTANTES ARBITRAIRES.

ARBRE. (Мех.) **ВАЛЪ.** Ось, около которой происходитъ вращеніе въ машинѣ большаго размѣра. *Arbre d'une roue dentée; валъ зубчатаго колеса.* См. AXE.

ARBRE DE RETOUR, ARBRE DE DIRECTION. ДРЕВО ВОЗВРАТА, ДРЕВО НАПРАВЛЕНІЯ. Смот. CASCADES (MÉTHODE DES).

ARC. (Геом.) **ДУГА.** Часть какой нибудь кривой линіи, напримѣръ, *круга, эллипса, циклоиды*, и проч. *Arc elliptique, hyperbolique; эллиптическая, гиперболическая дуга.*

ARC DE CERCLE. Дуга круга, круговая дуга. Часть окружности круга.

ARCS CONCENTRIQUES. Концентрическія, одноцентренныя дуги. Дуги, описанныя изъ одной точки, но различными радіусами.

ARCS ÉGAUX. Равныя дуги. Дуги, описанныя однимъ и тѣмъ же радіусомъ, и заключающія въ себѣ одинаковое число градусовъ, слѣдовательно совпадающія при наложеніи одной на другую.

ARCS SEMBLABLES. Подобныя дуги, то есть такія, которыя заключаютъ въ себѣ одинаковое число градусовъ, но описаны радіусами, неравными между собою.

EXPRESSION DIFFÉRENTIELLE DE L'ARC. Дифференціальное выраженіе дуги. Въ плоской кривой дифференціалъ дуги s опредѣляется формулою $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$, а для кривой двоякой кривизны $ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, гдѣ x, y, изображаютъ прямоугольныя координаты разсматриваемой кривой. Чрезъ интегрированіе предыдущихъ выраженій, получится, въ каждомъ частномъ случаѣ, длина самой дуги. Такимъ образомъ для плоской кривой будетъ $s=\int\sqrt{dx^2+dy^2}$, а для двояко-кривой $s=\int\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$. Приведенныя нами выраженія, опредѣляющія ds, весьма легко выводятся, когда примемъ кривую линію за многоугольникъ, состоящій изъ безконечнаго числа сторонъ.

Для примѣра, положимъ, что ищется длина параболической дуги. Уравненіе обыкновенной параболы есть

$$x^2=2py,$$

гдѣ p означаетъ полу-параметръ. Дифференцируя послѣднее уравненіе, найдемъ

$$xdx=pdy \text{ или } dy^2=\frac{x^2}{p^2}dx^2,$$

откуда

$$\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{dx^2+\frac{x^2}{p^2}dx^2}=\frac{dx}{p}\sqrt{p^2+x^2},$$

и слѣдовательно

$$s = \int \frac{dx}{p} \sqrt{p^2 + x^2} = C + \frac{x}{2p} \sqrt{p^2 + x^2} + \frac{p}{2} \log (x + \sqrt{p^2 + x^2}),$$

гдѣ C изображаетъ постоянную произвольную величину. Если примемъ за начало дуги вершину параболы, то при $y = 0$ будетъ также $s = 0$; слѣдовательно $0 = C + \frac{p}{2} \log \sqrt{p^2}$, откуда $C = -\frac{p}{2} \log p$, и наконецъ

$$s = \frac{x\sqrt{p^2 + x^2}}{2p} + \frac{p}{2} \log \left(\frac{x + \sqrt{p^2 + x^2}}{p}\right).$$

ARC DIURNE. (Астр.) **ДНЕВНАЯ ДУГА.** Дуга описываемая свѣтиломъ во время нахожденія его надъ горизонтомъ. *Ночная дуга (arc nocturne)* есть та, которую свѣтило описываетъ въ бытность свою подъ горизонтомъ. Половины этихъ дугъ называются: 1) *полудневная (arc semi-diurne)*, 2) *полуночная дуга (arc semi-nocturne)*. Замѣтимъ, что промежутокъ времени, протекающій отъ восхожденія свѣтила до его захожденія, измѣряется дневною дугою, а между захожденіемъ и восхожденіемъ — ночною дугою.

Arc de position. То же, что Angle de position. (Смот.)

Arc de rétrogradation. Дуга возвратнаго движенія. Дуга описываемая видимымъ движеніемъ планетъ противъ порядка знаковъ.

ARC-EN-CIEL или **IRIS.** (Опт.) **РАДУГА.** Воздушное явленіе, въ видѣ разноцвѣтной дуги, усматриваемое только въ дождливую погоду, и всегда въ сторонѣ, противуположной солнцу. Довольно часто радуга бываетъ сопровождаема другою, которая называется *внѣшнею радугою (arc-en-ciel extérieur)*, для отличенія ея отъ первой, именуемой *внутреннею (arc-en-ciel intérieur)*. Цвѣта́ внутренней или главной радуги ярче цвѣтовъ внѣшней. Случается, но очень рѣдко, что видимъ третью радугу, которой оттѣнки еще слабѣе второй. Цвѣтныя полосы въ главной радугѣ всегда расположены въ слѣдующемъ порядкѣ, считая снизу вверхъ: 1) *фіолетовая*, 2) *синяя*, 3) *голубая*, 4) *зеленая*, 5) *желтая*, 6) *оранжевая* и 7) *красная*. Во второй радугѣ порядокъ обратный; начиная счётъ какъ и прежде снизу вверхъ, послѣдовательность цвѣтовъ будетъ такая: 1) *красный*, 2) *оранжевый*, 3) *желтый*, 4) *зеленый*, 5) *голубой*, 6) *синій* и 7) *фіолетовый*.

Древніе естествоиспытатели не оставили никакого удовлетворительнаго объясненія радуги, а только предлагали нѣкоторыя догадки, болѣе или менѣе неосновательныя. Первый, объяснившій это явленіе преломленіемъ солнечнаго свѣта въ дождевыхъ капляхъ, былъ *Антоній де Доминисъ*, Архіепископъ Спалатрскій. Въ книгѣ его: *De radiis visus et lucis (о лучахъ зрѣнія и свѣта)*, напечатанной въ Венеціи въ 1611 г., а написанной имъ еще за 20 лѣтъ передъ тѣмъ, онъ показываетъ, какимъ образомъ внутренняя радуга происходитъ отъ двухъ преломленій солнечнаго свѣта и одного промежуточнаго отраженія, а внѣшняя, отъ двухъ преломленій и двухъ промежуточныхъ отраженій въ каждой дождевой каплѣ, предполагаемой сферическою. *Кеплеръ* имѣлъ такое же понятіе объ образованіи радуги, что̀ можно видѣть изъ писемъ его къ *Беранже* въ 1605 году и *Гарріоту* въ 1606 году. *Декартъ*, принявшій теорію радуги *Антонія де Доминисъ*, исправилъ его объясненіе внѣшней радуги, которое было ошибочно. Но ни одинъ изъ сихъ естествоиспытателей не зналъ истиннаго происхожденія цвѣтовъ, почему предложенныя ими объясненія не во всѣхъ отношеніяхъ удовлетворительны. *Ньютонъ*, пополнилъ эту теорію важнымъ открытіемъ составленія лучей свѣта. Послѣ него, *Иванъ Бернулли* и *Галлей* занимались теоріею радуги, и рѣшили аналитически многіе любопытные вопросы, относящіеся къ сему явленію.

Объясненіе внутренней радуги. Изобразимъ чрезъ $IARB$ (черт. 2, листъ II) круговое сѣченіе сферической дождевой капли плоскостію, проходящею чрезъ центръ солнца S, центръ капли C и глазъ наблюдателя. Пусть будетъ SI одинъ изъ солнечныхъ лучей, падающій на каплю въ точкѣ I; этотъ лучъ, переходя изъ воздуха въ воду, преломляется, приблизясь къ нормали IC, пойдетъ по направленію IA, и упадетъ въ точку A; нѣкоторая часть свѣта выйдетъ изъ капли, а другая отразится въ R, при чемъ, по законамъ Оптики, уголъ паденія IAD будетъ равенъ углу отраженія EAR. Лучъ свѣта AR, переходя въ точкѣ R изъ средины плотнѣйшей въ рѣдчайшую, преломится опять, и пойдетъ по направленію RO. Если глазъ наблюдателя находится въ направленіи луча RO, то онъ получитъ впечатлѣніе цвѣта сего луча. Но такъ какъ лучъ SI есть тонкая кисть свѣта, заключающая въ себѣ всѣ первоначальные цвѣта̀, различной преломляемости, то очевидно, что когда ѳіолетовый цвѣтъ, котораго преломляемость наибольшая, пойдетъ по направленію PV, а красный, наименьше преломляющійся, по RO, то всѣ цвѣта̀ радуги будутъ заключаться въ пространствѣ $VPRO$, и займутъ мѣста, соотвѣтственныя степени ихъ взаимныхъ преломляемостей. И такъ, если глазъ наблюдателя находится по направленію OR, то онъ увидитъ по сему направленію только красный цвѣтъ. Но если глазъ будетъ постепенно подыматься до V, то онъ приметъ послѣдовательно впечатлѣнія всѣхъ радужныхъ цвѣтовъ до ѳіолетоваго. Отсюда легко заключить, что когда воздухъ наполненъ дождевыми каплями, то наблюдатель, при надлежащихъ обстоятельствахъ, долженъ увидѣть въ одно время подъ различными углами всѣ радужные цвѣта́; но какъ глазъ его составляетъ собою вершину конуса, образуемаго обращеніемъ зрительнаго луча, то каждый цвѣтъ представится въ видѣ круговой дуги или полосы, а совокупность сихъ полосъ составитъ изображеніе радуги. Ширина радуги очевидно будетъ зависѣть отъ разности наиболѣе и наименѣе преломляющихся лучей, именно, ѳіолетоваго и краснаго.

Разсмотримъ теперь аналитически обстоятельства появленія внутренней радуги. Пусть будетъ SI *падающій* лучъ *(rayon d'incidence)*; по преломленіи въ точкѣ I, этотъ лучъ пойдетъ по направленію IA, отразится изъ A въ точку R, гдѣ, преломляясь, выйдетъ по направленію RO. Лучъ RO называется *лучемъ выхожденія (rayon d'émergence)*. Изобразимъ чрезъ α уголъ паденія SIQ, чрезъ β уголъ преломленія CIA, и чрезъ φ, уголъ уклоненія свѣта SLO.

Уголъ φ весьма легко можетъ быть выраженъ посредствомъ угловъ α и β. Дѣйствительно, извѣстно изъ Геометріи, что $\varphi = \frac{1}{2}$(уг. ICR – уг. iCr); но уголъ $ICR = 4\beta$, а $iCr = 4(\alpha - \beta)$; слѣдовательно

(1) $$\varphi = \tfrac{1}{2}\left\{4\beta - 4(\alpha - \beta)\right\} = 4\beta - 2\alpha.$$

Сверхъ того, изобразивъ чрезъ μ *показатель преломленія (rapport de réfraction)* разсматриваемаго луча, будемъ имѣть (Смот. RÉFRACTION)

(2) $$Sin\,\alpha = \mu Sin\,\beta.$$

Уголъ φ измѣняется вмѣстѣ съ α и β, и можетъ получить наибольшее значеніе; для опредѣленія сего послѣдняго, стоитъ только взять $d\varphi = 0$.

И такъ, диѳѳеренцируя уравненія (1) и (2), получимъ

$$d\varphi = 4d\beta - 2d\alpha = 0, \text{ откуда } d\alpha = 2d\beta$$
$$Cos\,\alpha \,.\, d\alpha = \mu\, Cos\,\beta \,.\, d\beta;$$

подставляя же величину $d\alpha = 2d\beta$ въ послѣднее уравненіе, найдемъ

$$2\,Cos\,\alpha = \mu\,Cos\,\beta;$$

возвышая въ квадратъ, получимъ

$$4\,Cos^2\alpha = \mu^2\,Cos^2\beta,$$

или, что всё равно,

$$3\,Cos^2\alpha + 1 - Sin^2\alpha = \mu^2(1 - Sin^2\beta);$$

но, въ слѣдствіе урав. (2), эта ѳормула принимаетъ видъ

$$3\,Cos^2\alpha + 1 = \mu^2,$$

а изъ сей послѣдней выводимъ

(3) $$Cos\,\alpha = \sqrt{\frac{\mu^2 - 1}{3}}.$$

Посредствомъ этой ѳормулы легко объяснить появленіе всѣхъ радужныхъ цвѣтовъ, найти ширину каждой цвѣтной полосы, а слѣдовательно и полную ширину внутренней радуги.

Напримѣръ, опредѣлимъ посредствомъ приведенныхъ выше ѳормулъ наибольшій уголъ уклоненія φ, подъ которымъ красный лучъ можетъ быть усмотрѣнъ. По опытамъ Нютона для краснаго луча, коего преломляемость наименьшая, показатель преломленія $\mu = \frac{108}{81}$ *); подставляя сію величину въ ѳормулу (3), найдемъ

$$Cos\,\alpha = \sqrt{\frac{\left(\frac{108}{81}\right)^2 - 1}{3}}, \text{ откуда } \alpha = 59^\circ 23' 30'';$$

въ слѣдствіе же уравненія (2) будетъ

$$Sin\,\beta = \frac{81}{108}\,Sin\,(59^\circ 23' 30''), \text{ откуда } \beta = 40^\circ 14' 40'';$$

наконецъ, подставляя выведенныя сей-часъ величины для α и для β въ урав. (1), получимъ для наибольшаго угла уклоненія краснаго луча величину

$$\varphi = 42^\circ\, 1'\, 40''.$$

Подобнымъ образомъ, по извѣстнымъ показателямъ преломленія другихъ лучей, можно опредѣлить наибольшіе углы ихъ уклоненія: для ѳіолетоваго луча, коего преломляемость наибольшая, показатель преломленія $\mu = \frac{109}{81}$, найдемъ $\alpha = 58^\circ$, $\varphi = 40^\circ 17'$. Для промежуточныхъ лучей очевидно нашлись бы углы, заключающіеся между предѣ-

*) Въ новѣйшія времена *Фраунгоѳеръ* производилъ весьма точные опыты надъ преломляемостію лучей въ различныхъ срединахъ; мы удержали здѣсь числа, найденныя Нютономъ.

лами $40^\circ 17'$ и $42^\circ 1' 40''$; слѣдовательно, вся ширина радуги будетъ равна разности сихъ двухъ предѣльныхъ угловъ, то есть $1^\circ 44' 40''$. Замѣтимъ однакоже, что этотъ выводъ найденъ нами въ томъ предположеніи, когда солнце принимаемъ просто за свѣтящуюся точку; но если возьмемъ въ соображеніе его видимый діаметръ, равняющійся $30'$, то къ найденной выше ширинѣ радуги должно будетъ придать сіи $30'$, такъ что истинная ея ширина будетъ простираться до $2^\circ 14' 40''$, что весьма мало удаляется отъ непосредственныхъ измѣреній въ тѣхъ случаяхъ, когда цвѣта радуги бываютъ ярки.

Мы видѣли, что лучи различной преломляемости, имѣютъ и различные предѣлы для своихъ угловъ выхожденія. Легко усмотрѣть, что при наибольшихъ углахъ уклоненія φ, смежные выходящіе лучи будутъ чувствительнымъ образомъ параллельны между собою, и слѣдовательно произведутъ на глазъ наблюдателя впечатлѣніе собственнаго ихъ цвѣта. При другихъ же углахъ выхожденія, безчисленное множество лучей, разныхъ цвѣтовъ и имѣющихъ различныя направленія, смѣшиваются между собою, и поэтому представляются бѣлыми, или производятъ своимъ соединеніемъ оттѣнки главныхъ радужныхъ цвѣтовъ. Вотъ объясненіе внутренней радуги; перейдемъ теперь къ внѣшней, и опредѣлимъ ея измѣренія.

Объясненіе внѣшней радуги. Положимъ что лучъ SI (черт. 3, листъ II) преломляясь въ I, пойдетъ по направленію IA, отразится изъ A въ A', и потомъ, выходя изъ дождевой капли въ воздухъ въ точкѣ R, преломится по направленію RO. Изобразимъ, какъ и выше, чрезъ α уголъ паденія SIQ, чрезъ β уголъ преломленія CIA, и чрезъ φ уголъ уклоненія свѣта SLO, или, что всё равно, RLI. Легко видѣть, что въ четыреугольникѣ $LRCI$ углы LRC и LIC равны между собою, а каждый изъ нихъ равенъ $\pi - \alpha$; что касается до угла RCI, то онъ равенъ четыремъ прямымъ безъ утроеннаго угла $ICA = \pi - 2\beta$, ибо треугольники ICA, ACA', $A'CR$ равны; слѣдовательно

$$(4)\quad \varphi = 2\pi - 2(\pi - \alpha) - [2\pi - 3(\pi - 2\beta)] = \pi + 2\alpha - 6\beta.$$

Изобразивъ, по прежнему, чрезъ μ показатель преломленія разсматриваемаго луча, получимъ

$$(5)\qquad Sin\,\alpha = \mu\, Sin\,\beta.$$

Для наибольшаго значенія угла φ, будетъ $d\varphi = 0$, слѣдовательно:

$$2d\alpha - 6d\beta = 0, \text{ откуда } d\alpha = 3d\beta;$$

диффѳренцируя уравненіе (5), получимъ

$$Cos\,\alpha\,.\,d\alpha = \mu\, Cos\,\beta\,.\,d\beta,$$

или, подставивъ на мѣсто $d\alpha$ найденную сей-часъ величину

$$3\, Cos\,\alpha = \mu\, Cos\,\beta.$$

Совокупивъ это уравненіе съ (5), получимъ:

$$Cos\,\alpha = \sqrt{\frac{\mu^2 - 1}{8}}.$$

Если примемъ въ соображеніе только крайніе цвѣта внѣшней радуги, то найдемъ:

для краснаго: $\varphi = 50^\circ 59'$

для фіолетоваго: $\varphi = 54^\circ\ 9'$.

Слѣдовательно, ширина внѣшней радуги будетъ $54^\circ 9' - 50^\circ 59' = 3^\circ 10'$, когда солнце принимается за свѣтящуюся точку; увеличивъ этотъ уголъ видимымъ діаметромъ солнца, найдемъ $3^\circ 40'$ для настоящей ширины второй радуги. Разстояніе между внутреннею и внѣшнею радугою, или, что всё равно, разстояніе внѣшняго края краснаго цвѣта первой, отъ внутренняго края того же цвѣта второй, равняется разности $50^\circ 59' - 42^\circ 1' 40'' = 8^\circ 57' 20''$. Изъ сего угла слѣдуетъ еще вычесть видимый діаметръ солнца, и тогда получимъ $8^\circ 27' 20''$ для истиннаго разстоянія между двумя радугами. Увеличивъ найденный уголъ $\varphi = 42^\circ 1' 40''$ пол-діаметромъ солнца, получимъ для наибольшаго радіуса внутренней радуги $42^\circ 16' 40''$; вычитая же пол-діаметръ солнца изъ опредѣленнаго нами предъ симъ угла наибольшаго уклоненія краснаго луча внѣшней радуги, найдемъ для наименьшаго ея радіуса дугу въ $50^\circ 44'$.

Изъ сказаннаго легко также заключить, что когда высота солнца превышаетъ 42°, то главная радуга не видима для насъ. Дѣйствительно, проведемъ изъ глаза O наблюдателя (черт. 4, л. II) линію OS', параллельную солнечнымъ лучамъ. Линія OG, изображающая направленіе фіолетоваго луча, должна составлять уголъ въ 42° съ направленіемъ солнечнаго луча, а слѣдовательно такой же уголъ и съ OS'. Но если высота солнца будетъ превышать 42°, то уголъ, заключающійся между линіею OS' и горизонтомъ будетъ также въ 42°, но подъ горизонтомъ; слѣдовательно и лучъ OG будетъ находиться подъ горизонтомъ наблюдателя, и не достигнетъ его глаза. Точно такимъ образомъ объяснимъ и то обстоятельство, что когда высота солнца будетъ болѣе 42°, но менѣе 54°, то внѣшняя радуга одна можетъ быть усмотрѣна.

Иногда, при лунномъ сіяніи, усматриваются радуги, коихъ цвѣта бываютъ обыкновенно весьма блѣдны; онѣ называются *лунными (arcs-en-ciel lunaires)*, и происходятъ, какъ и солнечныя, отъ преломленія лунныхъ лучей въ дождевыхъ капляхъ.

Можно также произвести *искусственную радугу (arc-en-ciel artificiel)*, обратясь спиною къ солнцу, и брызнувъ передъ собой водою въ надлежащемъ направленіи. —

ARCHIMÈDE (SPIRALE и VIS D'). Смот. SPIRALE, VIS.

ARCHITECTONIQUE. АРХИТЕКТОНИКА. ЗОДЧЕСТВО. Наука, заключающая въ себѣ приложеніе Механики къ Высшей Архитектурѣ или Зодчеству. Въ Архитектоникѣ предлагались правила для устроенія колоссовъ, храмовъ, пирамидъ, лабиринтовъ и проч. — Извѣстный математикъ *Ламбертъ (Lambert)* издалъ также книгу подъ заглавіемъ: *Essai d'Architectonique.*

ARDENT (MIROIR, VERRE). (Опт.) **ЗАЖИГАТЕЛЬНОЕ ЗЕРКАЛО, СТЕКЛО.** См. MIROIR, VERRE.

ARE. (Метр.) **АРЪ.** Единица поверхности въ новой метрической системѣ, принятой во Франціи. Аръ равняется 100 квадратнымъ метрамъ, или $\frac{1}{100}$ гектара, а гектаръ равенъ 0,915 русской десятины. Смот. MÉTRIQUE (NOUVEAU SYSTÊME).

ARÉNAIRE (ARITHMÉTIQUE). АРЕНАРІЙ, ПСАММИТЪ;*) *Исчисленіе песчинокъ.* Письмо *Архимеда* къ Гелону, сыну Гіерона, Царя Сиракузскаго, написанное съ цѣлію опровергнуть мнѣніе тѣхъ изъ его современниковъ, которые утверждали, будто бы число песчинокъ, или безконечно, или по крайней мѣрѣ такъ велико, что большаго числа нельзя выразить. Архимедъ съ геометрическою точностію доказываетъ въ своемъ письмѣ, что можно выразить не только число песчинокъ земнаго шара въ томъ предположеніи, что онъ весь состоитъ изъ песку, но даже и тогда, когда предположимъ всё пространство до неподвижныхъ звѣздъ наполненнымъ пескомъ.

*) По гречески ψάμμος, а по лат. arena значатъ *песокъ*.

Архимедъ, въ этомъ письмѣ, основываетъ свое исчисленіе на предположеніи Астронома Аристарха Самосскаго относительно удаленія неподвижныхъ звѣздъ отъ земли, именно: онъ допускаетъ, что это разстояніе не болѣе 100000000 разъ взятому радіусу земли; окружность же земли, Архимедъ полагаетъ 300 миріадъ стадій, что составляетъ 432321 версту, и слѣдовательно слишкомъ въ десять разъ болѣе настоящаго, ибо земля, какъ извѣстно, имѣетъ въ окружности около 37573 верстъ. Сверхъ того, Сиракузскій Геометръ предполагаетъ, что въ объёмъ маковаго зерна входитъ не болѣе 10000 песчинокъ, а діаметръ маковаго зерна принимаетъ не менѣе $\frac{1}{40}$ дюйма *). Потомъ, вычисляетъ послѣдовательно число песчинокъ заключающихся въ шарѣ, имѣющемъ діаметромъ одинъ дюймъ, сто дюймовъ, десять тысячь дюймовъ и проч., и находитъ окончательно, что число песчинокъ, достаточное для наполненія шара, простирающагося до неподвижныхъ звѣздъ, будетъ менѣе *тысячи миріадъ чиселъ восьмыхъ*, что по нашему счисленію означаетъ число 10^{63}.

Читателей, желающихъ имѣть полное понятіе объ этомъ предметѣ, мы отсылаемъ къ книгѣ: *Архимеда Псаммитъ, переводъ съ Греческаго Ѳ. Петрушевскаго* 1824 г.

ARENARIUS или PSAMMITES. АРЕНАРІЙ, ПСАММИТЪ. Смот. выше.

ARÉOLE. (Геом.) **ПЛОЩАДКА.** Небольшая поверхность, ограниченная со всѣхъ сторонъ линіями.

ARÉOMÈTRE. (Физ.) **АРЕОМЕТРЪ, ЖИДКОМѢРЪ.** Инструментъ для опредѣленія плотности жидкостей. Ареометры употребляются также для опредѣленія доброты хлѣбнаго вина, и въ такомъ случаѣ они называются *Спиртомѣрами (pèse-esprits)*. Смот. также BALANCE HYDROSTATIQUE.

Ареометры бываютъ различные по своему устроенію: простѣйшій изъ нихъ представленъ на чертежѣ 5 (листъ II). Онъ состоитъ изъ пустаго стекляннаго сосуда *AB*; нижній шарикъ

*) Греческій дюймъ былъ, какъ полагаютъ, немногимъ болѣе $\frac{3}{4}$ нашего дюйма.

B наполняютъ ртутью или свинцомъ для того, чтобы инструментъ, при погруженіи въ жидкость, удерживалъ въ ней вертикальное положеніе. Но извѣстно, что всякое тѣло, погруженное въ жидкость, теряетъ изъ вѣса своего вѣсъ вымѣщенной имъ жидкости; слѣдовательно, въ жидкостяхъ менѣе плотныхъ, ареометръ опустится ниже, нежели въ тѣхъ, коихъ плотность будетъ бо́льшая. Сего замѣчанія достаточно для того, чтобы предвидѣть возможность судить о плотности жидкости по степени углубленія въ нее инструмента. На сей конецъ въ трубку *AC* вкладывается бумажная трубочка съ означенными на ней дѣленіями, и эти дѣленія показываютъ плотность той жидкости, въ которую погружаютъ ареометръ. Впрочемъ, изъ самаго вида инструмента легко усмотрѣть, что дѣленія сіи не равны между собою, а идутъ увеличиваясь къ верху. Такого рода ареометръ преимущественно употребляется для опредѣленія доброты хлѣбныхъ винъ, и называется *спиртомѣромъ*.

Мы не будемъ останавливаться на *ареометрахъ съ развѣсами (aréomètres à poids) Фаренгейта* и *Никольсона*: читатели найдутъ ихъ описанія во всѣхъ курсахъ Физики.

ARÉOMÉTRIE. АРЕОМЕТРІЯ. Искусство опредѣлять плотность жидкостей.

ARÊTE. (Геом.) **РЕБРО.** Такъ называется въ линейчатыхъ поверхностяхъ производящая прямая во всѣхъ ея положеніяхъ. *Arête d'un cône, d'un cylindre; ребро конуса, цилиндра.* — Въ многогранникѣ *ребрами* называются пересѣченія плоскостей граней. Смот. ANGLE SOLIDE.

Arête de rebroussement. Возвратное ребро, ребро возврата. Такъ назвалъ *Монжъ* кривую, образуемую послѣдовательными пересѣченіями *характеристикъ* въ какой нибудь поверхности; См. CARACTÉRISTIQUE. Возвратныхъ ребръ можетъ быть столько, сколько и характеристикъ. И такъ, цѣлый родъ кривыхъ поверхностей, выражаемый уравненіемъ перваго порядка въ частныхъ диффиренціалахъ, имѣетъ только одну характеристику, а слѣдовательно и одно возвратное ребро. Когда диффиренціальное уравненіе поверхностей извѣстнаго рода будетъ втораго порядка, то вообще будетъ существовать двѣ характеристики, а поэтому и два возвратныя ребра. Мы сказали *вообще*, ибо можетъ случиться, какъ напримѣръ въ развертывающихся поверхностяхъ, что двѣ характеристики приводятся къ одной, и въ такомъ случаѣ будетъ также существовать одно возвратное ребро.

ARGUMENT. (Элл. функ.) **АРГУМЕНТЪ.** Такъ называется эллиптическая функція $\int_0^\varphi \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}$ въ отношеніи къ *широтѣ* φ и къ тригонометрическимъ линіямъ этой самой широты.

Изобразивъ чрезъ *u* интегралъ $\int_0^\varphi \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}$, пишутъ $u = arg.\,\varphi$, $Sin\,\varphi = Sin\,am.\,arg.\,\varphi$, и проч. Смот. ÉLLIPTIQUES (FONCTIONS).

Argument d'une table. Аргументъ таблицы. Перемѣнная величина, для различныхъ значеній которой помѣщается въ таблицѣ извѣстная функція этой перемѣнной. Напримѣръ въ логариѳмическихъ таблицахъ, гдѣ показаны величины функціи $log\,x$, число x, есть *аргументъ* таблицы.

ARISTOTE (ROUE D'). (Мех.) **АРИСТОТЕЛЕВО КОЛЕСО.** Такъ называютъ кажущійся парадоксъ, представляющійся при движеніи колеса около оси, когда самое колесо катится на плоскости по прямой линіи. Полагаютъ что *Аристотель* замѣтилъ первый этотъ странный парадоксъ, который по этой причинѣ и удержалъ наименованіе *Аристотелева колеса*.

Положимъ что кругъ, обращаясь около своего центра, катится въ то же время по прямой линіи, и, съ совершеніемъ полнаго оборота, описываетъ прямую, коей длина равна его окружности. Если въ этомъ кругѣ, который назовемъ *главнымъ*, вообразимъ другой ме́ньшій, одноцентренный съ первымъ, и движущійся вмѣстѣ съ нимъ, то, по совершеніи большимъ кругомъ полнаго оборота, малый опишетъ прямую линію, равную уже не своей окружности, но окружности главнаго круга. Такъ напримѣръ, въ каретномъ колесѣ, ступица при своемъ обращеніи перейдетъ прямую, бо́льшую своей окружности, а именно, окружность самаго колеса. Описанный случай не подверженъ никакому сомнѣнію: онъ подтверждается ежедневнымъ опытомъ. Но какъ объяснить, что окружность ступицы описываетъ прямую, бо́льшую этой самой распрямленной окружности?

Аристотелево рѣшеніе состоитъ только въ ясномъ изложеніи того, въ чемъ состоитъ затрудненіе. Галилей, пытавшійся также объяснить этотъ парадоксъ, вообразилъ безчисленное множество безконечно малыхъ пустотъ (vuides infiniment petits), распредѣленныхъ по двумъ прямымъ линіямъ, описываемымъ обоими кругами; онъ утверждалъ, что малый кругъ не касается точками своей окружности къ пустымъ пространствамъ переходимой имъ прямой линіи, и, такимъ образомъ, описываетъ только линію, равную длинѣ своей окружности. Нѣтъ надобности доказывать слишкомъ очевидную неосновательность такого объясненія. —

Дѣлали и другія попытки, бо́льшею частію неудовлетворительныя. Первое настоящее рѣшеніе парадокса Аристотелева колеса, предложено членомъ Парижской Академіи *Дорту де Мераномъ (Dortous de Mairan)* въ 1715 году. Онъ объяснилъ кажущееся противорѣчіе приведеннаго случая *скольженіемъ* ступицы по прямой линіи, переходимой точками ея окружности.

Можно разрѣшить затрудненіе еще и другимъ образомъ. Вообразимъ кругъ, обращающійся около своего центра въ то время, какъ сей послѣдній движется по прямой линіи; очевидно, что прямолинейное движеніе центра вовсе не зависитъ отъ вращательнаго движенія круга, и слѣдовательно содержаніе между скоростями, относящимися къ обоимъ движеніямъ, совершенно произвольное. Но, очевидно, что можно уподобить катящееся на плоскости колесо съ кругомъ, обращающимся около своего центра, между тѣмъ какъ этотъ центръ движется параллельно упомянутой плоскости. Слѣдовательно, такъ же легко вообразить движеніе колеса, какъ и движеніе круга.

ARITHMANCIE или **ARITHMOMANCIE. АРИѲМОМАНТІЯ, ЧИСЛОГАДАНІЕ.** Мнимое искусство гадать посредствомъ чиселъ, и ученіе о сокровенныхъ ихъ свойствахъ. Оно, какъ полагаютъ, получило свое происхожденіе у Халдеянъ, Египтянъ и Евреевъ, и перешло потомъ къ Грекамъ. Послѣдователи *Пиѳагора* принимали *единицу* за раждающее начало всѣхъ чиселъ; *два*, изображало у нихъ злое начало, и слѣдовательно безпорядокъ, смятеніе и. т. п. Число *три* называли они *совершенною гармоніею*, и находили въ немъ разныя таинственныя значенія. *Четыре* было у нихъ въ большомъ уваженіи. Число 5, какъ составленное изъ 2 и 3, перваго чётнаго и перваго нечётнаго числа, знаменовало собою бракъ, и поэтому снискало себѣ особенное покровительство Юноны. Подобныя заблужденія ума человѣческаго (если только это мнимое искусство не заключало въ себѣ простой аллегоріи), могутъ найти себѣ оправданіе развѣ только въ невѣжественномъ состояніи тѣхъ отдаленныхъ отъ насъ временъ, въ которыя они возникли. —

ARITHMÉTICIEN. АРИѲМЕТИКЪ, СЧЁТЧИКЪ, ЧИСЛОСЛОВЪ. Человѣкъ знающій основательно Ариѳметику, или преподающій эту науку.

ARITHMÉTIQUE. АРИѲМЕТИКА, ЧИСЛОСЛОВІЕ, СЧЁТНАЯ НАУКА. Отъ Греческ. *ἀριθμος, число*, и *τέχνη, искусство*. Наука занимающаяся дѣйствіями надъ числами. Семь главныхъ дѣйствій, составляющихъ Ариѳметику, суть: *сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степени, извлеченіе корней и рѣшеніе численныхъ уравненій*. Хотя обыкновенно относятъ къ Алгебрѣ рѣшеніе численныхъ уравненій, но по мнѣнію многихъ новѣйшихъ математиковъ, разумѣющихъ подъ Ариѳметикой *техническую часть Алгебры*, это дѣйствіе должно войти въ составъ Ариѳметики. Впрочемъ, возвышеніе въ степени можетъ быть принимаемо за частный случай умноженія, по чему останутся только *шесть* различныхъ между собою дѣйствій. Если бы желали еще болѣе ограничить число дѣйствій, то можно бы было привести ихъ къ одному, именно, къ *сложенію*. И дѣйствительно, всѣ знаютъ, что вычитаніе приводится къ сложенію; что касается до умноженія и дѣленія, то первое есть не иное что̀ какъ сокращенное сложеніе, а второе, вычитаніе. При извлеченіи же корней, или при рѣшеніи численныхъ уравненій, мы производимъ всегда, или сложенія и умноженія, или вычитанія и дѣленія. Однако же несправедливо было бы сказать, что извлеченіе корней и рѣшеніе уравненій приводятся къ четыремъ упомянутымъ дѣйствіямъ; ибо, сіи послѣднія должны быть производимы въ извѣстномъ порядкѣ, и этотъ самый порядокъ составляетъ собою существенную часть дѣйствія. Смот. ADDITION, MULTIPLICATION, DIVISION, ÉLÉVATION

AUX PUISSANCES, EXTRACTION DES RACINES, RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS.

Многіе писатели затруднялись разграниченіемъ Алгебры отъ Ариѳметики, потому что первая изъ сихъ наукъ занимается тѣми же дѣйствіями, какъ и вторая. Но, должно замѣтить во первыхъ, что Алгебра *доказываетъ* тѣ правила, которыми Ариѳметика руководствуется, а во вторыхъ, что Алгебра имѣетъ предметомъ преобразованіе различныхъ дѣйствій одни въ другія такъ, чтобы Ариѳметикѣ оставалось только исполненіе, по возможности простѣйшихъ. Вотъ, кажется, рѣзкое различіе между сими двумя науками. Смот. NOMBRE, ALGÈBRE.

Нельзя сказать ничего положительнаго ни о времени, ни о мѣстѣ рожденія Ариѳметики. Нѣкоторые писатели думаютъ, что она открыта Халдеянами, а другіе, Египтянами. *Страбонъ*, въ своей Географіи, говоритъ, что современники его приписывали изобрѣтеніе Ариѳметики Финикіянамъ, потому что народъ сей производилъ въ свое время самую обширную торговлю въ свѣтѣ, а это самое необходимо требовало нѣкоторыхъ познаній въ счётной наукѣ. Оставляя всѣ эти догадки, можно, кажется, принять достовѣрнымъ то̀, что люди начали *считать* съ самаго того времени, какъ составились общества; безъ сомнѣнія, они знали число членовъ своихъ семействъ, считали стада свои, и пр. Вотъ начало Ариѳметики. Что касается до ея усовершенствованія, то безъ сомнѣнія оно должно быть отнесено къ временамъ гораздо позднѣйшимъ.

Греки заимствовали Ариѳметику отъ Египтянъ, и значительно обогативъ ее, передали Римлянамъ; потомъ она перешла къ Арабамъ, и наконецъ къ намъ. Арабы оказали важную услугу счётной наукѣ изобрѣтеніемъ весьма удобнаго изображенія чиселъ, много способствовавшаго къ усовершенствованію ея. Смот. CARACTÈRES COMMUNS.

Всѣ народы (за исключеніемъ древнихъ Китайцевъ и еще одного неизвѣстнаго племени, о которомъ упоминаетъ Аристотель) избрали десятичную систему счисленія. Это безусловное согласіе можно приписать только тому, что народы, находившіеся еще въ младенчествѣ, начинали считать *по пальцамъ*. Насчитавъ десять на обѣихъ рукахъ, имъ должно было удержать это въ памяти; потомъ повторяли то же дѣйствіе во второй разъ, въ третій, и такъ далѣе до десяти разъ, что̀ могли еще означать пальцами. Но, истощивъ такимъ образомъ десять разъ число пальцевъ, то есть, достигнувъ 100, они должны были уже придумать какой либо знакъ для изображенія *ста*, и по той же причинѣ, для изображенія *десяти сотенъ* и такъ далѣе. — Вотъ, безъ сомнѣнія, основаніе десятичной системы. Что касается до изображенія чиселъ знаками, то почти всѣ народы употребляли на сей конецъ письмена своихъ алфавитовъ. Смот. CARACTÈRE.

Предѣлы нашего Лексикона не позволяютъ намъ входить ни въ какія подробности, относительно состоянія Ариѳметики и числительныхъ знаковъ у различныхъ народовъ. Читатель найдетъ любопытныя подробности о семъ предметѣ въ *Энциклопедическомъ Лексиконѣ*, въ статьѣ: *Ариѳметика* соч. *Ленина*.

Нѣкоторые математики раздѣляли Ариѳметику на слѣдующія части:

Arithmétique théorique. Теорическая, умозрительная, основная Ариѳметика. Она занимается изслѣдованіемъ различныхъ свойствъ и отношеній, существующихъ между отвлеченными числами, и доказательствомъ тѣхъ правилъ, которыми она руководствуется. Нѣкоторыя части теорической Ариѳметики должно отнести къ Алгебрѣ.

Arithmétique pratique. Практическая, техническая, прикладная Ариѳметика. Практическая Ариѳметика занимается самымъ производствомъ численныхъ выкладокъ; напримѣръ, еслибы требовалось раздѣлить число 3717 на 9, и потомъ, частное умножить на 13, то такая задача относилась бы къ *практической Ариѳметикѣ*.

Arithmétique instrumentale. Искусственная Ариѳметика, то есть та, въ которой дѣйствія производятся, съ бо̀льшею или мѐньшею скоростію, посредствомъ изобрѣтенныхъ на сей конецъ машинъ; таковы напримѣръ *Неперовы палочки*, *Гунтерова шкала*, *Ариѳметическая машина Паскаля*, новѣйшая Англійскаго математика *Баббеджа*, и пр. См. BAGUETTES DE NEPER, ÉCHELLE DE GUNTER, BABBADGE (MACHINE ARITHMÉTIQUE DE).

Arithmétique logarithmique. Логариѳмическая Ариѳметика, въ которой излагаются способы для произведенія выкладокъ посредствомъ логариѳмовъ.

Aritmétique numérale. Численная Ариѳметика, имѣющая предметомъ дѣйствія надъ величинами отвлеченными, изображенными цифрами. Въ ней употребляются *Арабскія цифры*.

Arithmétique spécieuse, Arithmétique littérale или Algèbre. Буквенная Ариѳметика, Алгебра. Смот. ALGÈBRE.

Arithmétique décimale, décadaire, или dénaire. Десятичная Ариѳметика (принятая всѣми), въ которой употребляютъ *десять знаковъ*, именно: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Arithmétique binaire или dyadique. Двузначная, двойничная, діадическая Ариѳметика. Въ ней употребляютъ только *два знака*, обыкновенно 0 и 1. Смот. BINAIRE (ARITHMÉTIQUE).

Arithmétique trinaire. Трехзначная, трехцифренная Ариѳметика, употребляющая *три знака*: 0, 1 и 2.

Arithmétique tétractique или quaternaire. Четырехзначная Ариѳметика, въ которой употребляется *четыре знака*: 0, 1, 2 и 3.

Arithmétique quinaire. Пятизначная Ариѳметика, въ которой всѣ числа изображаются *пятью знаками*: 0, 1, 2, 3, 4.

Arithmétique duodécimale или duodénaire. Двѣнадцатизначная, двѣнадцатицифренная, дванадесятичная Ариѳметика, употребляющая *двѣнадцать знаковъ*, каковы: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и еще *два* произвольные.

Arithmétique sexagésimale. Шестидесятичная Ариѳметика, занимающаяся шестидесятичными дробями. Смот. SEXAGÉSIMAL.

Arithmétique des infinis. Ариѳметика безконечныхъ, въ которой излагаются способы для опредѣленія суммы безконечныхъ рядовъ. Смот. INFINI, SÉRIE.

Arithmétique des incommensurables, des irrationnels. Ариѳметика несоизмѣримыхъ, ирраціональныхъ. Смот. INCOMMENSURABLE, IRRATIONNEL.

Arithmétique universelle. Всеобщая Ариѳметика. Такъ назвалъ *Нютонъ* Алгебру, или науку о величинахъ вообще. См. ALGÈBRE, ANALYSE. Онъ издалъ въ 1707 году книгу подъ заглавіемъ: *Arithmetica universalis*, въ которой излагаетъ правила Алгебры и приложеніе сей науки къ Геометріи. Въ этомъ сочиненіи Нютонъ помѣстилъ разные новые способы; наиболѣе примѣчательные относятся къ приведенію въ уравненіе вопросовъ геометрическихъ. Лучшій изъ комментаторовъ *Всеобщей Ариѳметики* былъ *Кастильонъ (Castilion)*, членъ Берлинской Академіи, который, въ 1761 году, издалъ въ 2 частяхъ знаменитое твореніе Нютона, съ собственными толкованіями, подъ заглавіемъ: *Arithmetica universalis, etc. cum commentariis Ioan Castilionei.*

Arithmétique transcendante. Трансцендентная, высшая Ариѳметика, Теорія чиселъ. Смот. NOMBRES (THÉORIE DES).

Arithmétique politique. Политическая Ариѳметика. Эта наука, еще мало обработанная, имѣетъ предметомъ изслѣдованія, полезныя для благосостоянія народовъ; таковы, напримѣръ, изслѣдованія относящіяся къ народонаселенію, къ степени плодородности почвы, количеству потребляемыхъ жизненныхъ припасовъ, и проч. Соображая такого рода свѣдѣнія государственный человѣкъ можетъ вывести заключенія, важныя для земледѣлія, внутренней и внѣшней торговли, и проч.

Arithmétique commerciale. Коммерческая Ариѳметика. Приложеніе Ариѳметики къ различнымъ задачамъ, относящимся къ коммерціи, какъ то: къ сравненію вексельныхъ курсовъ, къ арбитражу, годовымъ уплатамъ, къ правилу учета и проч. Смот. ARBITRAGE, ANNUITÉS, ESCOMPTE, CHANGE и проч.

Arithmétique amusante или divinatoire. Увеселительная, гадательная Ариѳметика. Искусство опредѣлять посредствомъ вычисленія какія нибудь загаданныя числа или карты, или еще, находить относительный порядокъ, при которомъ удовлетворялись бы извѣстныя условія. Для примѣра приведемъ слѣдующую задачу: *Пятнадцать человѣкъ Турокъ и столько же Христіанъ, находившихся на кораблѣ, были застигнуты жестокою бурею. Побросавъ въ море всѣ товары, кормчій объявилъ, что необходимо выбросить за бортъ и половину экипажа для спасенія другой по-*

ловины. Выстроивъ всѣхъ людей въ рядъ, онъ началъ считать съ однаго конца, и девятаго бросалъ въ море, наблюдая притомъ, по окончаніи ряда, начинать счётъ съ того же конца. Когда пятнадцать человѣкъ были такимъ образомъ утоплены, то оказалось, что оставшіеся въ живыхъ были всѣ Христіане. Спрашивается, какимъ образомъ надобно было разставить Турокъ и Христіанъ, чтобы спасти всѣхъ послѣднихъ?

Слѣдующимъ порядкомъ удовлетворяется вопросъ:

++++ooooo++o+++o+oo++ooo+oo++o,

гдѣ знаки + означаютъ Христіанъ, а 0 Турокъ. Для рѣшенія этого же вопроса, можно употребить Латинскій стихъ

Populeat virgam mater Regina ferebas,

въ которомъ гласнымъ буквамъ должно приписать слѣдующія знаменованія: *a* означаетъ одного человѣка, *e* двухъ, *i* трехъ, *o* четырехъ, *u* пять человѣкъ. По значеніямъ гласныхъ разставляются люди: сперва Христіане, за ними Турки, потомъ Христіане, тамъ опять Турки, и такъ далѣе въ такомъ же порядкѣ. Напримѣръ, въ стихѣ первая гласная буква *o*; слѣдовательно надобно поставить *четырехъ* Христіанъ; за буквою *o* слѣдуетъ *u*, почему надобно поставить пять человѣкъ Турокъ, и такъ далѣе.

ARITHMÉTIQUE. АРИѲМЕТИЧЕСКІЙ, ЧИСЛОСЛОВНЫЙ, принадлежащій Ариѳметикѣ. *Opération arithmétique, Ариѳметическое дѣйствіе.* Смот. выше.

VALEUR ARITHMÉTIQUE. Ариѳметическая величина. Такъ называютъ иногда вещественную величину какого либо выраженія, допускающаго и значенія мнимыя. И такъ *ариѳметическая величина* $\sqrt[3]{8}$ есть 2, а остальныя двѣ, $-1+\sqrt{3}.\sqrt{-1}$ и $-1-\sqrt{3}.\sqrt{-1}$. — Подъ величиною *ариѳметическою* или *численною (numérique)* разумѣютъ также положительное значеніе какого либо числа, хотя бы оно было и отрицательное. И такъ, численная или ариѳметическая величина отрицательнаго количества -10 есть 10.

MOYEN или употребительнѣе MOYENNE ARITHMÉTIQUE. Средняя Ариѳметическая. Смот. MOYENNE.

PROGRESSION ARITHMÉTIQUE. Ариѳметическая прогрессія. См. PROGRESSION.

PROPORTION ARITHMÉTIQUE. Ариѳметическая пропорція. Смот. PROPORTION.

RAPPORT ARITHMÉTIQUE. Ариѳметическое отношеніе. Смот. RAPPORT.

TRIANGLE ARITHMÉTIQUE. Ариѳметическій треугольникъ. Смот. TRIANGLE.

ÉCHELLES ARITHMÉTIQUES. Ариѳметическія системы. Такъ назвалъ *Бюффонъ* различныя прогрессіи чиселъ, которыя могли бы служить основаніемъ *Ариѳметики.* Напримѣръ, употребляемая нами Ариѳметика, въ которой числа выражаются посредствомъ *десяти* цифръ, имѣетъ основаніемъ *десятичную ариѳметическую прогрессію*: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Принимая только пять знаковъ 0, 1, 2, 3, 4, очевидно, что всѣ числа превосходящія 5, выражались бы уже не одною, но двумя или большимъ числомъ цифръ. *Пять*, выражалось бы чрезъ 10; ибо 1 на второмъ мѣстѣ изображала бы *пять*, а не *десять*, какъ въ десятичной Ариѳметикѣ. Число 341, въ этой самой *пятизначной Ариѳметикѣ*, изображало бы *девяносто шесть*, ибо *четыре*, на второмъ мѣстѣ, равняется $5\times4=20$, а *три*, на третьемъ, изображаетъ произведеніе $5^2\times3=75$; сумма же $1+20+75$ дѣйствительно равна 96. Смот. BINAIRE (ARITHMÉTIQUE).

ARITHMÉTIQUE (MACHINE). Ариѳметическая, счетная, числительная машина. Машина, состоящая вообще изъ системы колесъ и другихъ принадлежностей, посредствомъ которыхъ вырѣзанныя или напечатанныя цифры движутся, и, въ своемъ движеніи, производятъ главныя ариѳметическія дѣйствія.

MACHINE ARITHMÉTIQUE DE PASCAL. Ариѳметическая машина Паскаля; описаніе ея можно читать въ *Encyclopédie méthodique*, отдѣленіе *Mathématiques*, статья: *Arithmétique (machine).*

Сверхъ упомянутой машины были изобрѣтены многія другія, изъ коихъ совершеннѣйшая, безъ сомнѣнія, есть новѣйшая машина Англійскаго математика *Баббеджа*, которая отличается отъ прочихъ числительныхъ машинъ тѣмъ, что механизмъ ея приноровленъ къ способу разностей, что еще до сихъ поръ не было сдѣлано. Смот. BABBADGE (MACHINE ARITHMÉTIQUE DE).

ARITHMÉTIQUES (SÉRIES). (Анал.) **АРИѲМЕТИЧЕСКІЕ РЯДЫ.** Пусть будетъ рядъ

(A) $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$;

если изъ этого ряда, чрезъ вычитаніе каждаго члена изъ послѣдующаго, выведемъ другой рядъ

(B) $u_1 - u_0,\ u_2 - u_1,\ u_3 - u_2,\ u_4 - u_3, \ldots$

и тѣмъ же путемъ третій

(C) $u_2 - 2u_1 + u_0,\ u_3 - 2u_2 + u_1,\ u_4 - 2u_3 + u_2, \ldots,$

и такимъ же образомъ составимъ ряды (D), (E) и проч., то ряды (B), (C), (D), (E),.... въ отношеніи къ (A), называются *первымъ, вторымъ, третьимъ, четвертымъ... разностнымъ рядомъ.* Если n-й разностный рядъ будетъ весь состоять изъ равныхъ членовъ, отличныхъ отъ нуля, то рядъ называется *ариѳметическимъ рядомъ n-го порядка:* Очевидно, что въ такомъ случаѣ, члены $(n+1)$-го, $(n+2)$-го и проч. разностныхъ рядовъ обращаются въ нули. Изъ сего опредѣленія легко заключить, что ариѳметическая прогрессія

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b, \ldots.$$

есть ариѳметическій рядъ *перваго порядка,* для котораго постоянный членъ перваго разностнаго ряда $= 1.b$.

Рядъ

$$a^2,\ (a+b)^2,\ (a+2b)^2,\ (a+3b)^2, \ldots$$

изображаетъ ариѳметическій рядъ *втораго порядка,* для котораго постоянный членъ втораго разностнаго ряда $= 1.2.b^2$. И вообще, строка

$$a^n,\ (a+b)^n,\ (a+2b)^n,\ (a+3b)^n, \ldots$$

представляетъ ариѳметическій рядъ *n-го порядка,* для котораго постоянный членъ n-го разностнаго ряда $= 1.2.3\ldots nb^n$.

Изъ самаго опредѣленія рядовъ ариѳметическихъ легко заключить, что изслѣдованіе ихъ свойствъ самымъ естественнымъ образомъ приводится къ *Исчисленію Разностей.* См. DIFFÉRENCES (CALCUL AUX — FINIES).

ARITHMOGRAPHE. АРИѲМОГРАФЪ, то же что ARITHMOMÈTRE (Смот.).

ARITHMOGRAPHIE. АРИѲМОГРАФІЯ. Такъ Г. *Амперъ (Ampère),* въ своемъ *Essai sur la philosophie des sciences, Paris* 1834 г. предлагаетъ назвать Ариѳметику и элементарную часть Алгебры.

ARITHMOLOGIE. АРИѲМОЛОГІЯ. Наименованіе, предлагаемое въ томъ же сочиненіи Г. Ампера для *Чистой Математики,* включая въ нее и Исчисленіе Вѣроятностей. — Нѣкоторые математики называли иногда Ариѳметику *Ариѳмологіею.*

ARITHMOMÈTRE. АРИѲМОМЕТРЪ. Счетная машина, изобрѣтенная *Томасомъ де Кольмаръ (Thomas de Colmar),* и представленная имъ на разсмотрѣніе Парижской Академіи въ 1821 году.

ARITHMONOMIE. АРИѲМОНОМІЯ. Такъ называли нѣкоторые математики элементарную часть умозрительной Ариѳметики.

ARMILLE. (Геом.) **КОЛЬЦО, КОЛЬЦЕВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ.** Смот. ANNULAIRE (SURFACE).

ARPENT. (Метр.) **АРПАНЪ.** Французская поземельная мѣра, равняющаяся 900 квадратнымъ тоазамъ, или 0,3129 Русскихъ десятинъ.

ARPENTAGE. ЗЕМЛЕМѢРІЕ, МЕЖЕВАНІЕ, МЕЖЕВКА. Искусство, имѣющее предметомъ измѣреніе полей, то есть, изображеніе участковъ земли на бумагѣ въ точномъ, но уменьшенномъ видѣ, и опредѣленіе ихъ поверхности.

Землемѣріе собственно состоитъ изъ трехъ частей.

Первую часть составляютъ дѣйствія, производимыя на самомъ мѣстѣ, какъ то: измѣреніе основанія и другихъ линій на землѣ, также, опредѣленіе угловъ. На сей конецъ употребляются разные инструменты. Смот. CHAINE, BASE, ÉQUERRE D'ARPENTEUR, ASTROLABE, GRAPHOMÈTRE, BOUSSOLE, PLANCHETTE, NIVEAU, JALON, FICHES и проч.

Вторая часть занимается изображеніемъ на бумагѣ того участка земли, котораго опредѣлили размѣры и видъ, при чемъ употребляютъ разныя пособія. Смот. COMPAS, RAPPORTEUR, ÉCHELLE и проч. Смот. также CARTE, PLAN.

Предметъ *третьей части* — опредѣленіе квадратнаго содержанія или поверхности изображеннаго на бумагѣ участка земли. Смот. AIRE, TRIANGLE, CARRÉ и проч.

Первая часть преимущественно называется *Землемѣріемъ;* вторая — *Съёмкою плановъ* (*Levé des plans*); третья — *Измѣреніемъ поверхностей, Вымѣркой* (*Toisé*). Смот. эти слова.

Землемѣріе, которое, въ историческомъ отношеніи, можно считать основнымъ камнемъ Геометріи, по свидѣтельству всѣхъ писателей, получило свое начало въ Египтѣ. См. GÉOMÉTRIE. По мнѣнію нѣкоторыхъ, причиняемыя разлитіемъ рѣки Нила замѣшательства въ границахъ смежныхъ между собою участковъ земли, и необходимость разграничивать ихъ каждый разъ съизнова, заставили искать постоянныхъ правилъ для межеванія полей. Вотъ происхожденіе Землемѣрія. Другіе, относятъ начало этого искусства къ временамъ Сезостриса, въ царствованіе котораго Египетъ пересѣкли безчисленнымъ множествомъ каналовъ, и раздѣлили участки между его жителями, которыхъ обложили податью, соразмѣрною съ величиною доставшейся каждому земли. Такой раздѣлъ конечно требовалъ нѣкоторыхъ познаній въ Геометріи, и, по свидѣтельству Геродота, онъ былъ произведенъ подъ руководствомъ *Ѳота (Thot* или *Theut)*, сановника при дворѣ *Сезостриса*, который, по мнѣнію того же историка, одно лице съ *Озирисомъ*.

Что касается до дальнѣйшихъ успѣховъ Землемѣрія, то мы отсылаемъ читателей къ слову GÉOMÉTRIE. *Высшая* часть Землемѣрія называется *Геодезіею*. Смот. GÉODÉSIE.

ARPENTER. МЕЖЕВАТЬ. — ОБМЕЖЕВАТЬ. *Arpenter des champs, межевать поля.* Смот. выше.

ARPENTEUR. ЗЕМЛЕМѢРЪ, МЕЖЕВЩИКЪ. Человѣкъ занимающійся Землемѣріемъ. См. ARPENTAGE. *Chaine d'arpenteur, межевая цѣпь. Équerre d'arpenteur, землемѣрный наугольникъ.* См. CHAINE, ÉQUERRE.

ARRANGEMENT. ПЕРЕСТАНОВЛЕНІЕ. Смот. ALTERNATION.

ARRÉRAGE; употребительнѣе во множественномъ числѣ **ARRÉRAGES. НЕДОИМКА, НЕДОБОРЪ.** Та сумма, которая не была уплачена къ надлежащему сроку.

Положимъ, напримѣръ, что сумма A, которая должна быть уплачена къ извѣстному сроку, уплачивается по истеченіи t лѣтъ послѣ условленнаго срока. Если изобразимъ чрезъ p проценты со ста, то сверхъ недоимочной суммы A, получатель недоимки долженъ еще взыскать проценты съ нея за t лѣтъ. Принимая въ расчетъ только простые проценты, добавочная сумма будетъ $\frac{Atp}{100}$; въ случаѣ сложныхъ процентовъ, она опредѣлится формулою $A\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^t-1\right]$. Смот. INTÉRÊT.

ARRÊT (POINT D'). (Геом.) **ТОЧКА ПРЕСѢЧЕНІЯ, ПРІОСТАНОВЛЕНІЯ.** Такъ называется точка, въ которой кривая вдругъ пресѣкается или останавливается. Напримѣръ, кривая, опредѣляемая уравненіемъ $y=\frac{1}{\log(x)}$, имѣетъ *точку пресѣченія* въ началѣ координатъ. См. POINTS SINGULIERS.

ARS CONJECTANDI, ART DE CONJECTURER. ИСКУССТВО ПРЕДПОЛАГАТЬ. Заглавіе примѣчательнаго сочиненія *Якова Бернулли* объ Исчисленіи Вѣроятностей. Авторъ предлагаетъ въ немъ общую теорію соединеній и рядовъ, и прикладываетъ ее къ рѣшенію многихъ трудныхъ вопросовъ, относящихся къ Анализу Вѣроятностей. Это сочиненіе въ особенности примѣчательно доказательствомъ слѣдующаго предложенія: *При неопредѣленномъ повтореніи испытаній, изъ коихъ каждое приводитъ къ одному изъ нѣсколькихъ событій, отношеніе между числами появленій двухъ какихъ ни есть изъ событій непрестанно приближается къ отношенію вѣроятностей тѣхъ же событій, и наконецъ, при достаточномъ числѣ испытаній, разнствуетъ отъ него какъ угодно мало.* Сочиненіе *Ars conjectandi* издано *Николаемъ Бернулли* въ Базелѣ въ 1713 году, семь лѣтъ послѣ смерти Сочинителя.

ART CARACTÉRISTIQUE. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ, ЗНАКОСОКРАТИТЕЛЬНОЕ ИСКУССТВО. Искусство изображать яснымъ и простымъ образомъ различныя свойства и взаимныя соотношенія величинъ, употребляя на то приличныя знакоположенія. Такимъ способомъ можно значительно сокращать какъ словесное выраженіе предложеній, такъ и самыя доказательства различныхъ теоремъ и рѣшенія вопросовъ. Напримѣръ, желая выразить посредствомъ знаковъ, что *квадратъ числа* 5, *сложенный съ единицею, дѣлится безъ остатка на* 13, мы пишемъ просто: $5^2+1\equiv 0$ (mod. 13). Смот. CARACTÈRE.

ARTICLE. Уст. выр. (Ариѳ.) **КРУГЛОЕ ЧИСЛО.** Число, дѣлящееся безъ остатка на 10; напримѣръ 20, 30, 100 и проч. Такого рода число называлось также иногда *nombre rond, numerus rotundus.*

ARTIFICES DE CALCUL. ИСКУСНЫЕ, УДАЧНЫЕ ПРІЁМЫ, упрощающіе вычисленія или доказательства какихъ нибудь предложеній.

ARTIFICIELLES (LIGNES). ИСКУССТВЕННЫЯ ЛИНІИ. Такъ называются линіи, намѣчаемыя на масштабѣ, и изображающія *логариѳмы, синусы, тангенсы* и проч. Посредствомъ такого масштаба, вмѣстѣ съ обыкновеннымъ, можно рѣшать, довольно вѣрно, задачи изъ Тригонометріи, Мореплаванія и проч.

Nombres artificiels. Искусственныя числа, то есть *логариѳмы, синусы, тангенсы* и проч.

AS.

ASCENDANTE (PROGRESSION). (Алг.) **ВОЗРАСТАЮЩАЯ, ВОСХОДЯЩАЯ ПРОГРЕССІЯ.** Такъ называется прогрессія, коей члены постепенно увеличиваются. Такова, напримѣръ, ариѳметическая 1, 2, 3, 4 ..... и геометрическая 1, 2, 4, 8 .... *Développer une fonction en série, procédant suivant les puissances ascendantes de la variable; разложить функцію въ рядъ, простирающійся по возрастающимъ степенямъ перемѣнной.* — Вообще рядъ называется *восходящимъ (série ascendante)*, когда онъ простирается по возрастающимъ цѣлымъ *положительнымъ* степенямъ перемѣннаго количества. Таковъ напримѣръ рядъ $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots\dots$ *Нисходящій рядъ (série descendante)* есть такой, въ которомъ степени перемѣннаго количества цѣлыя, и, какъ выше, возрастающія числа, но *отрицательныя*; напримѣръ:

$$1+\frac{x^{-1}}{1}+\frac{x^{-2}}{1\cdot 2}+\frac{x^{-3}}{1.2.3}+\dots=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot x^2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot x^3}+\dots\dots$$

ASCENSION. (Мех.) **ВОСХОЖДЕНІЕ,** то есть, движеніе снизу вверхъ. *Ascension verticale d'un corps pesant; вертикальное восхожденіе тяжелаго тѣла. Ascension des liquides dans les tubes capillaires; восхожденіе жидкостей въ волосныхъ трубкахъ.*

Mouvement ascensionnel. Движеніе вверхъ, движеніе восходящаго тѣла. См. CHUTE DES GRAVES.

ASCENSION DROITE. ПРЯМОЕ ВОСХОЖДЕНІЕ свѣтила есть дуга экватора, считаемая по порядку знаковъ отъ точки весенняго равноденствія, до точки, въ которой кругъ склоненія, проходящій чрезъ свѣтило, пересѣкаетъ экваторъ.

ASCENSION OBLIQUE. КОСВЕННОЕ ВОСХОЖДЕНІЕ свѣтила есть дуга экватора, заключающаяся между точкою весенняго равноденствія и точкою экватора, которая въ одно время восходитъ со свѣтиломъ. И такъ косвенное восхожденіе одной и той же звѣзды, но въ разныхъ мѣстахъ поверхности земной, будетъ больше или меньше, смотря на бо́льшее или ме́ньшее наклоненіе сферы въ сихъ мѣстахъ; между тѣмъ какъ прямое восхожденіе свѣтилъ не зависитъ отъ наклоненія. Разность между прямымъ и косвеннымъ восхожденіями называется *разностію восхожденій (différence ascensionnelle)*.

ASPIRANTE (POMPE). (Мех.) **ВСАСЫВАЮЩІЙ НАСОСЪ.** Смот. POMPE.

ASSEMBLAGE. (Геом.) **СОЕДИНЕНІЕ, СОВОКУПЛЕНІЕ.** *Assemblages de lignes droites, de plans. Соединенія прямыхъ линій, плоскостей. Les assemblages de plans qui circonscrivent un espace, donnent des polyèdres; соединенія плоскостей, ограничивающихъ пространство, образуютъ многогранники.*

ASSIGNABLE (QUANTITÉ). ОЩУТИТЕЛЬНАЯ, ЧУВСТВИТЕЛЬНАЯ ВЕЛИЧИНА, то есть такая, которая можетъ быть сравниваема съ другими конечными величинами. И такъ, подобное количество хотя и бываетъ обыкновенно весьма малое, однакоже не можетъ быть принято за *безконечно малое*.

ASSEMBLÉES. (Исч. Вѣр.) **СОБРАНІЯ.** Вѣроятность справедливости рѣшенія какого либо дѣла Собраніемъ судей есть вопросъ довольно щекотливый въ Анализѣ Вѣроятностей. Анализъ сей доставляетъ способы для опредѣленія *состава* Собраній при условіи, чтобы ихъ рѣшенія были по возможности правдивы; онъ приводитъ къ заключенію, которое впрочемъ показываетъ и здравый разсудокъ, что чѣмъ члены Собранія будутъ просвѣщеннѣе, тѣмъ рѣшенія ихъ будутъ болѣе правдивы, и тогда вѣроятность справедливости ихъ рѣшеній будетъ увеличиваться съ ихъ числомъ. Напротивъ того, вѣроятность справедливости рѣшенія уменьшится съ увеличеніемъ числа членовъ, если сіи послѣдніе недостаточно посвящены въ сущность дѣла, подлежащаго ихъ обсужденію. Отсюда слѣдуетъ, что въ просвѣщенныхъ Государствахъ число членовъ Законодательнаго Собранія должно быть значительно, а это легко выполнить тамъ, гдѣ образованность почти повсемѣстная. Въ Государствахъ менѣе просвѣщенныхъ, гдѣ образованные люди довольно рѣдки, опасно допускать многочисленность въ Собраніяхъ, потому что между членами могутъ найтись такіе, которые, по своему невѣжеству, не въ состояніи здраво обсудить дѣло, предлагаемое на ихъ разсмотрѣніе.

Что касается до аналитическаго рѣшенія вопросовъ, относящихся къ приговорамъ Собраній, то мы отсылаемъ читателей къ статьѣ: TRIBUNAUX.

ASSIGNER. ОПРЕДѢЛИТЬ, НАЙТИ, ПРИПИСАТЬ. *On pourra assigner à x une valeur telle que,* и проч. *Можно будетъ опредѣлить x такимъ образомъ, приписать x-у такое значеніе, что* и проч.

ASSOCIÉS (NOMBRES). (Теор. Чис.) **СОПРЯЖЕННЫЯ ЧИСЛА.** Сопряженными числами относительно модуля *p*, называются такія, коихъ произведеніе *равноостаточно* съ 1-ею. Напримѣръ числа 5 и 8, относительно модуля 13, будутъ *сопряженныя,* ибо $5.8 \equiv 1 \pmod{13}$. Смот. CONGRUS.

ASSUJETTIR. ПОДЧИНИТЬ. *Assujettir une quantité à certaines conditions; подчинить количество нѣкоторымъ условіямъ. Un point matériel assujetti à rester sur une surface donnée; матеріальная точка подчиненная условію оставаться на данной поверхности.* — Assujettir или rendre fixe. Утвердить, сдѣлать неподвижнымъ. *En assujettissant trois points dans un système invariable, sollicité par des forces quelconques, ce système restera en équilibre; если сдѣлаемъ неподвижными три точки въ неизмѣняемой системѣ, побуждаемой какими ни есть силами, то система будетъ находиться въ равновѣсіи.*

ASSURANCES. (Исч. Вѣр.) **ЗАСТРАХОВАНІЕ, СТРАХОВАНІЕ, ОТДАВАНІЕ НА СТРАХЪ.** Смот. ASSURER, AVANTAGE.

Compagnies d'assurances. Страховыя общества. *Assurances maritimes; застрахованіе кораблей. Assurances sur la vie des hommes. Застрахованіе человѣческой жизни. Assurances contre l'incendie. Застрахованіе отъ огня. Assurance contre la grêle. Застрахованіе отъ града.*

Taux de l'assurance или prime. Страховая премія. Проценты платимые Страховому Обществу лицемъ, отдающимъ на страхъ. Страховая премія зависитъ преимущественно отъ вѣроятности, что застраховываемый предметъ можетъ утратиться или подвергнуться поврежденію. Если бы желали сохранить полную справедливость, то надлежало бы установить премію, которая бы равнялась *цѣнѣ* вещи, отдаваемой на страхъ, помноженной на *вѣроятность* ея утраты. Такъ напримѣръ, застраховывая на одинъ годъ домъ, оцѣненный въ 100000 рублей, и предполагая 5 пожаровъ на 1000 домовъ въ теченіи года, застрахователь долженъ заплатить Страховому Обществу $\frac{5}{1000} . 100000$ руб. $=$ 500 рублей; но онъ можетъ заплатить болѣе этой суммы, и сохранить притомъ преимущество со стороны *нравственной выгоды.* Смот. AVANTAGE MORAL. Еслибы Страховое Общество получало только преміи, вычисленныя по приведенному сей-часъ правилу, то оно бы скоро рушилось, ибо не могло бы покрыть издержекъ, сопряженныхъ съ содержаніемъ такого рода заведенія.

ASSURÉ. ЗАСТРАХОВАТЕЛЬ. Тотъ, который отдаетъ на страхъ.

ASSURER. ЗАСТРАХОВАТЬ, ОТДАВАТЬ НА СТРАХЪ. Застраховать предметъ, значитъ заплатить нѣкоторую сумму извѣстному лицу или Обществу, отвѣчающему за цѣлость этого предмета. Отвѣтственность Общества состоитъ въ уплатѣ *застрахователю* условленной суммы въ томъ случаѣ, когда вещь, или подвергнется поврежденію, или утратится. *Assurer une maison, un bâtiment, sa vie; застраховать домъ, судно, свою жизнь.*

ASSURER. (Мех.) **УТВЕРДИТЬ;** сдѣлать неподвижнымъ; то же что ASSUJETTIR во второмъ значеніи.

ASSUREUR. СТРАХОВЩИКЪ; лице, отвѣчающее за цѣлость вещи. — Иные употребляютъ это слово въ смыслѣ *застрахователя (assuré).*

ASSYMPTOTE. Смот. ASYMPTOTE.

ASTATIQUE (AIGUILLE). АСТАТИЧЕСКАЯ ИГЛА. Намагниченная игла, устроенная такимъ образомъ, что земной магнитизмъ не имѣетъ никакого вліянія на ея направленіе. Астатическій приборъ можно получить соединяя посредствомъ металлическаго прута двѣ параллельныя иглы, въ равной степени намагниченныя, которыя должны быть обращены одноименными полюсами въ противныя стороны.

ASTEROIDES. АСТЕРОИДЫ. Такъ назвалъ *Гершель* четыре новыя планеты: *Юнону, Палладу, Весту* и *Цереру*, открытыя *Піаціемъ, Ольберсомъ* и *Гардингомъ.*

ASTRE. СВѢТИЛО. Общее названіе небесныхъ тѣлъ, то есть *неподвижныхъ звѣздъ, планетъ* и *кометъ.*

ASTROGNOSIE. АСТРОГНОЗІЯ; отрасль Астрономіи, занимающаяся ученіемъ о неподвижныхъ звѣздахъ, то есть, ихъ названіемъ, величиною, положеніемъ и проч.

ASTROLABE. АСТРОЛЯБІЯ. Инструментъ для астрономическихъ наблюденій, бывшій въ употребленіи у древнихъ. Впрочемъ, разнаго устройства инструменты носили это названіе. Читатели, желающіе имѣть удовлетворительное понятіе о *Птолемеевой астролябіи* и о другихъ, найдутъ подробныя о нихъ свѣдѣнія въ *Encyclopédie méthodique*, отдѣленіе *Mathématiques*, статья ASTROLABE. — Нынѣ, *астролябіею* называется угломѣрный инструментъ, состоящій изъ мѣднаго полукруга, раздѣленнаго на 180 градусовъ, и, смотря по величинѣ его діаметра, каждый градусъ подраздѣляется еще на дробныя части. Двѣ алидады, снабженныя діоптрами, или иногда зрительными трубками, составляютъ принадлежность инструмента. Одна изъ нихъ, совпадающая съ діаметромъ, на́-глухо прикрѣплена къ полукругу; другая алидада, подвижная, обращается свободно около центра мѣднаго полукруга. Когда алидады направлены на два предмета, то дуга на лимбѣ, заключающаяся между сторонами алидадъ, измѣряетъ угловое разстояніе двухъ предметовъ. При наблюденіи угловъ астролябіею, она кладется на *штативъ* или *треножникъ*, и приводится посредствомъ *бакштаба* или *яблока* въ какое угодно направленіе; слѣдовательно, она можетъ служить для измѣренія угловъ какъ горизонтальныхъ, такъ и вертикальныхъ. Чтобы придать бо́льшую точность астролябіи, подвижную алидаду снабжаютъ обыкновенно *верньеромъ*. Смот. VERNIER. Астролябію довольно часто употребляютъ для съёмки плановъ.

ASTROLOGIE. АСТРОЛОГІЯ, ЗВѢЗДОГАДАНІЕ. Мнимое искусство предсказывать будущее, и въ особенности судьбу человѣка, по теченію небесныхъ свѣтилъ. Астрологія, одно изъ нелѣпыхъ созданій ума человѣческаго, получило свое начало, какъ полагаютъ, въ Халдеѣ, перешла потомъ въ Египетъ, оттуда въ Грецію, и наконецъ къ Римлянамъ. Европейцы заимствовали ее у Арабовъ. Еще въ началѣ прошедшаго столѣтія были люди, которые вѣрили предсказаніямъ *Астрологовъ*, помѣщаемымъ обыкновенно въ календаряхъ. — Наименованіе *Астрологія* употреблялось Греками въ смыслѣ *Астрономіи*.

ASTROLOGUE. АСТРОЛОГЪ, ЗВѢЗДОГАДАТЕЛЬ. Смот. выше. — У Грековъ, астрономы назывались *астрологами*.

ASTRONOMIE. АСТРОНОМІЯ, ЗВѢЗДОУЧЕНІЕ. Отъ греческ. *ἀστήρ, звѣзда* и *νόμος, законъ*; собственно — *Звѣздозаконіе*. Наука занимающаяся законами движенія небесныхъ тѣлъ. По предмету своему, Астрономія составляетъ важнѣйшую отрасль прикладнаго Анализа.

Астрономію обыкновенно раздѣляютъ на три части.

1) *Астрономія сферическая (Astronomie sphérique)* объясняетъ небесныя явленія въ томъ предположеніи, что земля занимаетъ центръ небесной сферы, на внутренней поверхности которой, по видимому, находятся небесныя тѣла. Для объясненія сихъ явленій, преимущественно употребляется сферическая Тригонометрія. И такъ, къ сферической Астрономіи принадлежитъ ученіе о суточномъ движеніи неба, о видимомъ движеніи планетъ, о восхожденіи и захожденіи свѣтилъ, о положеніи ихъ относительно горизонта, экватора и эклиптики, объ истинномъ, среднемъ и звѣздномъ времени, о параллаксѣ, о преломленіи, о предвареніи равноденствій *(précession des équinoxes)*, о колебаніи земной оси *(nutation)*, объ аберраціи *(aberration)* и. т. п.

2) *Астрономія теорическая (Astronomie théorique)* предлагаетъ способы для перехода отъ видимыхъ движеній къ истиннымъ. Ея изслѣдованіямъ подлежитъ: вращеніе земли около оси, а также и обращеніе ея около солнца; эллиптическое движеніе планетъ и кометъ по законамъ Кеплера; относительныя и собственныя величины и разстоянія небесныхъ тѣлъ; превращеніе геоцентрическихъ мѣстъ сихъ послѣднихъ въ геліоцентрическія, и на-оборотъ; опредѣленіе элементовъ планетныхъ и кометныхъ орбитъ, вычисленіе солнечныхъ и лунныхъ затмѣній, закрытій звѣздъ, прохожденій нижнихъ планетъ предъ солнцемъ и т. п.

3) *Астрономія физическая (Astronomie physique)*, подвергая внимательному изслѣдованію законъ всеобщаго тяготѣнія, выводитъ изъ него, какъ необходимое слѣдствіе, наблюдаемыя нами движенія

небесныхъ тѣлъ. Физическая Астрономія есть созданіе 17-го вѣка; собственно говоря, она есть *сводъ* Нютоновыхъ открытій. Смот. ниже *Исторію Астрономіи.* Предметы, разсматриваемые Физическою Астрономіею, суть: законъ всеобщаго тяготѣнія, теорія эллиптическаго движенія, основанная на началахъ Механики; теорія возмущеній небесныхъ тѣлъ; либрація луны; видъ земли; задача о трехъ тѣлахъ; теорія луны и другихъ спутниковъ; теорія предваренія равноденствій и колебаній земной оси; о приливѣ и отливѣ, объ неизмѣнности *(stabilité)* солнечной системы и т. п.

Такое раздѣленіе Астрономіи, сдѣланное *Кеплеромъ,* и послѣ него всѣми принятое, заключаетъ въ себѣ всю теорію сей науки; а приложеніе ея къ наблюденіямъ, къ строенію и повѣркѣ многоразличныхъ снарядовъ, употребляемыхъ астрономами, и къ самымъ вычисленіямъ, составляетъ еще четвертую отрасль, извѣстную подъ названіемъ *Практической Астрономіи (Astronomie pratique),* къ которой можно также отнести собственно *Наблюдательную Астрономію (Astronomie d'observation),* занимающуюся опредѣленіемъ временъ прохожденія небесныхъ свѣтилъ чрезъ извѣстныя мѣста поверхности небесной сферы, также видимыхъ діаметровъ свѣтилъ, а иногда (въ особенности же при наблюденіи кометъ) наружнымъ ихъ видомъ и степенью ихъ освѣщенія.

Многія науки, какъ то: *Математическая Географія, Геодезія, Гномоника, Хронологія* и отчасти *Оптика* основаны на началахъ астрономическихъ.

Astronomie nautique. Мореходная Астрономія, занимающаяся рѣшеніемъ задачъ, необходимыхъ для мореплавателя, какъ то: опредѣленіемъ времени, долготы и широты въ морѣ, курса корабля и проч. *Мопертюи* издалъ подъ симъ заглавіемъ книгу, коей второе изданіе напечатано въ 1751 году.

Astronomie comparée или comparative. Сравнительная Астрономія, занимающаяся разсматриваніемъ тѣхъ явленій, которыя бы представились обитателямъ другихъ планетъ, допуская что сіи послѣднія дѣйствительно обитаемы. *Кеплеръ* занимался подобными изслѣдованіями въ своей *Astronomia lunaris.*

Представляемъ нашимъ читателямъ самое краткое историческое обозрѣніе успѣховъ Астрономіи отъ ея начала до нашихъ временъ. Желающіе ближе ознакомиться съ исторіею сей науки, найдутъ надлежащія подробности въ сочиненіяхъ:

Histoire de l'Astronomie, par Bailly, 1775 — 1782, 4 тома in-4°.

Histoire de l'Astronomie par Delambre: (ancienne 2 тома, *du moyen âge* 1 томъ, *moderne* 2 тома in-4°).

Histoire de l'Astronomie du XVIII siècle par Delambre.

Histoire des Mathématiques, par Montucla; 4 тома in-4°.

Histoire des Mathématiques, par Bossut; 2 т. in-8°

История Астрономіи. Начало Астрономіи, болѣе другихъ наукъ, сокрыто отъ насъ отдаленностію временъ. Іудейскій историкъ *Флавій Іосифъ* относитъ первыя ея начала къ временамъ *Адамовымъ,* и утверждаетъ, что потомки *Сиөа* оказали въ ней значительные успѣхи. Въ Ветхомъ Завѣтѣ находимъ многія мѣста, показывающія, что издревле уже имѣли нѣкоторыя познанія о небесныхъ тѣлахъ; такъ, напримѣръ, въ девятой главѣ книги Іова читаемъ: Творѧй плїа́ды, и҆ є҆спе́ра, и҆ а҆́рктꙋра, и҆ сокрѡ́вища ю҆́жнаѧ. Въ пророчествахъ Исаіа находимъ также мѣста, подтверждающія сказанное нами. Тотъ же историкъ приписываетъ *Авраалу* и *Моисею* свѣдѣнія въ Звѣздознаніи. Не будемъ разбирать, до какой степени можно положиться на свидѣтельство Іосифа относительно знаній въ Астрономіи, пріобрѣтенныхъ Іудейскимъ народомъ; во всякомъ случаѣ, несомнѣнно, что Іудеи могли имѣть свѣдѣнія самыя ограниченныя и несовершенныя. И такъ, перейдемъ къ *Астрономіи Китайцевъ,* которая представляется въ видѣ болѣе удовлетворительномъ. Сей народъ, основываясь на свидѣтельствѣ нѣкоторыхъ своихъ писателей, утверждаетъ, что уже при Императорѣ *Яо,* за 2360 лѣтъ до Р. Х. знали у нихъ движеніе небесныхъ тѣлъ. При томъ же Императорѣ установленъ Гражданскій годъ въ $365\frac{1}{4}$ дней. Учрежденіе знаменитаго *Математическаго Трибунала,* существующаго и теперь въ Китаѣ, относятъ къ временамъ еще отдаленнѣйшимъ, и полагаютъ, что онъ былъ основанъ за 2700 лѣтъ до Р. Х. Императоромъ

Гоанти. Древнѣйшія свѣдѣнія о солнечныхъ затмѣніяхъ, также наблюденія надъ солнцестояніями находимъ у Китайцевъ; но должно замѣтить, что многіе писатели подвергаютъ сомнѣнію подлинность сихъ наблюденій. Собственно говоря, Астрономія у нихъ является въ видѣ науки не прежде 722 года до Р. Х. *Конфуцій*, въ сочиненіи *Чу-Чку*, приводитъ придцать шесть затмѣній, бывшихъ отъ этой эпохи по 480 годъ до Р. Х.; тридцать одно изъ нихъ были повѣрены новѣйшими астрономами. За 66 лѣтъ до Р. Х. *Ліу-Инъ* написалъ цѣлый трактатъ объ Астрономіи, изъ котораго впрочемъ видно, что эта наука была въ то время въ лучшемъ состояніи въ Александріи, нежели въ Китаѣ. Въ 206 году по Р. Х. *Ліу-Гонгъ* и *Цай-Іонгъ* первые упомянули о неравенствахъ луны; они знали, что годъ нѣсколько менѣе 365 дней 6 часовъ. Впрочемъ, какъ Птолемеева Астрономія была извѣстна на Востокѣ, то нельзя не допустить, чтобы она не проникла и въ Китай. Въ XIII столѣтіи Китайцы заимствовали у Монголовъ лучшіе астрономическіе способы Аравитянъ, и ввели въ употребленіе болѣе точные инструменты. Но эти нововведенія не подвинули впередъ ихъ Астрономіи въ теорическомъ отношеніи, а только увеличили итогъ наблюденій. Наконецъ, въ началѣ XVII столѣтія, когда Астрономія была въ большомъ упадкѣ въ Китаѣ, Іезуитскіе Миссіонеры, прибывшіе въ тотъ край, привезли Астрономію Европейцевъ, и она, по повелѣнію Китайскихъ Императоровъ, была введена въ цѣломъ Государствѣ.

Астрономія у Индѣйцевъ. Многіе учёные считаютъ Индію колыбелію всѣхъ наукъ, и преимущественно Астрономіи. Другіе же утверждаютъ, что Аравитяне передали Астрономію Индѣйцамъ около середины IX вѣка по Р. Х. Наконецъ, есть писатели, которые предполагаютъ, что Астрономія получила свое начало въ Индіи въ то время, когда *Пиѳагоръ*, странствуя по сей странѣ, распространилъ въ ней многоразличныя свѣдѣнія, и между прочими начала Звѣздознанія. Индѣйцы умѣли съ большою точностію опредѣлять звѣздное время солнца и луны, имѣли вѣрное понятіе о различіи солнечнаго тропическаго и аномалистическаго года, знали отступленіе точекъ равноденственныхъ, имѣли таблицы планетъ, могли вычислять напередъ лунныя затмѣнія; имъ были также извѣстны уравненіе центра солнечной орбиты и два главныя уравненія луны, также кругъ изъ 19 солнечныхъ годовъ, заключающій 235 лунацій и проч.

Халдеи, по свидѣтельству *Симплисіуса*, философа перипатетика, жившаго въ V вѣкѣ по Р. Х., занимались Астрономіею въ самой глубокой древности, и, во времена Александра Великаго, имѣли длинный рядъ наблюденій, объемлющій 1903 года. Тотъ же философъ приписываетъ имъ изобрѣтеніе различныхъ періодовъ, и между прочими періода изъ $6585\frac{1}{3}$ дней, именуемаго *Саросъ*. Древнѣйшія наблюденія Халдеевъ, о которыхъ упоминается въ Астрономіи, относятся къ 719 и 720 годамъ до Р. Х. Эти наблюденія, употребленныя Птолемеемъ, были произведены надъ тремя лунными затмѣніями.

О состояніи древней *Астрономіи Египтянъ* дошло до насъ весьма мало свѣдѣній. Думаютъ, что эта наука была въ Египтѣ въ хорошемъ состояніи еще за 17 или 18 вѣковъ до Р. Х. Къ сожалѣнію, не осталось никакихъ письменныхъ памятниковъ, которые могли бы передать намъ ихъ наблюденія. Пирамиды свидѣтельствуютъ, что они умѣли съ точностію опредѣлять направленіе полуденной линіи. Нѣкоторые зодіаки, и между прочими *Дендерскій*, привезенный въ наше время во Францію, доказываютъ, что знанія Египтянъ въ Астрономіи были довольно обширны, что они имѣли правильное понятіе о строеніи нашей солнечной системы, и знали предвареніе равноденствій. Древность Дендерскаго зодіака неизвѣстна положительнымъ образомъ; однако же учёные, основываясь на догадкѣ, что зодіакъ представлялъ относительное положеніе свѣтилъ для того времени, когда былъ изваянъ, относятъ его къ XI или XIII вѣку до Р. Х. Должно также замѣтить, что историки единогласно приписываютъ Египтянамъ раздѣленіе года на 12 мѣсяцевъ, изъ коихъ каждый содержалъ въ себѣ 30 дней; впослѣдствіи они же замѣтили, что къ 360 днямъ надлежало прибавить 5 дополнительныхъ дней, и, по истеченіи четырехъ лѣтъ, еще одинъ вставочный день. Раздѣленіе мѣсяца на недѣли принадлежитъ также Египтянамъ. Въ позднѣйшія времена Астрономія пришла у нихъ почти въ совершенный упадокъ.

*

По свидѣтельству нѣкоторыхъ древнихъ писателей, *Персіане* занимались также Астрономіею, и считали время солнечными обращеніями. Можно также полагать съ большимъ правдоподобіемъ, что *Финикіане* имѣли по крайней мѣрѣ нѣкоторыя практическія свѣдѣнія въ этой наукѣ, ибо, какъ извѣстно, они предпринимали дальныя путешествія по Средиземному морю, для чего необходимо было знать теченіе свѣтилъ.

Астрономія Грековъ. Всё показываетъ, что Греки заимствовали свою философію у Африканскихъ и Азіатскихъ народовъ. *Ѳалесъ Милетскій*, который, по возвращеніи изъ Египта, основалъ Іонійскую школу, и первый распространилъ въ Греціи (около 600 лѣтъ до Р. Х.) нѣсколько положительныя свѣдѣнія въ Астрономіи, былъ, какъ многіе утверждаютъ, родомъ изъ Финикіи. Онъ объяснилъ Грекамъ причину неравенства дня и ночи, показалъ имъ способъ предсказывать затмѣнія; опредѣлилъ теченіе солнца отъ одного солнцестоянія до другаго. Онъ также предлагалъ догадки на счётъ круглаго вида земли. Ученикъ его *Анаксимандръ* подтвердилъ теоріи своего наставника о сферическомъ видѣ земли, о заимственномъ свѣтѣ луны отъ солнца и проч. Ему приписываютъ изобрѣтеніе небесныхъ глобусовъ, географическихъ картъ и солнечныхъ часовъ. Преемникомъ Анаксимандра былъ *Анаксименъ*, а послѣ сего послѣдняго, *Анаксагоръ*.

Между тѣмъ какъ сіи философы прославлялись своими трудами въ Греціи, знаменитая школа, основанная въ Италіи *Пиѳагоромъ*, занималась съ большими успѣхами Астрономіею. Пиѳагоръ, родившійся въ Самосѣ около 540 лѣтъ до Р. Х., былъ ученикъ Ѳалеса. При содѣйствіи учениковъ своей школы, Пиѳагоръ доказалъ очевиднымъ образомъ круглый видъ земли. Ему же приписываютъ первую мысль о неподвижности солнца, и о движеніи земли и планетъ около сего свѣтила. Думаютъ, что опасаясь сдѣлаться посмѣшищемъ своихъ современниковъ, а можетъ быть даже подвергнуться преслѣдованіямъ соотечественниковъ обнаруживъ мысль, совершенно противорѣчащую тогдашнимъ понятіямъ, онъ сообщилъ ее за тайну только своимъ ученикамъ. Мы не можемъ входить ни въ какія подробности относительно другихъ Греческихъ астрономовъ; ограничимся поименованіемъ самыхъ примѣчательныхъ: *Демокритъ*, *Филолай изъ Кротонны*, *Метонъ* (433 г. до Р. Х.) изобрѣтатель такъ названнаго *золотаго числа*, *Евктемонъ*, *Евдокій* (род. за 421 г. до Р. Х.), *Каллипъ* (358 л. до Р. Х.), *Платонъ*, *Аристотель*, *Аристархъ* (281 г. до Р. Х.), *Эратосѳенъ*, *Гиппархъ* (240 л. до Р. Х.), знаменитѣйшій астрономъ въ древности, прославившійся открытіями: предваренія равноденствій, эксцентрицитета эклиптики и лунной орбиты и проч.; *Позидоніусъ* (80 л. до Р. Х.), *Агриппа*, *Созигенъ*, извѣстный исправленіемъ Римскаго календаря, и наконецъ *Птолемей* (140 л. по Р. Х.).

Астрономія начинала приходить въ упадокъ въ Александрійской школѣ, когда Птолемей, собравъ всё извѣстное до него, привелъ сію науку въ систематическій видъ, и обогатилъ ее новыми трудами. И теперь еще упоминаютъ о *Птолемеевой системѣ*, которая, хотя и согласуется съ видимыми явленіями, но во всѣ времена подвергалась сильнымъ возраженіямъ, и наконецъ разрушена въ основаніи знаменитымъ *Коперникомъ*; Смот. PTOLÉMÉE (SYSTÊME DE). Птолемей снискалъ себѣ славу преимущественно сочиненіемъ своимъ Альмагестъ (См. ALMAGESTE), которое заключаетъ въ себѣ множество наблюденій и теорій прежнихъ астрономовъ, и обогащено собственными его трудами. Онъ также писалъ объ Тригонометріи, и о рѣшеніи сферическихъ треугольниковъ, чѣмъ оказалъ неоспоримую услугу Астрономіи. Птолемей усовершенствовалъ теорію луны и солнца, также теорію планетъ, для которыхъ онъ составилъ таблицы, заключающія въ себѣ ихъ движенія, разстоянія отъ земли и проч. Птолемей написалъ также *Географію* и еще нѣкоторые трактаты, менѣе важные.

Послѣ Птолемея, Астрономія у Грековъ начала приходить въ упадокъ. Хотя въ Александрійской школѣ продолжали заниматься науками, но не прибавили къ нимъ никакого, сколько нибудь примѣчательнаго открытія. Между многими забытыми толкователями Гиппарха и Птолемея, можно отличить только одного, философа *Ѳеона* (400 л. по Р. Х.), который оставилъ учёные комментаріи на первыя одиннадцать книгъ Альмагеста.

У *Римлянъ*, Астрономія, какъ и другія науки, была въ большомъ пренебреженіи. Когда Іюлій

Цесарь предпринялъ исправить Римскій календарь, то, на сей конецъ, принужденъ былъ вызвать изъ Александріи Греческаго астронома *Созигена.* Мы находимъ у нихъ одного только астронома, *Менелая,* жившаго въ царствованіи Траяна (98 л. по Р. Х.). Онъ опредѣлилъ долготу нѣкоторыхъ звѣздъ посредствомъ соединеній ихъ съ луною. Объ немъ упоминаетъ Птолемей въ своемъ Альмагестѣ.

Нельзя опредѣлить положительнымъ образомъ времени, въ которое Астрономія погасла въ Греціи. Можно только предполагать съ большою вѣроятностію, что вообще науки изчезли послѣ того, какъ Аравитяне сожгли знаменитую Александрійскую библіотеку, что̀ случилось въ 641 году, въ царствованіи *Омара,* втораго Халифа. Протекло болѣе столѣтія, и Аравитяне, занятые войнами и усмиреніемъ бунтовъ, не имѣли досуга заниматься науками. Напослѣдокъ, съ водвореніемъ тишины, они обратились къ занятіямъ умственнымъ. Астрономія была у нихъ любимою наукою; они обогатили ее примѣчательными открытіями. Халифы ихъ постоянно покровительствовали наукамъ, и даже многіе изъ нихъ были сами отличные астрономы. Изъ числа послѣднихъ назовемъ *Альмансура,* вступившаго на престолъ въ 754 году по Р. Х. *Аль-Рашида* (786) и *Аль-Мамуна* (813); по повелѣнію сего послѣдняго были переведены съ Греческаго на Арабскій языкъ многія книги, и между прочими *Птолемеевъ Альмагестъ.* Въ IX столѣтіи особенно примѣчательны астрономы: *Альфраганусъ* (850), *Табетъ-бекъ-Корра* (860) и *Альбатеніусъ* (879). Первый изъ нихъ написалъ трактаты объ Астрономіи, о солнечныхъ часахъ и объ астролябіи; онъ также славился особеннымъ искусствомъ вычислять, почему и былъ прозванъ *Счётчикомъ.* Табетъ-бекъ-Корра наблюдалъ наклонность эклиптики, и нашелъ $23°33'30''$; онъ опредѣлилъ также звѣздный годъ, и найденное имъ время почти не разнится отъ найденнаго новѣйшими астрономами. Альбатеніусъ произвелъ множество наблюденій въ Антіохіи и Арактѣ. Онъ опредѣлилъ съ большою точностію эксцентрицитетъ солнечной орбиты, также величину тропическаго солнечнаго года, и составилъ новыя таблицы планетъ, которыя принесли существенную пользу многимъ астрономамъ. Кромѣ поименованныхъ астрономовъ, находимъ у Аравитянъ множество другихъ, обогатившихъ науку своими трудами; между ними особенно примѣчательны: *Абуль-Вефа* (987), *Ибнъ-Юнисъ* (1004), *Арсашель* (1020), *Альхазенъ, Джеберъ, Альманзоръ* или *Альмеонъ, Абуль-Хасанъ* (около 1200 года) и многіе другіе. Чтобы удостовѣриться въ степени вліянія Астрономіи Аравитянъ на нашу, стоитъ только принять въ соображеніе то обстоятельство, что многія наименованія, употребляемыя донынѣ у насъ, заимствованы изъ Астрономіи Аравитянъ; таковы напримѣръ: *зенитъ, надиръ, азимутъ, алидада, альдебаранъ* и проч.

Число инструментовъ, бывшихъ въ употребленіи у древнихъ астрономовъ, весьма ограниченно. Для измѣренія времени они употребляли *водяные часы* (Смот. CLÉPSYDRE), *гномоны* (См. GNOMON) и *солнечные часы* (Смот. CADRAN). Угловыя разстоянія они измѣряли посредствомъ *астролябіи, армиллярной сферы Эратосвена, Птолемеевыхъ параллактическихъ линеекъ; Аристарховъ циркуль* служилъ имъ для измѣренія видимыхъ діаметровъ луны и солнца. Краткое описаніе сихъ инструментовъ, весьма несовершенныхъ въ сравненіи съ нашими, читатели найдутъ въ *Histoire des Mathématiques par Bossut.*

Отъ 800 года до 13-го столѣтія Европа была погружена въ глубокое невѣжество, и въ этотъ промежутокъ времени одни Аравитяне продолжали упражняться въ наукахъ. *Императоръ Фридрихъ II* вызвалъ такъ сказать науки изъ забвенія, объявивъ себя ихъ покровителемъ. Онъ возстановилъ Университетъ въ Неаполѣ, и учредилъ новый въ Вѣнѣ въ 1230 году; по его повелѣнію были переведены съ Арабскаго языка многія медицинскія и философскія книги, а также Птолемеевъ *Альмагестъ.* Эту эпоху можно считать эпохою возрожденія Астрономіи въ Европѣ.

Сакро-Боско, умершій въ 1256 году, первый стяжалъ себѣ извѣстность въ Астрономіи. По повелѣнію *Альфонса X,* Короля Кастильскаго, прозваннаго *Мудрымъ,* были составлены въ 1252 году астрономическія таблицы, названныя *Альфонсовыми (Tables Alphonsines).*

Въ XV столѣтіи трудились для Астрономіи *Пурбахіусъ, Регіомонтанусъ* отличнѣйшій наблюдатель и *Вальтерусъ* его ученикъ.

XVI столѣтіе ознаменовано въ лѣтописяхъ Астрономіи открытіемъ истинной солнечной системы *Коперникомъ* См. COPERNIC (SYSTÊME DE), издавшемъ о семъ предметѣ трудъ подъ заглавіемъ: *De revolutionibus orbium cœlestium*, оконченный имъ въ 1543 году. Въ томъ же столѣтіи отличились астрономы: *Петръ Апіанъ*, *Рейнгольдъ*, *Оронсъ Фине*, *Гемма Фризій*, *Петръ Карданъ*, *Ретикусъ*, *Ноній* и многіе другіе. Въ XVI же вѣкѣ *Вильгельмъ IV*, Ландграфъ Гессенъ-Кассельскій, своимъ покровительствомъ и собственными трудами много содѣйствовалъ обогащенію Астрономіи. Онъ присоединилъ къ своимъ трудамъ *Ротмана* и *Биргіуса*, изъ которыхъ первый былъ отличный астрономъ, а второй, искуснѣйшій механикъ своего времени. Наконецъ, является въ концѣ этого же столѣтія знаменитый *Тихо-Брагъ* (умершій въ 1603 году), первѣйшій изъ всѣхъ бывшихъ наблюдателей. Точностію и многочисленностію своихъ наблюденій онъ открылъ новое поле Астрономіи, и пріуготовилъ важное открытіе законовъ эллиптическаго движенія, приведшихъ впослѣдствіи Нютона къ закону всеобщаго тяготѣнія. Исправленіе Іуліанскаго календаря Папою *Григоріемъ XIII*, было произведено также въ XVI столѣтіи, именно въ 1582 году.

XVII столѣтіе предъ всѣми отличается своими открытіями въ Астрономіи. Первая его половина ознаменована трудами *Кеплера* (родивш. въ 1571, а умерш. въ 1631 г.), который открылъ истинные законы движенія планетъ, чѣмъ самымъ пріобрѣлъ себѣ славу первѣйшаго астронома. См. KEPLER (LOIS DE). Въ первой же половинѣ XVII вѣка отличились полезными трудами для Астрономіи: *Байеръ*, Іезуитъ *Клавій*, *Николай Мюллеръ*, *Неперъ* изобрѣтатель логариѳмовъ, *Генрихъ Бриггъ*, *Юстусъ Биргіусъ*, *Эйхстадіусъ*, *Крабтрей (Crabtrée)* и многіе другіе. *Галилей*, родившійся во Флоренціи 1564 года, пріобрѣлъ знаменитость открытіемъ Юпитеровыхъ спутниковъ, закона тяжести, либраціи луны и солнечныхъ пятенъ. — Приведемъ еще нѣкоторыя открытія и наблюденія, ознаменовавшія XVII столѣтіе: теорія маятника и приспособленіе его къ часамъ — *Гугенсомъ;* случайное изобрѣтеніе зрительныхъ трубъ Голландскимъ шлифовальщикомъ, усовершенствованныхъ впослѣдствіи *Галилеемъ*, *Кеплеромъ*, *Григоріемъ* и *Нютономъ;* открытіе законовъ преломленія лучей *Снелліемъ;* первое наблюденіе прохожденія Меркурія и Венеры предъ солнцемъ — *Гассендіемъ* и *Горрокомъ;* открытіе кольца и Сатурновыхъ спутниковъ — *Гугенсомъ* и *Кассиніемъ;* первое наблюденіе затмѣній Юпитеровыхъ спутниковъ; вращеніе планетъ около ихъ осей; открытіе уменьшенія тяжести по мѣрѣ приближенія къ экватору — *Ришеромъ;* открытіе движенія лучей и ихъ скорости — *Рёмеромъ;* предпріятіе *Небесной Исторіи* (*historia cœlestis*, 3 тома in-folio, 1725) — *Фламстедомъ*, однимъ изъ знаменитѣйшихъ астрономовъ — наблюдателей. Этотъ трудъ заключаетъ въ себѣ огромный итогъ 33 лѣтъ наблюденій съ присовокупленіемъ каталога около трехъ тысячъ звѣздъ. Фламстедъ родился 1646 года, а умеръ въ 1719 г.

Конецъ XVII вѣка останется навсегда незабвеннымъ по открытію общаго начала небесныхъ движеній. *Нютону*, сему глубокому, единственному генію, суждено было обогатить сокровищницу знаній человѣческихъ великимъ закономъ *всеобщаго тяготѣнія*. Безсмертный трудъ его: *Philosophiæ naturalis principia mathematica* содержитъ въ себѣ доказательство сего начала и слѣдствія, проистекающія изъ него. Смот. ATTRACTION NEUTONIENNE, KEPLER (LOIS DE). Первую мысль объ всеобщемъ тяготѣніи, по свидѣтельству *Пембертона*, Нютонъ возъимѣлъ еще въ 1666 году; нѣсколько лѣтъ послѣ, онъ подвергъ ее глубокимъ изслѣдованіямъ, по поводу которыхъ предпринялъ трудъ: *Philosophiæ* и проч., изданный въ первый разъ 1687 года. См. PRINCIPIA (PHILOSOPHIAE NATURALIS — MATHEMATICA).

Въ этомъ же столѣтіи примѣчательны: *Гассенди*, *Декартъ*, *Торричелли*, *Риччіоли*, *Озутъ (Auzout)*, *Робервалъ*, *Пасхаль*, *Пикардъ*, *Кассини*, *Гугенсъ*, *Роокъ*, *Гоокъ*, *Вренъ*, *Вардъ* и множество другихъ.

Въ первой половинѣ XVIII столѣтія особенно споспѣшествовали успѣхамъ Астрономіи: *Галлей*, предложившій употребленіе прохожденія Венеры предъ солнцемъ, для опредѣленія параллаксовъ планетъ; онъ также извѣстенъ открытіемъ періодической кометы, названной его именемъ; *Брадлей*, *Ла-Каль* (*La Caille*), *Іосифъ Николай де Лиль*, *Товій Байеръ* и другіе. Примѣчательнѣйшія открытія и обогащенія Астрономіи въ XVIII вѣкѣ суть: изобрѣтеніе ахроматическихъ діоптрическихъ трубъ — *Эйлеромъ* (См. ACHROMATIQUE);

улучшеніе зеркальныхъ телескоповъ — *Шортомъ* и *Гершелемъ;* усовершенствованіе пружинныхъ часовъ, или, собственно, изобрѣтеніе *хронометровъ* — Англійскимъ художникомъ *Гаррисономъ;* изобрѣтеніе зеркальнаго октана — *Гадлеемъ*, а по мнѣнію нѣкоторыхъ — *Гукомъ* и *Нютономъ*; открытіе аберраціи и колебанія земной оси (нутаціи) — *Брадлеемъ*; движеніе солнечной системы въ пространствѣ; опредѣленіе параллакса солнца по прохожденію Венеры предъ симъ свѣтиломъ; открытіе Урана и наблюденіе многихъ тысячъ туманныхъ пятенъ или звѣздъ — *Гершелемъ*. Поименуемъ только нѣкоторыхъ аналистовъ и наблюдателей, обогатившихъ въ XVIII столѣтіи итогъ астрономическихъ знаній: *Иванъ Бернулли*, *Доминикъ* и *Яковъ Кассини*, *Тайлоръ*, *Маклоренъ*, *Крамеръ*, *Даніилъ Бернулли*, *Рёмеръ*, *д'Аламбертъ*, *Бальи*, *Деламбръ*, *Мехенъ* (*Mechain*), *Босковичъ*, *Кондорсетъ*, *Маскелинъ*, *Борда*, *Цахъ*, *Гершель*, *Лаландъ*, *Эйлеръ*, *Лагранжъ*, *Лапласъ*, *Лежандръ* и многіе другіе.

Въ началѣ XIX столѣтія открыты четыре новыя планеты: Церера *Піацціемъ* (1801 года), Паллада и Веста *Ольберсомъ* (первая 1802, а вторая 1807 г.) и Юнона *Гардингомъ* (1804 года). Списки двойныхъ звѣздъ, надъ составленіемъ которыхъ трудятся, на Мысѣ Доброй Надежды — *Джонъ Гершель*, а въ Дерптѣ — нашъ Астрономъ Академикъ *Струве*, обѣщаютъ обильную жатву для новѣйшей Астрономіи. Мы умалчиваемъ о трудахъ геометровъ и астрономовъ настоящаго столѣтія: одно поименованіе ихъ открытій и усовершенствованій далеко бы перешло предѣлы нашего Лексикона.

Книги по Астрономіи:

Нютона: Philosophiae naturalis principia mathematica.

Лапласа: Mécanique céleste (5 том.) и Exposition du système du monde.

Лагранжа: Mécanique analytique (2 тома).

Ла Ланда: Astronomie (3 тома).

Біота: Traité élémentaire d'Astronomie (3 тома).

Деламбра: Astronomie théorique et pratique (3 т.).

Шуберта: Traité d'Astronomie théorique (3 тома).

Брандта: Vorlesungen über die Astronomie.

Литрова: Theoretische und practische Astronomie (3 тома) и Vorlesungen über Astronomie (2 тома).

На Русскомъ языкѣ:

Сокращеніе Астрономіи или Звѣздозаконія Г. де ла Ланда, перев. *Мих. Головина;* 1789 года.

Теорія и практика кораблевожденія, 2 и 3 томъ. Соч. *Плат. Гамалѣя*, 1-е изд. 1808 года.

Руководство къ Астрономіи, соч. *Перевощикова*, 2-е изд. 1831 г.

Руководство къ умозрительной Астрономіи, соч. *Симонова*, 1832 г.

Астрономическія лекціи Литрова, перев. Экстр. Акад. *Тарханова;* 2 тома, 1835—1837 г.

ASTRONOMIQUE. АСТРОНОМИЧЕСКІЙ, принадлежащій Астрономіи или относящійся къ сей наукѣ. *Calendrier, année astronomique; календарь, годъ астрономическій. Observations, tables astronomiques; астрономическія наблюденія, таблицы.*

Astronomiques (fractions). Шестидесятичныя дроби, которыя нѣкоторыми писателями названы *астрономическими*, по причинѣ частаго ихъ употребленія въ Астрономіи. Смот. SEXAGÉSIMAL.

ASYMÉTRIE. НЕСОРАЗМѢРНОСТЬ, НЕСХОДСТВО, АСИМЕТРІЯ. Слово противуполагаемое *симетріи*. См. SYMÉTRIE. — Иногда подъ *асиметріею* разумѣютъ въ математикѣ *несоизмѣримость, ирраціональчость*. Смот. IRRATIONNEL.

ASYMPTOTE. (Геом.) **АССИМПТОТА.** Отъ греческ. *α, не, ξυν, съ* и *πίπτω, падаю;* собственно: *несовпадающая*. Ассимптота есть такая линія, которая бывъ продолжена неопредѣленно, приближается къ кривой линіи, или къ нѣкоторой ея части такъ, что разстояніе между обѣими линіями дѣлается наконецъ менѣе всякой данной величины, хотя оно и не можетъ быть совершенно уничтожено. Замѣтимъ, что линія, параллельная ассимптотѣ, хотя и приближается непрестанно къ кривой, однако же не можетъ быть названа *ассимптотою*, ибо разстояніе ея отъ кривой не можетъ быть уменьшено по произволенію.

Ассимптоты бываютъ *прямолинейныя* и *криволинейныя*; но, большею частію, прямолинейной присвоивается наименованіе *ассимптоты*; криволинейную же преимущественно называютъ *ассимптотическою кривою*.

Чертежи 7 и 17 (листъ I) представляютъ примѣры ассимптотъ. На чертежѣ 7 линіи AF и AG изображаютъ ассимптоты частей CB и CED пересѣчной иперболы. *Змѣевидная ипербола* (черт. 17) имѣетъ ассимптотою линію AC.

Черченіе *конхоиды* по точкамъ, весьма удовлетворительнымъ образомъ раскрываетъ свойство ассимптотъ, по которому онѣ, приближаясь неопредѣленно къ кривой линіи, никогда не достигаютъ сей послѣдней. Смот. CONCHOIDE.

Прямолинейную ассимптоту можно также назвать *касательною къ кривой, въ точкѣ безконечно удаленной отъ начала координатъ.* Основываясь на этомъ опредѣленіи, весьма легко найти уравненія ассимптотъ данной кривой. Дѣйствительно, пусть $y=f(x)$ уравненіе кривой линіи; уравненіе ея касательной въ точкѣ, опредѣляемой координатами x и y, будетъ

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x) \text{ или } Y=\frac{dy}{dx}X+y-x\frac{dy}{dx}.$$

Чтобы отъ касательной перейти къ ассимптотѣ, стоитъ только сдѣлать одно изъ слѣдующихъ трехъ предположеній: 1) x и $y=\pm\infty$; 2) $x=\pm\infty$, а $y=$ *конечному числу;* 3) $y=\pm\infty$, а $x=$ *конечному числу;* сими предположеніями выражаемъ, что точка касанія находится на безконечномъ разстояніи отъ начала координатъ.

Напримѣръ, для иперболы, опредѣляемой уравненіемъ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, находимъ

$$Y=\pm\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\cdot X\mp\frac{ab}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Полагая $x=\infty$, найдется

$$\pm\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\pm\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}=\pm\frac{b}{a} \text{ и}$$

$$\mp\frac{ab}{\sqrt{x^2-a^2}}=0;$$

слѣдовательно, уравненіе ассимптоты разсматриваемой нами иперболы, будетъ

$$Y=\pm\frac{b}{a}X,$$

или, что всё равно,

$$Y=+\frac{b}{a}X \text{ и } Y=-\frac{b}{a}X;$$

эти уравненія показываютъ, что ипербола имѣетъ *двѣ* ассимптоты.

Можно также опредѣлять ассимптоты слѣдующимъ образомъ:

Пусть будетъ

$$Y=AX+B$$

уравненіе ассимптоты непараллельной оси y. Ордината y кривой, соотвѣтствующая абсциссѣ x, для весьма большихъ величинъ сей абсциссы, будетъ весьма мало разниться отъ ординаты Y ассимптоты, такъ что можно принять

$$y=Ax+B\pm\varepsilon;$$

разумѣя подъ ε количество, уничтожающееся вмѣстѣ съ $\frac{1}{x}$. И такъ, полагая $x=\infty$, найдемъ

$$\text{пред.}\left(\frac{y}{x}\right)=\text{пред.}\left\{A+\frac{B\pm\varepsilon}{x}\right\}=A;$$

$$\text{пред.}\,(y-Ax)=\text{пред.}\,(B\pm\varepsilon)=B.$$

Слѣдовательно, для опредѣленія постояннаго количества A, стоитъ только въ уравненіи кривой положить $\frac{y}{x}=s$ или $y=sx$, и сыскать предѣлъ, къ которому стремится s для безконечно большихъ значеній x.

Величина B опредѣлится, когда въ уравненіи кривой, примемъ $y-Ax=t$ или $y=Ax+t$.

Перемѣнивъ x на y, и на-оборотъ, и разсуждая точно такимъ образомъ какъ выше, найдутся ассимптоты непараллельныя оси x.

Напримѣръ, уравненіе разсмотрѣнной нами иперболы, чрезъ подстановленіе sx на мѣсто y, доставляетъ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{s^2x^2}{b^2}=1, \text{ или } s^2=\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^2}{x^2};$$

полагая $x=\infty$, найдемъ

$$s^2=\frac{b^2}{a^2} \text{ или } s=\pm\frac{b}{a}=A.$$

Полагая, въ томъ же уравненіи, $y=Ax+t=\pm\frac{b}{a}x+t$, получимъ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{\left(\pm\frac{b}{a}x+t\right)^2}{b^2}=1 \text{ или } t=\pm\frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right);$$

полагая $x=\infty$, найдемъ

$$t=0=B.$$

Слѣдовательно, уравненіе ассимптоты предложенной иперболы будетъ, какъ и выше, $Y=\pm\frac{b}{a}X$.

Для упражненія, предлагаемъ нѣсколько уравненій кривыхъ, имѣющихъ ассимптоты:

$$x^3+y^3=3axy$$

$$y^2(x^2+y^2)=r^4$$

$$y^2=Cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x^3+y^3+Sin\left(\frac{y}{x}\right)=0$$

$$y=\log x.$$

Смот. также CISSOIDE, LOGARITHMIQUE, CIRCONSCRITE (HYPERBOLE), FOLIUM DE DECARTES и проч.

Примѣръ *ассимптотической кривой*, усматриваемъ въ кривой третьяго порядка, опредѣляемой уравненіемъ

$$y = x^2 + \frac{1}{x}.$$

Очевидно, что по мѣрѣ увеличенія абсциссы x въ положительную или отрицательную сторону, членъ $\frac{1}{x}$ будетъ неопредѣленно уменьшаться, а x^2 увеличиваться, такъ что ордината y будетъ приближаться болѣе и болѣе къ значенію x^2, котораго никогда не достигнетъ; и такъ, разсматриваемая нами кривая имѣетъ ассимптотою *параболу*, опредѣляемую уравненіемъ $y = x^2$. Для весьма малыхъ положительныхъ или отрицательныхъ значеній абсциссы x случится противное: численная величина дроби $\frac{1}{x}$ неопредѣленно возрастаетъ, а x^2, напротивъ того, уменьшается, такъ что ордината y будетъ стремиться къ равенству съ $\frac{1}{x}$; слѣдовательно, *равносторонняя иперболa*, отнесенная къ своимъ ассимптотамъ, будетъ также ассимптотою предложенной кривой. На чертежѣ 22 (листъ 1) предложенная кривая означена буквами a, b, a', b'; парабола, буквою p, а ипербола, буквою q. Парабола служитъ ассимптотою вѣтвямъ $a, a, a \ldots$ и $a', a', a' \ldots$, а ипербола вѣтвямъ $b, b, b \ldots$ и $b', b', b' \ldots$ Сверхъ того, кривая имѣетъ прямолинейную ассимптоту, именно ось YY'.

Легко распространить сказанное нами, на опредѣленіе ассимптотическихъ кривыхъ вообще. Во всякомъ случаѣ такое разысканіе приводится къ нахожденію наибольшихъ членовъ въ предложенномъ уравненіи. —

Нѣкоторыя поверхности имѣютъ свои *ассимптотическія поверхности*. Уравненія сихъ послѣднихъ бываютъ проще первыхъ.

Напримѣръ, *иперболоидъ съ одною полою*, опредѣляемый уравненіемъ

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

имѣетъ ассимптотою *коническую поверхность*, коей уравненіе есть

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 0.$$

Дѣйствительно, если изъ урав. (2) выведемъ z', а изъ (1) величину z, и опредѣлимъ ихъ разность, то найдемъ

$$z' - z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} - c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1}$$

$$= c\left\{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}} + \text{и пр.}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{c}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}} + \text{и проч.}$$

Но эта разность неопредѣленно уменьшается съ увеличеніемъ перемѣнныхъ x и y; слѣдовательно, разсматриваемыя двѣ поверхности сближаются болѣе и болѣе по мѣрѣ ихъ удаленія отъ начала координатъ; откуда можемъ заключить, что коническая поверхность будетъ ассимптотою иперболоида съ одною полою.

Кривыя поверхности имѣютъ иногда прямолинейныя и криволинейныя ассимптоты, а также и *ассимптотическія плоскости*.

Point asymptotique. Ассимптотическою точкою называется такая точка, около которой кривая обращается, и, неопредѣленно приближаясь къ ней, никогда ее не достигаетъ. Для примѣровъ ассимптотическихъ точекъ См. LOXODROMIE, SPIRALE LOGARITHMIQUE.

ASYMPTOTIQUE. АССИМПТОТИЧЕСКІЙ, относящійся къ ассимптотѣ. *Espace asymptotique, ассимптотическая площадь, пространство.* Площадь заключающаяся между кривою линіею и ея ассимптотою. Сія площадь бываетъ иногда конечною, иногда же безконечною. *Courbe, surface, plan, point asymptotique.* Смот. выше.

AT.

ATHOODE (MACHINE D'). Смот. ATWOOD.

ATMOSPHÈRE. (Физ.) **АТМОСФЕРА.** Земля, другія планеты и солнце окружены жидкостію тонкою, прозрачною и упругою, которую называютъ ихъ *атмосферою*. Но не должно полагать чтобы одна и та же жидкость окружала сказанныя тѣла: каждая планета, равно и солнце, имѣетъ свою особенную атмосферу, которая простирается на разстоянія, болѣе или менѣе значительныя отъ поверхности сихъ тѣлъ. Нѣтъ сомнѣнія, что должно быть такое разстояніе отъ поверхности, на которомъ присутствіе атмосферы дѣлается почти неощутительнымъ; но трудно опредѣлить его съ точностію.

Вѣсъ атмосферическаго столба отъ земной поверхности до предѣловъ атмосферы измѣряется вѣсомъ ртутнаго столбца въ барометрѣ; но подобное измѣреніе, по причинѣ измѣняющейся плотности воздуха по мѣрѣ того какъ подымаемся на различныя высоты, не можетъ служить пособіемъ для опредѣленія предѣловъ земной атмосферы.

Наша атмосфера подвержена движеніямъ, болѣе или менѣе значительнымъ, которыя называются *вѣтрами*. Причины такихъ движеній бо́льшею частію случайныя; но въ числѣ ихъ есть также и постоянныя, именно, вращательное движеніе земли и теплота солнца. Отъ сихъ двухъ причинъ происходятъ атмосферическія теченія, наблюдаемыя подъ тропиками, и которыя извѣстны подъ наименованіемъ *пассатныхъ вѣтровъ* (*vents alisés*). Опредѣленіе сихъ періодическихъ теченій превышаетъ силу настоящаго анализа. Что касается до *воздушныхъ явленій*, видимыхъ иногда въ атмосферѣ, то подробности о семъ предметѣ не могутъ войти въ составъ нашего Лексикона.

Относительно равновѣсія атмосферы, Смот. BAROMÉTRIQUE (FORMULE).

ATMOSPHÉRIQUE. АТМОСФЕРИЧЕСКІЙ, АТМОСФЕРНЫЙ, ВОЗДУШНЫЙ. *Pression atmosphérique, атмосферическое давленіе.*

ATOME. (Физ.) **АТОМЪ.** Мельчайшая недѣлимая частица вещества.

SYSTÊME ATOMISTIQUE. Атомистическая система. Послѣдователи этой системы допускають, что вещество составлено изъ весьма малыхъ *частицъ* (*molécules*), отстоящихъ однѣ отъ другихъ въ нѣкоторыхъ разстояніяхъ. Сіи частицы и взаимныя ихъ разстоянія полагаются столь малыми, что въ самомъ незначительномъ объёмѣ можетъ помѣститься весьма большое число подобныхъ частицъ. Сверхъ того, каждая частица, несмотря на свою малость, состоитъ еще изъ отдѣльныхъ частей, которыя называются *атомами*. Атомы одной и той же частицы, содержимы между собою на разстояніяхъ притягательными и отталкивающими взаимодѣйствіями; такая же связь существуетъ и между частицами вещества. Въ естественномъ состояніи тѣла, равнодѣйствующая всѣхъ силъ, которымъ подверженъ каждый атомъ, равна нулю; но какъ скоро какая либо посторонняя сила начнетъ давить тѣло, то нѣкоторыя его части сжимаются, и отсюда происходятъ измѣненія во взаимныхъ разстояніяхъ частицъ. Отъ сей перемѣны въ разстояніяхъ, самыя притягательныя и отталкивающія силы подвергнутся измѣненіямъ, воспрепятствуютъ дальнѣйшему сжатію тѣла; ибо, какъ бы велика ни была сила давленія, приложенная къ его поверхности, частицы или атомы ни въ какомъ случаѣ не могутъ придти въ соприкосновенность между собой по той причинѣ, что отталкивающая сила весьма быстро увеличивается съ уменьшеніемъ ихъ разстояній.

Какъ притягательныя такъ и отталкивающія силы увеличиваются по мѣрѣ уменьшенія разстоянія; но отталкивающія быстрѣе первыхъ. Тѣ и другія, при чувствительномъ разстояніи, дѣлаются обратно пропорціональными квадрату разстояній. Смот. MOLÉCULE.

Частицы и атомы тѣлъ своимъ сотрясеніемъ производятъ звукъ, теплоту и свѣтъ. Если только однѣ частицы приведены въ сотрясательное движеніе, то происходитъ *звукъ*; Смот. ACOUSTIQUE. При совокупныхъ сотрясеніяхъ частицъ и атомовъ, обнаруживается *свѣтъ* и *теплота*. Смот. LUMIÈRE, CHALEUR. *Частичныя* сотрясенія передаются нашему слуху атмосферическимъ воздухомъ; *атомическія* же дѣйствуютъ на наши чувства чрезъ посредство эѳира. Смот. ÉTHER. Эѳиръ есть единственное вещество, состоящее изъ однихъ только атомовъ. Впрочемъ, почти всегда сотрясенія частицъ и атомовъ происходятъ вмѣстѣ, почему звукъ бываетъ всегда сопровождаемъ бо́льшимъ или ме́ньшимъ освобожденіемъ тепла.

ATTIRER. (Мех.) **ПРИТЯГИВАТЬ.** См. ATTRACTION. *Corps attiré vers deux centres fixes; тѣло притягиваемое къ двумъ неподвижнымъ центрамъ.* Смот. CENTRALES (FORCES).

ATTOUCHEMENT. (Геом.) **СОПРИКАСАНІЕ, КАСАНІЕ.** *Point d'attouchement, точка соприкасанія*, въ которой кривая линія касается прямой, или другой кривой линіи. Смот. CONTACT.

ATTRACTIF. (Мех.) **ПРИТЯГАТЕЛЬНЫЙ,** имѣющій свойство притягивать. *Force attractive, pouvoir attractif, притягательная сила.*

ATTRACTION. (Mex.) **ПРИТЯЖЕНІЕ.** Стремленіе замѣчаемое въ тѣлахъ, или въ вещественныхъ частицахъ, къ взаимному ихъ приближенію. Притяженіе должно быть измѣриваемо степенью приближенія взаимно-притягивающихся тѣлъ, а также ихъ массами. *Нютонъ,* основываясь на этомъ, вывелъ законы *всеобщаго тяготѣнія.* Что касается до причины притяженія, то философы не согласны между собою въ этомъ отношеніи. Хотя Нютонъ не объявилъ положительнымъ образомъ своего мнѣнія по сему предмету, однако же нѣкоторые ученики его, принимали притяженіе за свойство вещества. И такъ, по ихъ воззрѣнію, вещественная частица, по существу своему, одарена свойствомъ притягивать другія частицы. Послѣдователей этого мнѣнія называютъ *аттракціонерами (attractionnaires).* Но, по мнѣнію наиболѣе утвердившемуся, взаимное стремленіе тѣлъ приближаться одни къ другимъ, приписываютъ нѣкоторой рѣдчайшей жидкости, напримѣръ эфиру, наполняющему вселенную. Конечно, мы не можемъ объяснить, какимъ образомъ чрезъ посредство этой жидкости проявляется тяготѣніе одного тѣла къ другому; но, съ другой стороны, еще труднѣе вообразить, чтобы два тѣла, между которыми нѣтъ никакого посредства, могли притягивать другъ друга. По чему одно изъ этихъ тѣлъ *признáетъ* присутствіе другаго? И такъ, хотя въ настоящемъ состояніи нашихъ знаній, намъ и невозможно объяснить, какимъ образомъ жидкость, наполняющая пространство, производитъ явленіе притяженія, но тѣмъ не менѣе никѣмъ не доказана и невозможность объясненія, основаннаго на существованіи эфира. Послѣднее мнѣніе должно быть предпочтено мнѣнію аттракціонеровъ, ибо оно, по крайней мѣрѣ, не противорѣчитъ нашему разумѣнію, между тѣмъ какъ понятіе аттракціонеровъ о притяженіи, не въ состояніи выдержать внимательнаго разсмотрѣнія.

Хотя законъ тяготѣнія, какъ мы видѣли выше, открытъ Нютономъ, но первая мысль объ этой общей силѣ относится къ временамъ гораздо отдаленнѣйшимъ. *Анаксагоръ* (500 лѣтъ до Р. Х.), *Демокритъ, Эпикуръ* уже допускали стремленіе вещества къ общимъ центрамъ. *Плутархъ* говоритъ о семъ предметѣ довольно удовлетворительно; онъ объясняетъ, какимъ образомъ каждый міръ имѣетъ свой центръ, свои земли, моря, и заключаетъ въ себѣ силу, удерживающую всѣ тѣла около сего центра.

Коперникъ имѣлъ то же понятіе о всеобщемъ притяженіи, и приписывалъ круглый видъ небесныхъ тѣлъ стремленію ихъ частицъ къ взаимному приближенію. *Тихо-Брагъ* допускалъ также центральную силу въ солнцѣ, удерживающую планеты въ ихъ орбитахъ, хотя подобное дѣйствіе и трудно было согласить съ его системою. Понятія *Кеплера* о тяготѣніи несравненно яснѣе и опредѣлительнѣе. Онъ былъ убѣжденъ во всеобщности и взаимности тяготѣнія. Въ предисловіи къ *Комментаріямъ на движенія Марса* Кеплеръ говоритъ, что земля притягиваетъ луну, и обратно, и что еслибы онѣ не имѣли вращательнаго движенія, то начали бы приближаться одна къ другой, и соединились бы въ общемъ ихъ центрѣ тяжести. Въ другомъ мѣстѣ онъ приписываетъ дѣйствію солнца неравенства луны, а дѣйствію сей послѣдней, приливъ и отливъ моря; также, сравниваетъ притяженіе солнца на планеты съ магнитною силою.

Галилей, Баконъ, Ферматъ, Робервалъ имѣли о притяженіи болѣе или менѣе вѣрныя понятія. Но никто, до Нютона, не былъ такъ близокъ къ точному понятію объ этомъ общемъ началѣ какъ Англійскій математикъ *Робертъ Гоокъ.* Вотъ слова Гоока: *)

„1°. Всѣ небесныя тѣла не только имѣютъ „притяженіе или тяготѣніе около собственныхъ „своихъ центровъ, но еще взаимно притягиваются „въ своей сферѣ дѣятельности.

„2°. Всѣ тѣла, имѣющія простое прямолинейное движеніе, продолжали бы двигаться по прямой линіи, еслибы посторонняя сила не совращала ихъ отъ сего направленія, и не заставляла „ихъ описывать кругъ, эллипсъ или другую, „сложнѣйшую кривую.

„3°. Притяженіе бываетъ тѣмъ бóльшее, чѣмъ „притягивающее тѣло ближе.“

Что касается до закона, по которому измѣняется притяженіе съ разстояніями, то Гоокъ сознавался, что онъ не нашелъ его. Впослѣдствіи *Нютонъ* открылъ этотъ законъ. См. ниже; также въ статьѣ: ASTRONOMIE, *Исторію Астрономіи.*

*) *An attempt to prove the motion of the Earth.* Lond. 1674, in-4°.

ATTRACTION NEUTONIENNE или ATTRACTION, PESANTEUR, GRAVITATION UNIVERSELLE. **ЗАКОНЪ ВСЕОБЩАГО ТЯГОТѢНІЯ,** открытый *Нютономъ.* Тѣла, или частицы тѣлъ, находящіяся одни отъ другихъ въ чувствительныхъ разстояніяхъ, стремятся взаимно приблизиться. Стремленіе, изъявляемое частицею приблизиться къ другой частицѣ, измѣряется *массою сей послѣдней, раздѣленной на квадратъ ихъ взаимнаго разстоянія.* Въ этомъ собственно и состоитъ *законъ всеобщаго тяготѣнія.* Великій философъ, открывшій его, принялъ за мѣру притяженія земли на луну, степень взаимнаго ихъ приближенія; Смот. предыдущую статью, также FORCE. Чтобы объяснить это нашимъ читателямъ, положимъ, что земля находится въ T (черт. 23, листъ I), а луна въ L; если бы земля не притягивала луны (мы употребляемъ слово притягивать, разумѣя только явленіе, а не причину), то сія послѣдняя, по своей недѣйственности, двигалась бы по направленію LN, сохраняя первоначальную скорость, сообщенную ей въ L (См. INÉRTIE), и пришла бы, напримѣръ, въ точку N по истеченіи времени ϑ. Но такъ какъ земля притягиваетъ луну, то еслибы сія послѣдняя не имѣла движенія по LN, она бы приблизилась къ землѣ по прямой линіи LT, и перешла бы, напримѣръ, по истеченіи времени ϑ, пространство LM. Но луна, будучи побуждаема дѣйствіемъ земли, и сверхъ того, имѣя уже движеніе, которое, по инерціи своей упорствуетъ сохранить, не придетъ ни въ M ни въ N, а въ слѣдствіе закона сложныхъ движеній (См. PARALLÉLOGRAMME DES VITESSES), изберетъ средній путь, и, въ то же время ϑ, опишетъ діагональ LL' параллелограмма $LML'N$. Достигнувъ точки L', и если бы земля вдругъ перестала на нее дѣйствовать, она продолжала бы свое движеніе по направленію $L'N'$, составляющимъ продолженіе линіи LL'; но такъ какъ земля не перестаетъ изъявлять дѣйствіе на луну, то сія послѣдняя, въ точкѣ L', уклонится отъ прежняго направленія, и перейдетъ пространство $L'L''$, и такъ далѣе. Такъ какъ изображенное нами на чертежѣ повторяется по истеченіи каждаго безконечно малаго времени ϑ, то послѣдовательныя положенія луны, образуютъ непрерывную кривую или путь ея. Положимъ, что безъ дѣйствія земли, луна находилась бы въ точкѣ P по истеченіи времени t; но, въ слѣдствіе притяженія земли, луна дѣйствительно находится въ точкѣ Q кривой, описываемой ею. Послѣднее отношеніе удвоеннаго пространства PQ къ квадрату времени t, изображаетъ ускорительное дѣйствіе земли на луну въ точкѣ L. Смот. FORCE. Чтобы получить движущее дѣйствіе, надобно помножить ускорительное дѣйствіе на массу луны.

Такимъ образомъ Нютонъ нашелъ законъ притяженія земли на луну; онъ усмотрѣлъ также, что тому же самому закону подвержены взаимныя дѣйствія солнца, планетъ и ихъ спутниковъ; но законъ всеобщаго тяготѣнія, въ томъ видѣ, въ какомъ онъ изложенъ въ началѣ этой статьи, Нютонъ вывелъ, руководствуясь однимъ наведеніемъ.

Притяженіе, въ слѣдствіе замѣчаемыхъ нами явленій, можетъ быть раздѣлено на два рода.

1) Притяженіе, изъявляющее свое дѣйствіе на разстояніяхъ чувствительныхъ. Притяженію такого рода видимъ примѣры въ *силѣ тяжести,* въ *магнитныхъ и электрическихъ притяженіяхъ.*

2) *Притяженіе частичное (attraction moléculaire* или *attraction de cohésion),* обнаруживающее свое дѣйствіе на разстояніяхъ весьма малыхъ. Примѣры частичнаго притяженія усматриваемъ въ *волосныхъ явленіяхъ* и *химическихъ соединеніяхъ.* Смот. CAPILLAIRE (ACTION), MOLÉCULE.

Законы притяженія перваго рода опредѣляются принимая въ соображеніе степень взаимнаго приближенія притягивающихся тѣлъ; что касается до частичнаго притяженія, то невозможно опредѣлить законы ихъ взаимодѣйствія, ибо частицы тѣлъ не могутъ быть нами наблюдаемы. Одно только и извѣстно намъ въ этомъ отношеніи: разныя явленія, согласуясь въ своихъ показаніяхъ, обнаруживаютъ, что это дѣйствіе дѣлается чувствительнымъ только на разстояніяхъ, не подлежащихъ нашимъ чувствамъ по своей малости.

ATTRACTION D'UN CORPS SPHÉRIQUE. ПРИТЯЖЕНІЕ СФЕРИЧЕСКАГО ТѢЛА. Положимъ, что имѣемъ тѣло, ограниченное двумя одноцентренными шаровыми поверхностями, или, что всё равно, пустой шаръ, и желаемъ опредѣлить притяженіе этого тѣла на матеріальную точку, внутри или внѣ его находящуюся. Пусть будетъ C (черт. 24 и 25 листъ I) общій центръ сферическихъ поверхностей, A притягиваемая точка. Очевидно, что притяженіе на нее будетъ происходить по направленію линіи AC, по причинѣ симетрическаго вида притягивающаго тѣла. И такъ, чтобы вывести полное притяженіе на точку A, стоитъ только разложить разсматриваемый пустой шаръ на безконечно малые элементы, и найти выраженіе притягательнаго дѣйствія по направленію CA одного изъ сихъ элементовъ на точку A; потомъ, взявъ сумму всѣхъ элементарныхъ притяженій посредствомъ правилъ интегральнаго исчисленія, найдется полное притяженіе пустаго шара на точку A.

Пусть будетъ m какая ни есть точка тѣла; изобразимъ чрезъ r разстояніе Cm и чрезъ ϑ уголъ mCA, заключающійся между двумя прямыми Cm и CA; сверхъ того, проведемъ произвольную линію CB, и назовемъ ω уголъ, составляемый плоскостію BCA съ плоскостію mCA. Положеніе точки m будетъ совершенно опредѣлено посредствомъ радіуса вектора r и двухъ угловъ ϑ и ω.

Элементъ объёма, выраженный посредствомъ сихъ трехъ координатъ, и соотвѣтствующій точкѣ m, будетъ $r^2 Sin\,\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\omega$; Смот. TRANSFORMATION DES COORDONNÉES; помноживъ сей элементъ на плотность ϱ тѣла, получится элементъ массы; если, сверхъ того, изобразимъ чрезъ x разстояніе mA, и чрезъ f величину притяженія на единицѣ разстоянія, и относящуюся къ единичной массѣ, то получимъ выраженіе:

$$\frac{\varrho f r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\omega}{x^2}$$

въ слѣдствіе изложеннаго выше закона притяженія. Эта величина изображаетъ силу, направленную по линіи Am; чтобы получить ея составляющую по направленію AC, стоитъ только умножить ее на косинусъ угла CAm; принявъ $CA = a$, найдемъ

$$Cos\,(CAm) = \frac{a - r\,Cos\,\vartheta}{x},$$

и, слѣдовательно, притяженіе элемента m на точку A по направленію линіи CA, будетъ

$$\frac{\varrho f r^2 (a - r\,Cos\,\vartheta)\,Sin\,\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\omega}{x^3},$$

а полное притяженіе выразится тройнымъ интеграломъ

$$\varrho f \iiint \frac{r^2 (a - r\,Cos\,\vartheta)\,Sin\,\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\omega}{x^3},$$

предполагая тѣло однороднымъ. Чтобы распространить этотъ интегралъ на всё протяженіе тѣла, надобно взять его между надлежащими предѣлами, именно: 1) между предѣлами l и l' относительно перемѣнной r, гдѣ подъ l и l' разумѣемъ радіусы внутренней и наружной сферической поверхности; 2) между o и π относительно угла ϑ; и 3) между o и 2π въ разсужденіи ω.

Мы не будемъ останавливаться на этомъ интегрированіи; замѣтимъ только, что перемѣнная x, входящая подъ интегральный знакъ, можетъ быть исключена посредствомъ уравненія $x^2 = a^2 - 2ar\,Cos\,\vartheta + r^2$, доставляемаго треугольникомъ CmA; или, еще удобнѣе будетъ исключить уголъ ϑ, и тогда, предѣлы для x будутъ $\pm(a - r)$ и $a + r$; знакъ $+$ относится къ тому случаю, когда $a > r$, а знакъ $-$, когда $a < r$.

Произведя двойное интегрированіе, первое, относительно ω, второе, въ разсужденіи x, найдется

$$\frac{2\pi\varrho f}{a^2}\int r\,dr\,(r \pm r),$$

гдѣ знакъ $+$ соотвѣтствуетъ случаю $a > r$, а знакъ $-$ тому, когда $a < r$.

Но замѣтимъ, что когда точка A находится въ пустотѣ тѣла (черт. 25), то a будетъ всегда менѣе r; слѣдовательно въ такомъ случаѣ предыдущій интегралъ, обратится въ нуль; откуда заключаемъ, что *притяженіе пустаго однороднаго шара, имѣющаго вездѣ равную толщину, на точку находящуюся въ его пустотѣ, равняется нулю.* То же самое можно сказать и о какомъ ни есть тѣлѣ, внутри пустаго шара находящагося, ибо такое тѣло можно разсматривать составленнымъ изъ совокупности безчисленныхъ матеріальныхъ точекъ, изъ которыхъ каждая, въ слѣдствіе сказаннаго, будетъ находиться въ равновѣсіи.

Если точка A внѣ притягивающаго тѣла (черт. 24), то $a > r$, и слѣдовательно, взявъ интегралъ между предѣлами l и l', найдется

$$\frac{2\pi\varrho f}{a^2}\int_l^{l'} r\,dr\,(r + r) = \frac{4\pi\varrho f}{3a^2}\,(l^3 - l'^3).$$

Вотъ выраженіе притягательной силы на точку A. Изобразивъ чрезъ M массу пустаго шара, найдемъ

$$M = \frac{4\pi\varrho}{3}\,(l^3 - l'^3),$$

и слѣдовательно, самое притяженіе выразится чрезъ

$$\frac{Mf}{a^2},$$

которое ничѣмъ не разнится отъ притяженія массы M, сосредоточенной въ центрѣ C. Отсюда можемъ заключить, что *притяженіе однороднаго сферическаго тѣла на внѣшнюю точку одинаково съ тѣмъ, которое получилось бы сосредоточивъ всю массу тѣла въ его центрѣ.* Впрочемъ, замѣтимъ, что это предложеніе справедливо и въ томъ случаѣ, когда сферическое тѣло не однородное, а состоитъ изъ одноцентренныхъ сферическихъ слоевъ однородныхъ, или иначе, когда плотность ϱ зависитъ только отъ радіуса r.

Изъ сказаннаго легко также вывести законъ измѣненія тяжести внутри земнаго шара. Дѣйствительно, разсмотримъ однородный шаръ, коего плотность есть ϱ, а радіусъ R; пусть притягиваемое тѣло находится внутри сего шара, на разстояніи r отъ его центра. Въ слѣдствіе доказанной выше теоремы, притяженіе внѣшнихъ слоевъ на тѣло будетъ равняться нулю; останется только шаръ, описанный радіусомъ r, и его притяженіе на тѣло опредѣлится выведенною выше формулою

$$\frac{4\pi\varrho f}{3a^2}(l^3-l'^3),$$

въ которой должно положить $l=r$, $l'=o$, $a=r$; отсюда заключаемъ, что притяженіе шара на тѣло, внутри его находящееся, имѣетъ выраженіемъ

$$\frac{4\pi\varrho}{3}\cdot r.$$

И такъ, *еслибы земля состояла вся изъ однородныхъ слоевъ, то тяжесть внутри ея, была бы прямо пропорціональна разстоянію тѣла отъ центра.* Впрочемъ, должно замѣтить, что этотъ законъ справедливъ только въ томъ предположеніи, что земля имѣетъ сферическій видъ, и не принимая притомъ въ соображеніе ея центробѣжной силы.

ATTRACTION DES SPHÉROIDES. ПРИТЯЖЕНІЕ СФЕРОИДОВЪ. Рѣшеніе многихъ вопросовъ изъ Естественной Философіи зависитъ отъ опредѣленія притяженія сфероида на точку, находящуюся внутри, или на самой его поверхности, или еще внѣ сего тѣла. Важность сей задачи очевидна въ Небесной Механикѣ. Движеніе центровъ тяжести планетъ измѣняется значительнымъ образомъ отъ уклоненія ихъ отъ вида сферическаго. Оси вращенія планетъ измѣняютъ свое направленіе по той же причинѣ. Явленіе приливовъ и отливовъ основано на опредѣленіи притяженія земнаго сфероида на воды Океана. Но самое важное приложеніе этой теоріи, безъ сомнѣнія, состоитъ въ опредѣленіи вида небесныхъ тѣлъ.

Ученіе о притяженіи сфероидовъ есть одно изъ обширнѣйшихъ въ области новѣйшаго Анализа; предѣлы нашего Лексикона не позволяютъ намъ предложить никакихъ подробностей по сему предмету; но вотъ начала этой теоріи въ самомъ краткомъ видѣ.

Изобразимъ чрезъ x, y, z прямоугольныя координаты какой ни есть частицы dm даннаго сфероида. Сіи координаты, по своей измѣняемости, будутъ принадлежать всѣмъ частицамъ. Пусть будутъ a, b, c, относительно тѣхъ же осей, какъ и x, y, z, координаты притягиваемой точки, которую, для сокращенія рѣчи, будемъ называть M. Пусть r разстояніе M отъ dm, и представимъ чрезъ $\varphi(r)$ законъ притяженія.

Притяженіе частицы dm на точку M изобразится чрезъ $\varphi(r)dm$; всякая другая частица будетъ притягивать M съ подобнымъ напряженіемъ; вопросъ состоитъ въ опредѣленіи равнодѣйствующей всѣхъ такихъ силъ. Неудобно искать прямо сію равнодѣйствующую посредствомъ правила параллелограмма силъ; гораздо лучше искать ея проэкціи на трехъ неподвижныхъ осяхъ, напримѣръ на координатныхъ, и потомъ уже, посредствомъ сихъ проэкцій, опредѣлить самую равнодѣйствующую. Проэкціи силы $\varphi(r)dm$ будутъ

$$\varphi(r)\,\frac{x-a}{r}\,dm \text{ по оси } x,$$

$$\varphi(r)\,\frac{y-b}{r}\,dm \text{ по оси } y,$$

$$\varphi(r)\,\frac{z-c}{r}\,dm \text{ по оси } z;$$

слѣдовательно, проэкціи равнодѣйствующей опредѣлятся формулами

$$\iiint\varphi(r)\,\frac{x-a}{r}\,dm,$$

$$\iiint\varphi(r)\,\frac{y-b}{r}\,dm,$$

$$\iiint\varphi(r)\,\frac{z-c}{r}\,dm,$$

въ которыхъ интегралы должны быть распространены на всѣ частицы сфероида. Чтобы на самомъ дѣлѣ произвести означенныя интегрированія, надлежитъ частицу dm, изображающую элементъ ея массы, замѣнить произведеніемъ плотности ϱ на дифференціальный элементъ объёма, который можно принять равнымъ параллелопипеду $dxdydz$. И такъ, $dm = \varrho dxdydz$, и слѣдовательно проэкціи притяженія будутъ

$$\iiint \varphi(r)\frac{x-a}{r}\varrho\, dxdydz,$$

$$\iiint \varphi(r)\frac{y-b}{r}\varrho\, dxdydz,$$

$$\iiint \varphi(r)\frac{z-c}{r}\varrho\, dxdydz.$$

Въ природѣ, свойство функціи $\varphi(r)$ опредѣляется формулою $\varphi(r) = \frac{k}{r^2}$, въ которой k изображаетъ количество постоянное, называемое *коэффиціентомъ притяженія*. И такъ, въ этомъ случаѣ, найдутся выраженія:

$$(1)\quad \begin{cases} k\iiint\varrho\frac{x-a}{r^3}\, dx\, dy\, dz, \\ k\iiint\varrho\frac{y-b}{r^3}\, dx\, dy\, dz, \\ k\iiint\varrho\frac{z-c}{r^3}\, dx\, dy\, dz. \end{cases}$$

Интегрированіемъ сихъ формулъ, для какихъ ни есть сфероидовъ, занимались первостепенные математики; но усилія ихъ увѣнчались успѣхомъ только для сфероидовъ, мало уклоняющихся отъ сферическаго вида, и имѣющихъ плотность почти постоянную относительно широты и долготы. Въ этомъ случаѣ, предыдущіе интегралы могутъ быть выражены сходящимися рядами.

Одинъ частный случай притяженія сфероидовъ, именно: *притяженіе однороднаго эллипсоида*, обратилъ на себя особенное вниманіе геометровъ. Задача сія рѣшена теперь со всею надлежащею полнотою. Она приводится къ опредѣленію тройныхъ, вышеприведенныхъ интеграловъ для всѣхъ точекъ даннаго эллипсоида.

Рѣшеніе этой задачи, по своему объёму, не можетъ быть изложено въ нашемъ Лексиконѣ; отсылаемъ по сему предмету къ трудамъ: *Лагранжа*: Sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques, Mémoires de Berlin 1773; *Лапласа*: Mécanique céleste, томъ 2-ой; *Лежандра*: Mémoires de l'Académie des sciences de Paris или Théorie des fonctions elliptiques, томъ 1-й; скажемъ только, что она представляетъ два случая: первый, когда притягиваемая точка находится внутри эллипсоида, а второй, сложнѣйшій, имѣетъ предметомъ опредѣленіе притяженія эллипсоида на точку, внѣ сего тѣла находящуюся. Обыкновенно сей послѣдній случай приводятъ къ первому, что легко сдѣлать, основываясь на теоремѣ, предложенной Англійскимъ математикомъ *Айвори* (*Yvory*). Такъ какъ ни одинъ изъ отечественныхъ математиковъ не писалъ объ этой примѣчательной теоремѣ, то мы предложимъ ее здѣсь съ надлежащими подробностями.

Изобразимъ чрезъ α, β, γ полу-оси притягивающаго эллипсоида, предполагаемаго однороднымъ. Принимая ихъ за положительныя координатныя полуоси, уравненіе поверхности эллипсоида будетъ

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1,$$

и сверхъ того, имѣемъ условіе

$$\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}+\frac{c^2}{\gamma^2}>1,$$

ибо, по предположенію, притягиваемая точка находится внѣ эллипсоида. Надобно интегрировать формулы (1) относительно всѣхъ значеній x, y, z, соотвѣтствующихъ всѣмъ точкамъ эллипсоида. Разсмотримъ которую нибудь изъ сихъ формулъ, напримѣръ послѣднюю

$$k\varrho\iiint\frac{z-c}{r^3}\, dx\, dy\, dz.$$

Такъ какъ $r^2 = (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$, то дифференцируя это уравненіе по измѣняемости z, найдемъ $rdr = (z-c)\, dz$; слѣдовательно, предыдущая формула, которую для простоты изобразимъ чрезъ C, обратится въ

$$C = k\varrho\iiint\frac{dr}{r^2}\, dx\, dy.$$

Здѣсь интегралъ въ разсужденіи r долженъ быть взятъ отъ величины r, соотвѣтствующей значенію $z = -\gamma\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}}$ до той, которая относится къ значенію $z = +\gamma\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}}$; изобразивъ чрезъ r_1 и r_2 предѣльныя величины перемѣнной r, получимъ

$$C = k\varrho\iint\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)dx\, dy.$$

Пусть будетъ теперь другой эллипсоидъ, имѣющій одинъ центръ съ первымъ, одинаковое направленіе главныхъ осей и ту же самую плотность. Изобразимъ чрезъ $\frac{x'^2}{\alpha'^2}+\frac{y'^2}{\beta'^2}+\frac{z'^2}{\gamma'^2}=1$ уравненіе его поверхности, и будемъ искать притяженіе этого втораго эллипсоида на точку, опредѣляемую координатами a', b', c'. Если назовемъ C' составляющую притяженія, параллельную оси z, то получимъ

$$C' = k\varrho\iint\left(\frac{1}{r'_1}-\frac{1}{r'_2}\right)dx'dy',$$

гдѣ подъ r'_1 и r'_2 разумѣемъ предѣльныя разстоянія точки (a', b', c') отъ поверхности втораго эллипсоида.

Теперь постараемся расположить количествами $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$ такъ, чтобы каждому разстоянію точки (a, b, c) отъ поверхности перваго эллипсоида, соотвѣтствовало равное разстояніе точки (a', b', c') отъ поверхности втораго. Очевидно, что на сей конецъ достаточно будетъ три уравненія

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1,$$

$$\frac{x'^2}{\alpha'^2}+\frac{y'^2}{\beta'^2}+\frac{z'^2}{\gamma'^2}=1,$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=(x'-a')^2+(y'-b')^2+(z'-c')^2$$

привести къ двумъ первымъ, такъ чтобы третье было необходимымъ слѣдствіемъ первыхъ двухъ; а для этого, стоитъ только уничтожить члены, заключающіе въ себѣ первыя степени перемѣнныхъ x, y, z, x', y', z', что̀ приводитъ къ условіямъ

$$ax=a'x',\quad by=b'y',\quad cz=c'z',$$

и слѣдовательно

$$x'^2-x^2+y'^2-y^2+z'^2-z^2=a^2-a'^2+b^2-b'^2+c^2-c'^2.$$

Положимъ $\frac{a}{a'}=l,\ \frac{b}{b'}=m,\ \frac{c}{c'}=n$; будетъ

$$x'=lx,\quad y'=my,\quad z'=nz,$$

почему

$$(l^2-1)x^2+(m^2-1)y^2+(n^2-1)z^2$$
$$=(l^2-1)a'^2+(m^2-1)b'^2+(n^2-1)c'^2=\vartheta,$$

а также

$$\frac{l^2-1}{l^2}x'^2+\frac{m^2-1}{m^2}y'^2+\frac{n^2-1}{n^2}z'^2=\vartheta.$$

Слѣдовательно

$$l^2-1=\frac{\vartheta}{\alpha^2},\quad m^2-1=\frac{\vartheta}{\beta^2},\quad n^2-1=\frac{\vartheta}{\gamma^2}$$

$$l^2-1=\frac{l^2\vartheta}{\alpha'^2},\ m^2-1=\frac{m^2\vartheta}{\beta'^2},\ n^2-1=\frac{n^2\vartheta}{\gamma'^2}.$$

И такъ

$$\alpha'^2=l^2\alpha^2,\quad \beta'^2=m^2\beta^2,\quad \gamma'^2=n^2\gamma^2,$$

откуда

$$\alpha'=l\alpha,\quad \beta'=m\beta,\quad \gamma'=n\gamma.$$

Сверхъ того имѣемъ

$$l^2=\frac{\alpha^2+\vartheta}{\alpha^2},\quad m^2=\frac{\beta^2+\vartheta}{\beta^2},\quad n^2=\frac{\gamma^2+\vartheta}{\gamma^2},$$

почему

$$(2)\ \begin{cases} a'=\frac{a\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\vartheta}}, & b'=\frac{b\beta}{\sqrt{\beta^2+\vartheta}}, \quad c'=\frac{c\gamma}{\sqrt{\gamma^2+\vartheta}}; \\ \alpha'=\sqrt{\alpha^2+\vartheta}, & \beta'=\sqrt{\beta^2+\vartheta}, \quad \gamma'=\sqrt{\gamma^2+\vartheta}; \\ x'=\frac{x}{\alpha}\sqrt{\alpha^2+\vartheta}, & y'=\frac{y}{\beta}\sqrt{\beta^2+\vartheta}, \quad z'=\frac{z}{\gamma}\sqrt{\gamma^2+\vartheta}; \end{cases}$$

также

$$\frac{a'^2}{\alpha^2}+\frac{b'^2}{\beta^2}+\frac{c'^2}{\gamma^2}=1,$$

или наконецъ

$$\frac{a^2}{\alpha^2+\vartheta}+\frac{b^2}{\beta^2+\vartheta}+\frac{c^2}{\gamma^2+\vartheta}=1.$$

Вотъ уравненіе третьей степени, опредѣляющее величину ϑ; легко видѣть, что всѣ три корня этого уравненія вещественные: одинъ изъ нихъ положительный, а другіе два отрицательные. Для нашей задачи должно принять положительный; опредѣливъ величину ϑ, найдемъ посредствомъ формулъ (2) полу-оси α', β', γ' новаго эллипсоида, координаты a', b', c' притягиваемой имъ точки и координаты x', y', z' точки его поверхности, находящейся въ томъ самомъ разстояніи отъ (a', b', c'), въ какомъ (a, b, c) отъ (x, y, z). Соображаясь съ выведенными выше уравненіями $\alpha'^2=\alpha^2+\vartheta$, $\beta'^2=\beta^2+\vartheta$, $\gamma'^2=\gamma^2+\vartheta$, усматриваемъ изъ уравненія, опредѣляющаго ϑ, что поверхность новаго эллипсоида проходитъ чрезъ точку (a, b, c).

Теперь обратимся къ формулѣ, опредѣляющей C'. Такъ какъ мы имѣли выше $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=(x'-a')^2+(y'-b')^2+(z'-c')^2$, то очевидно, что можемъ замѣнить въ ней r'_1, r'_2 величинами r_1 и r_2; слѣдовательно

$$C'=k\varrho\iint\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)dx'dy';$$

но, по причинѣ $x'=\frac{\alpha'}{\alpha}x$, $y'=\frac{\beta'}{\beta}y$, найдется

$$C'=\frac{\alpha'\beta'}{\alpha\beta}k\varrho\iint\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)dxdy=\frac{\alpha'\beta'}{\alpha\beta}C,$$

откуда

$$C=\frac{\alpha\beta}{\alpha'\beta'}C'.$$

Вспомнимъ теперь, что C' изображаетъ составляющую притяженія, параллельную оси z, на точку (a', b', c'); но такъ какъ координаты этой точки удовлетворяютъ уравненію $\frac{a'^2}{\alpha^2}+\frac{b'^2}{\beta^2}+\frac{c'^2}{\gamma^2}=1$, найденному нами выше, то отсюда слѣдуетъ, что точка (a', b', c') находится на поверхности первоначальнаго эллипсоида, и слѣдовательно, *внутри* втораго, что впрочемъ можно видѣть изъ неравенства

$$\frac{a'^2}{\alpha'^2}+\frac{b'^2}{\beta'^2}+\frac{c'^2}{\gamma'^2}<1.$$

Итакъ c' изображаетъ составляющую притяженія на *внутреннюю* точку, а этотъ случай, какъ мы уже замѣтили, проще того, когда ищемъ притяженіе на *внѣшнюю* точку. Въ семъ то приведеніи случая притяженія на внѣшнюю точку, къ притяженію на внутреннюю, состоитъ *теорема Айвори*. Если изобразимъ чрезъ A и B составляющія притяженія параллельныя осямъ x и y перваго эллипсоида на точку (a, b, c), и чрезъ A', B', то же самое въ отношеніи втораго эллипсоида, то, подобно предыдущему, получимъ:

$$A=\frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}A' \text{ и } B=\frac{\alpha\gamma}{\alpha'\gamma'}B'.$$

ATTRACTION DES MONTAGNES. ПРИТЯЖЕНІЕ ГОРЪ. Такъ какъ всѣ вещественныя частицы притягиваются взаимно въ прямомъ отношеніи массъ и обратномъ квадратовъ ихъ разстояній, то отсюда слѣдуетъ, что двѣ какія ни есть массы, при поверхности земли находящіяся, будутъ стремиться къ взаимному приближенію. Но, по малой величинѣ сихъ массъ, это стремленіе вообще для насъ незамѣтно, что впрочемъ весьма естественно, когда примемъ въ соображеніе, что самое притяженіе земли не такъ значительно; и въ самомъ дѣлѣ мы знаемъ, что отъ сего дѣйствія, тѣла переходятъ только около 16 футовъ въ каждую секунду. Но замѣтимъ, что сказанное нами о тѣлахъ обыкновенной величины, не должно относиться къ значительнымъ массамъ, каковы напримѣръ горы. И дѣйствительно, наблюдатели замѣтили вліяніе ихъ притяженія на тѣла. При наблюденіи высоты свѣтила по близости большой горы, они усмотрѣли что отвѣсъ, коего наклоненіе, при дѣйствіи одного притяженія земли, должно быть перпендикулярно къ поверхности стоячихъ водъ, уклоняется отъ вертикальнаго направленія притягательнымъ дѣйствіемъ горы. Чтобы удостовѣриться въ такомъ уклоненіи, и вмѣстѣ съ тѣмъ найти его мѣру, можно поступать слѣдующимъ образомъ. На южной и сѣверной сторонѣ горы, подъ однимъ и тѣмъ же меридіаномъ, наблюдаютъ разстояніе звѣзды отъ зенита. Если отвѣсъ, отъ притяженія горы, уклонился отъ вертикальнаго направленія, то звѣзда, при наблюденіи съ южной стороны, будетъ отнесена нѣсколько сѣвернѣе противу надлежащаго, а при наблюденіи съ сѣверной стороны, нѣсколько южнѣе; слѣдовательно, разность широтъ двухъ мѣстъ наблюденій, выведенная такимъ образомъ, будетъ болѣе истинной разности. Но еслибы сія послѣдняя была опредѣлена чрезъ непосредственное измѣреніе разстоянія между двумя мѣстами наблюденій, то избытокъ разности широтъ, выведенной чрезъ наблюденія звѣзды, предъ разностью широтъ, найденной чрезъ непосредственное измѣреніе части меридіана, покажетъ дѣйствіе, произведенное притяженіемъ горы. Половина сего избытка измѣряетъ уклоненіе отвѣса отъ вертикальной линіи при каждомъ наблюденіи, если только притяженіе горы съ обѣихъ сторонъ, южной и сѣверной, одинаково.

Бугеръ и *Ла Кондаминъ*, въ 1738 году, измѣряя три градуса меридіана по близости области Квито въ Перу, производили наблюденія съ южной и сѣверной стороны извѣстной горы *Чимборазо;* они нашли, что отъ притяженія сей горы, отвѣсъ уклоняется отъ вертикальнаго направленія на 7″, 5.

Послѣ нихъ извѣстный Англійскій астрономъ *Маскелинъ*, снабженный точнѣйшими астрономическими инструментами, былъ отправленъ въ 1774 году Лондонскимъ Королевскимъ Обществомъ въ Шотландію съ цѣлію произвести наблюденія надъ притяженіемъ горъ. Маскелинъ избралъ гору *Шехалліенъ (Schehallien)*, коей высота надъ поверхностію моря равна около 3550 футамъ, и нашелъ посредствомъ многихъ, весьма точныхъ наблюденій, что дѣйствіе этой горы на отвѣсъ, производитъ уклоненіе около 6 секундъ. Подробности сихъ наблюденій помѣщены въ *Philosophical transactions*, 1775 г.

ATTRACTIONNAIRES. АТТРАКЦІОНЕРЫ. Послѣдователи ученія о всеобщемъ тяготѣніи, приписывающіе частицамъ вещества свойство притягивать другія частицы. См. ATTRACTION.

ATTRIBUER. (Алг.) **ПРИПИСЫВАТЬ, ДАВАТЬ, НАЗНАЧАТЬ.** *Attribuer à x une valeur positive*; *приписать количеству x значеніе положительное.*

ATTRITION. (Мех.) **ТРЕНІЕ.** См. FROTTEMENT.

ATWOOD (MACHINE, APPAREIL D'). (Физ.) **АТВУДОВА МАШИНА, АТВУДОВЪ ПРИБОРЪ.** Скорость свободно падающаго тѣла слишкомъ значительна, чтобы можно было вывести законы его движенія непосредственнымъ наблюденіемъ. Машина, изобрѣтенная *Атвудомъ,* представляетъ удобный способъ для уменьшенія сей скорости; не измѣняя въ сущности законовъ паденія тяжелыхъ тѣлъ, мы можемъ, при ея пособіи, доказать на опытѣ всѣ обстоятельства ихъ движенія.

Машина Атвудова состоитъ изъ вертикальной стойки AB (черт. 26 листъ I), на которой означены дѣленія, какъ то: футы, дюймы, линіи; обыкновенная высота стойки бываетъ около одной сажени. Въ верхней части всего прибора находится неподвижный блокъ E, свободно обращающійся около своей оси. Двѣ цилиндрическія гирьки m и m', равнаго вѣса, привѣшиваются къ концамъ крѣпкой нити, которую накладываютъ потомъ на блокъ. Эта нить должна свободно ходить по жолобу блока, который дѣлается довольно узкимъ. Наконецъ, кружокъ D, останавливающій гирьку m. Когда желаемъ привести въ движеніе гирьки, то стоитъ только къ одной изъ нихъ прибавить небольшую тяжесть. Дѣленія, означенныя на стойкѣ, покажутъ пространство, перейденное каждою массою, а секундный маятникъ, находящійся при машинѣ, будетъ служить для сравненія времени съ переходимыми пространствами; изъ этого сравненія выводится слѣдующій законъ движенія:

1. *Пространство, переходимое гирькою, пропорціонально квадрату времени.* Если изобразимъ чрезъ G пространство, перейденное гирькою въ первую секунду, каково бы оно впрочемъ не было, чрезъ E пространство переходимое ею въ продолженіе T секундъ времени, то получимъ $E = GT^2$, откуда заключаемъ, что движеніе гирекъ *равноускоренное.*

Весьма легко также, посредствомъ Атвудовой машины, опредѣлить скорость, пріобрѣтаемую тѣломъ по истеченіи извѣстнаго времени. Для сего употребляютъ подвижное кольцо C, которое можетъ ходить по длинѣ стойки, и быть утверждено на какой угодно высотѣ. Грузъ, наложенной на гирьку m, состоитъ изъ пластинки p, коей длина превосходитъ діаметръ кольца C; такимъ образомъ, когда гирька опустится и пройдетъ сквозь кольцо, пластинка останется на немъ, и массы m и m' дѣлаются равными между собою; слѣдовательно, дѣйствіе ускорительныхъ силъ, измѣняющихъ движеніе гирекъ, уравновѣшивается, и движеніе ихъ дѣлается равномѣрнымъ. Передвигая кольцо C въ разныя точки дѣленія стойки AB, выведемъ такое слѣдствіе:

2. *Скорости пропорціональны временамъ, истекшимъ отъ начала движенія до того мгновенія, когда пластинка отдѣлится отъ массы m, и останется на кольцѣ.* А чтобы получить скорость по истеченіи T секундъ, стоитъ только помножить время T, на удвоенное пространство G, описываемое гирькою въ первую секунду ея движенія. И такъ, если означимъ чрезъ V скорость, пріобрѣтаемую гирькою по истеченіи T секундъ, то найдемъ $V = 2GT$.

Изъ двухъ уравненій $E = GT^2$ и $V = 2GT$ выводимъ $E = \frac{V^2}{4G}$, откуда заключаемъ 3) *что перейденныя пространства пропорціональны квадратамъ скоростей.*

Впрочемъ, узнавъ изъ опыта, что движеніе гирекъ равноускоренное, то есть, что пространства пропорціональны квадратамъ временъ, ясно, что остальныя подробности становятся излишними, ибо, чрезъ дифференцированіе пространства $E = GT^2$ относительно времени, находимъ, что скорость $V = 2GT$.

Чтобы вывести аналитически обстоятельства движенія двухъ массъ m и m' на машинѣ Атвуда, мы употребимъ начало *д'Аламберта,* (Смот. DYNAMIQUE) не потому, чтобы оно было нужно, ибо разсматриваемое нами движеніе такъ просто, что можно прямо видѣть всѣ его обстоятельства, но единственно для того, чтобы показать приложеніе начала, которое въ большомъ употребленіи въ *Динамикѣ.* Положимъ что $m > m'$; изобразимъ чрезъ v и v' скорости массъ m и m', соотвѣтствующія времени t. Пусть будетъ g сила тяжести, которая необходимо должна быть постоянная, ибо, въ противномъ случаѣ, движеніе гирекъ не было бы равноускореннымъ.

Скорость потерянная массою m, въ элементъ времени dt, будетъ $gdt - dv$, а массою m', $gdt - dv'$; количества движенія, соотвѣтствующія симъ потеряннымъ скоростямъ, выразятся чрезъ $m(gdt - dv)$,

$m'(gdt-dv')$, и, въ слѣдствіе начала д'Аламберта, они должны уравновѣшиваться между собою. Но такъ какъ эти силы дѣйствуютъ чрезъ посредство блока, то, для равновѣсія, онѣ должны быть равны; слѣдовательно

$$m(gdt-dv)=m'(gdt-dv').$$

Сверхъ того, такъ какъ въ разсматриваемомъ нами движеніи, одна масса подымается, между тѣмъ какъ другая опускается, при чемъ переходимыя пространства остаются равными, то $v+v'=0$, откуда $dv'=-dv$. И такъ

$$m(gdt-dv)=m'(gdt+dv).$$

Изъ этого уравненія выводимъ

$$dv=g.\frac{m-m'}{m+m'}\,dt,$$

чего интегралъ, предполагая начальную скорость равною нулю, будетъ

$$v=g.\frac{m-m'}{m+m'}\,t.$$

Пусть будетъ e измѣняющееся разстояніе массы m отъ опредѣленной точки, взятой произвольно на стойкѣ. Такъ какъ $v=\frac{de}{dt}$, то

$$\frac{de}{dt}=g.\frac{m-m'}{m+m'}\,t;$$

помноживъ на dt и взявъ интегралъ въ томъ предположеніи, что при началѣ движенія $e=0$, получимъ

(2) $$e=\frac{g}{2}.\frac{m-m'}{m+m'}\,t^2.$$

Уравненія (1) и (2) совершенно согласуются съ уравненіями $V=2GT$ и $E=GT^2$, выведенными изъ опытовъ; сличая ихъ, находимъ $G=\frac{g}{2}.\frac{m-m'}{m+m'}$. Что касается до сопротивленія воздуха, то оно не измѣняетъ чувствительнымъ образомъ движенія массъ m и m' въ машинѣ Атвудовой, когда скорость сихъ послѣднихъ будетъ довольно мала, что̀ зависитъ отъ степени малости отношенія $\frac{m-m'}{m+m'}$. И такъ, если масса m немногимъ превосходитъ массу m', то наблюдаемое движеніе будетъ почти одинаково съ тѣмъ, которое получилось бы въ безвоздушномъ пространствѣ. Замѣтимъ, что для точности машины, надобно стараться по возможности уменьшить треніе, обнаруживающееся при вращеніи блока, а также, для привѣшиванія гирекъ, употреблять нить тонкую, дабы вѣсъ ея, при измѣненіи длины этой нити съ обѣихъ сторонъ блока, не имѣлъ чувствительнаго вліянія на движеніе массъ m и m'.

AUBES, AILES, AILERONS. (Гидрав.) **ЛОПАТКИ, КРЫЛЬЯ.** Доски, утверждаемыя на окружности колеса, приводимаго въ движеніе водою. *Aubes courbes, кривыя лопатки. Roues verticales à aubes, вертикальныя колеса съ лопатками.*

AUGE. ЖОЛОБЪ.

AUGET. ЖОЛОБОКЪ. — ЯЩИКЪ. *Roues à augets колеса съ ящиками.*

AUGMENT или **DÉCRÉMENT.** Уст. слово. (Анал.) **ПРИРАЩЕНІЕ, УВЕЛИЧЕНІЕ.** См. ACCROISSEMENT.

AUGMENTATION. УВЕЛИЧЕНІЕ.

AUGMENTER. УВЕЛИЧИВАТЬ.

AUSTRAL. (Астр.) **ЮЖНЫЙ.** *Pôle, hémisphère austral; южный полюсъ, южное полушаріе.*

AUTOMATE. (Мех.) **АВТОМАТЪ, АНДРОИДЪ, САМОДВИГЪ.** Отъ Греч. *αὐτος, самъ, и μάειν, желать.* Вообще машина, заключающая въ себѣ самой какое либо начало движенія. Въ этомъ смыслѣ часы, паровыя машины, ящики съ музыкою и проч. можно назвать автоматами. — Въ болѣе тѣсномъ смыслѣ, *автоматомъ* называется машина, имѣющая наружный видъ человѣка или какого нибудь животнаго, и подражающая нѣкоторымъ ихъ движеніямъ. Когда автоматъ изображаетъ человѣка, и производитъ свойственныя ему дѣйствія, то преимущественно называется *андроидомъ* (отъ Греч. *ανδρός, человѣкъ,* и *ειδός, образъ*).

Изобрѣтеніе автоматовъ должно отнести къ временамъ довольно отдаленнымъ: *Авлюгеллій* въ *Аттическихъ ночахъ*, упоминаетъ объ искусственномъ деревянномъ голубѣ, который могъ летать. Этотъ голубь, если онъ только не выдумка, былъ устроенъ *Архитомъ*, философомъ Пиѳагорейской школы, и другомъ Платона, слишкомъ за 300 лѣтъ до Р. Х. Исторія повѣствуетъ еще о многихъ другихъ автоматахъ, коихъ устроеніе намъ вовсе неизвѣстно, и даже самая подлинность ихъ болѣе или менѣе сомнительна.

Въ XIII столѣтіи, извѣстный *Албертъ Великій*, Регенсбургскій епископъ, составилъ андроида, который ходилъ по комнатѣ, отворялъ двери и произносилъ нѣсколько словъ. Въ лѣтописяхъ практической Механики упоминаютъ еще о многихъ подобныхъ произведеніяхъ, болѣе или менѣе примѣчательныхъ.

Въ прошедшемъ столѣтіи, *Вокансонъ*, Французскій механикъ, пріобрѣлъ себѣ особенную славу своими автоматами. Въ 1736 году, онъ окончилъ своего *флейтраверсиста-автомата*, и въ 1738 году показывалъ его въ Парижѣ; толпы любопытныхъ стекались, чтобы видѣть это произведеніе. Андроидъ, по свидѣтельству Парижской Академіи, которой было поручено разсмотрѣть его, играя на флейтѣ нѣсколько пьесъ, производилъ въ строгомъ смыслѣ тѣ же самыя дѣйствія, какъ искусный музыкантъ, играющій на семъ инструментѣ; подражаніе дѣйствіямъ и средствамъ одушевленной природы было соблюдено Вокансономъ съ неимовѣрною точностію и совершенствомъ.

Въ 1741 году Вокансонъ выставилъ еще двухъ автоматовъ:

1) *Утку*, обыкновенной величины, коей механизмъ подражалъ съ точностію отправленіямъ живой утки. Она протягивала шею, брала ячмень изъ рукъ, глотала его съ жадностію, при чемъ ускорялось движеніе ея горла для того, чтобы пища могла перейти въ желудокъ, въ которомъ она подвергалась нѣкотораго рода варенію, и потомъ извергалась обыкновеннымъ путемъ, весьма примѣтно измѣнившаяся въ своемъ видѣ. Сверхъ того, утка-автоматъ полоскалась въ водѣ, пила, квакала точно такъ, какъ живая утка.

2) Андроидъ *играющій на флейтѣ*, съ тремя отверстіями, и ударяющій въ тактъ по барабану. При устроеніи сего автомата, Вокансонъ открылъ, что малая флейта изъ всѣхъ духовыхъ инструментовъ, наиболѣе отягогительна для груди. Грудные мускулы должны произвести усиліе, равное нашимъ 68 фунтамъ, когда берется *верхнее си*. Желающіе ознакомиться съ Вокансоновыми автоматами, найдутъ довольно подробное описаніе ихъ механизма въ *Encyclopédie méthodique*, отдѣленіе *Mathématiques*, статьи: *Androïde* и *Automate*.

Послѣ Вокансона занимались устроеніемъ разнаго рода автоматовъ: *Кемпелей*, сдѣлавшій шахматнаго игрока (въ 1769 году), и устроившій, какъ увѣряютъ, андроида, который произносилъ нѣсколько словъ и даже цѣлыя фразы внятнымъ образомъ, между прочими: *Venez avec moi à Paris*; Швейцарецъ *Дрозъ* съ сыномъ, дѣлали андроидовъ, которые могли писать, рисовать, играть на фортепіанѣ и проч.

Изъ числа новѣйшихъ автоматовъ, можно упомянуть о вазѣ, поднесенной *Фризардомъ* Бонапарту. Эта ваза отъ прикосновенія къ ней, превращалась въ пальмовое дерево, подъ которымъ сидѣла пастушка, и пряла шерсть; близь нея паслись козы, пѣли птички, лаяла собачка и проч.

Движущіяся картины, уранографическія машины, искусственныя руки, ноги, говорящія головы и проч. можно также отнести къ автоматамъ. Въ сочиненіи: *Dictionnaire universel de Mathématique et de Physique, par Saverien*, въ статьѣ *Automate*, упоминается о движущейся картинѣ, составленной членомъ Парижской Академіи, отцомъ *Себастіяномъ*; на этой картинѣ разыгрывалась пантомимная опера въ пяти дѣйствіяхъ маленькими фигурами, которыя являлись и уходили. Изъ тѣлодвиженій ихъ легко было понимать содержаніе оперы. Длина этой картины была около 16 дюймовъ, высота 13, а глубина съ небольшимъ одинъ дюймъ.

Въ Русскомъ *Энциклопедическомъ Лексиконѣ* въ статьѣ *Автоматъ*, читатели найдутъ нѣкоторыя подробности объ часахъ, которые представляли внутренность Храма Гроба Господня; они были сдѣланы нашимъ художникомъ *Кулибинымъ*, и поднесены имъ Императрицѣ Екатеринѣ II.

AUXILIAIRE. (Анал.) **ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ, ВВОДНЫЙ.** *Quantité auxiliaire; вспомогательное, вводное количество.* Количество вводимое въ исчисленіе съ цѣлію упростить его въ какомъ либо отношеніи. *Équation, ligne auxiliaire, вспомогательное уравненіе, вспомогательная линія.* Такъ напримѣръ, когда въ однородномъ дифференціальномъ уравненіи $\varphi(x,y)\,dx + \psi(x,y)\,dy = o$, полагаемъ $y = xz$, то z есть *вспомогательная* величина, вводимая для отдѣленія перемѣнныхъ количествъ.

AV.

AVAL. (Гидрав.) **ПО ТЕЧЕНІЮ, ПО ВОДѢ.**

AVANTAGE, ESPÉRANCE, FORTUNE. ВЫГОДА, ОЖИДАНІЕ. Это слово употребляютъ въ различныхъ значеніяхъ. Вообще, разумѣютъ подъ *ожиданіемъ* выгоду, зависящую отъ событія недостовѣрнаго, но имѣющаго бо́льшую или ме́ньшую вѣроятность.

AVANTAGE, ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE или **FORTUNE PHYSIQUE. ФИЗИЧЕСКАЯ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ВЫГОДА.** Такъ называется мѣра ожидаемой выгоды, помноженная на вѣроятность того событія, отъ котораго выгода сія зависитъ. Положимъ напримѣръ, что лицо A ожидаетъ извѣстной суммы a, а полученіе ея зависитъ отъ событія, коего вѣроятность есть $\frac{1}{2}$. *Математическое ожиданіе* или *математическая выгода* лица A будетъ $\frac{1}{2}a$; то есть, если бы A захотѣлъ продать ожидаемую имъ сумму, то надлежало бы заплатить за нее только $\frac{1}{2}a$. Эта плата будетъ *безобидною (équitable)* для обѣихъ сторонъ.

AVANTAGE MORAL, ESPÉRANCE, FORTUNE MORALE. НРАВСТВЕННАЯ ВЫГОДА, ВНУТРЕННЕЕ ОЖИДАНІЕ. Нравственная выгода зависитъ отъ выгоды математической. Но зависимость сію опредѣлить весьма трудно. Для различныхъ лицъ, и при различныхъ обстоятельствахъ, она будетъ различная. Вообще, нравственная выгода человѣка, коего *имущество (fortune physique)* изобразимъ чрезъ x, можетъ выразиться функціею $\varphi(x)$ такого свойства, что она, вмѣстѣ съ x, будетъ непрестанно увеличиваться, а ея производная $\varphi'(x)$, непрестанно уменьшаться, или, что всё равно, $\varphi'(x) > o$, и $\varphi''(x) < o$. *Даніилъ Бернулли* принялъ $\varphi(x) = k \log x + h$, гдѣ k и h изображаютъ величины, независящія отъ имущества x. Онъ называлъ нравственную выгоду *mesure du sort (мѣра судьбы)*, а Лапласъ, *fortune* или *espérance morale*, или еще *avantage moral*.

Разсматриваніе *нравственной выгоды* весьма важно во многихъ вопросахъ, и надобно полагать, что число приложеній сей теоріи къ общественной жизни еще увеличится со временемъ; ибо, всё окружающее, возбуждаетъ въ насъ участіе въ той только степени, въ какой дѣйствуетъ на наше внутреннее довольство, или, какъ мы назвали выше, на нашу нравственную выгоду.

Приведемъ здѣсь нѣсколько примѣровъ, ясно доказывающихъ, какъ необходимо принимать иногда въ соображеніе нравственную выгоду.

Положимъ, что человѣкъ, обладающій имуществомъ a, желаетъ застраховать часть x сего имущества, платя страховую премію b. Изобразимъ чрезъ q вѣроятность потери части x; слѣдовательно, взявъ $1-q = p$, p изобразитъ вѣроятность, что сія часть x останется неприкосновенною. И такъ, въ слѣдствіе допущенной Даніиломъ Бернулли мѣры нравственной выгоды, она будетъ

$$p(k \log a + h) + q(k \log(a-x) + h)$$

если сказанное лице не застрахуетъ части x своего имущества; въ противномъ случаѣ, его нравственная выгода выразится чрезъ

$$k \log(a-b) + h.$$

Теперь надлежитъ разсмотрѣть, въ какомъ изъ сихъ двухъ случаевъ нравственная выгода будетъ больше.

Естественно полагать, что *отдаваніе на страхъ* должно увеличить нравственную выгоду застрахователя; почему и разсмотримъ, при какихъ условіяхъ будетъ

$$k \log(a-b) + h > p(k \log a + h) + q(k \log(a-x) + h).$$

Это неравенство, въ слѣдствіе уравненія $p+q = 1$, приводится къ слѣдующему:

$$\log(a-b) > p \log a + q \log(a-x),$$

откуда

$$a-b > a^p (a-x)^q,$$

или наконецъ

$$1-\frac{b}{a} > \left[a^{p+q-1}\left(1-\frac{x}{a}\right)^q = \left(1-\frac{x}{a}\right)^q\right];$$

отсюда заключаемъ

$$b < a\left[1-\left(1-{}^{x}\right)\right].$$

Такъ какъ количества, входящія во вторую часть послѣдняго неравенства, всѣ извѣстны, или предполагаются извѣстными (по наблюденіямъ), то всегда можно будетъ узнать, доставляетъ ли застрахованіе, по установленной преміи b, выгоду застрахователю.

Теорія нравственной выгоды служитъ также для доказательства весьма важной истины, именно *о невыгодѣ математически равныхъ игоръ.* Дабы оградить доказательство этого предложенія отъ всякаго возраженія, мы положимъ, что нравственная выгода выражается функціею физическаго имущества, удовлетворяющею только условіямъ, о которыхъ было упомянуто въ началѣ этой статьи, а впрочемъ остается произвольною. Слѣдовательно, изобразивъ чрезъ $\varphi(x)$ нравственную выгоду, соотвѣтствующую физическому имуществу x, необходимо будетъ $\varphi(x) > o$, $\varphi'(x) > o$ и $\varphi''(x) < o$.

Положимъ теперь, что человѣкъ, обладающій имуществомъ $a+x$, ставитъ въ игру сумму x, противъ другой суммы y; пусть будетъ p вѣроятность выигрыша, и слѣдовательно $1-p=q$ вѣроятность проигрыша. Нравственная выгода сказаннаго лица, передъ началомъ игры, будетъ

$$\varphi(a+x);$$

если же тотъ человѣкъ станетъ играть, то его нравственная выгода выразится чрезъ

$$p\varphi(a+x+y)+q\varphi(a)=p\varphi(a+x+y)+q\varphi(a+x-x)$$
$$=\varphi(a+x)+(py-qx)\varphi'(a+x)+\frac{py^2}{1\cdot 2}\varphi''(a+x+\lambda y)$$
$$+\frac{qx^2}{1\cdot 2}\varphi''(a+x-\lambda' x);$$

но, по предположенію, игра математически равна; слѣдовательно $py=qx$, отъ чего предыдущая формула обратится въ

$$\varphi(a+x)+\frac{py^2}{1\cdot 2}\varphi''(a+x+\lambda y)+\frac{qx^2}{1\cdot 2}\varphi''(a+x-\lambda' x);$$

послѣдніе два члена этого выраженія отрицательные, изъ чего заключаемъ, что оно меньше величины $\varphi(a+x)$, а это очевидно приводитъ къ тому слѣдствію, что нравственная выгода человѣка *не играющаго*, болѣе нравственной выгоды *игрока*.

Подобнымъ образомъ можно доказать, что выгоднѣе подвергать опасности свое имущество по частямъ, нежели въ цѣлости. Возьмемъ частный случай. Положимъ, что купецъ, обладающій имуществомъ $a+2x$, отправляетъ на одномъ кораблѣ часть $2x$ своего имущества; пусть будетъ q вѣроятность, что корабль погибнетъ. Изобразивъ чрезъ p разность $1-q$, очевидно, что нравственная выгода купца будетъ

$$p\varphi(a+2x)+q\varphi(a).$$

Предполагая же, что купецъ отправляетъ часть $2x$ своего имущества на двухъ корабляхъ, поровну, его нравственная выгода будетъ

$$p^2\varphi(a+2x)+2pq\varphi(a+x)+q^2\varphi(a).$$

Легко доказать, что послѣднее выраженіе болѣе перваго. Дѣйствительно, такъ какъ $p+q=1$, то имѣемъ

$$p\varphi(a+2x)+q\varphi(a)=(p+q)[p\varphi(a+2x)+q\varphi(a)]$$
$$=p^2\varphi(a+2x)+pq\varphi(a+2x)+pq\varphi(a)+q^2\varphi(a).$$

Когда уничтожимъ члены $p^2\varphi(a+2x)$ и $q^2\varphi(a)$, общіе выраженіямъ нравственной выгоды въ обоихъ случаяхъ, то останется только доказать, что $2pq\varphi(a+x)>pq\varphi(a+2x)+pq\varphi(a)$, или $2\varphi(a+x)>\varphi(a+2x)+\varphi(a)$, а это очевидно, ибо послѣднее неравенство можетъ быть представлено въ видѣ

$$\varphi(a+x)-\varphi(a)>\varphi(a+2x)-\varphi(a+x),$$

которое дѣйствительно имѣетъ мѣсто по свойству функціи φ, увеличивающейся менѣе и менѣе по мѣрѣ возрастанія перемѣнной величины.

И такъ, лучше подвергать опасности свое имущество по частямъ нежели въ цѣлости.

AVANTAGEUX (RÉSULTATS LES PLUS). (Исч. Вѣр.) **НАИВЫГОДНѢЙШІЕ ВЫВОДЫ.** Чтобы дать понятіе о томъ, что должно разумѣть подъ наименованіемъ *выводовъ наивыгоднѣйшихъ*, положимъ, что желаемъ опредѣлить величины нѣсколькихъ неизвѣстныхъ $x, y, z\ldots$ посредствомъ наблюденія; допустимъ, что сіи неизвѣстныя не могутъ быть измѣрены непосредственно, а опредѣляются наблюденіями нѣкоторыя ихъ функціи $\varphi_1(x,y,z\ldots)$, $\varphi_2(x,y,z\ldots)$, $\varphi_3(x,y,z\ldots)\ldots$, коихъ извѣстныя значенія изобразимъ чрезъ M_1, M_2, $M_3,\ldots$ Если бы наблюденія были въ строгомъ смыслѣ точны, то получили бы

$$\varphi_1(x,y,z\ldots)-M_1=0$$
$$\varphi_2(x,y,z\ldots)-M_2=0$$
$$\varphi_3(x,y,z\ldots)-M_3=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и достаточно бы было имѣть столько подобныхъ уравненій, сколько неизвѣстныхъ $x, y, z\ldots$ для опредѣленія сихъ послѣднихъ. Но такъ какъ наблюденія подвержены погрѣшностямъ, то разности $\varphi_1(x,y,z\ldots)-M_1$ и проч. не будутъ равны нулю, а нѣкоторымъ величинамъ положительнымъ или отрицательнымъ. Сіи-то погрѣшности и называются, очень свойственно, *погрѣшностями наблюденій (erreurs de l'observation)*.

Изобразимъ чрезъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\ldots$ эти неизвѣстныя погрѣшности: будетъ

$$(1)\quad\left\{\begin{array}{l}\varphi_1(x,y,z\ldots)-M_1=\varepsilon_1\\ \varphi_2(x,y,z\ldots)-M_2=\varepsilon_2\\ \varphi_3(x,y,z\ldots)-M_3=\varepsilon_3\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$$

Изъ сихъ уравненій надлежало бы опредѣлить значенія количествъ $x, y, z\ldots$, что невозможно, ибо имѣемъ болѣе неизвѣстныхъ, нежели уравненій.

Прежде всего должно замѣтить, что во всѣхъ приложеніяхъ наивыгоднѣйшаго способа допускаютъ, что функціи $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\ldots$ *линейныя*, а это дѣйствительно можетъ быть предположено, потому что величины $x, y, z \ldots$ могутъ быть сдѣланы весьма малыми; въ такомъ случаѣ, функція $\varphi_1(x, y, z \ldots)$ будетъ весьма близка къ значенію $A_1 + B_1x + C_1y + D_1z + \ldots$, гдѣ $A_1, B_1, C_1, D_1 \ldots$ соотвѣтственно изображаютъ величины функціи $\varphi_1(x, y, z \ldots)$ и послѣдовательныхъ ея частныхъ производныхъ $\varphi_1'(x), \varphi_1'(y), \varphi_1'(z) \ldots$ для $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. То же самое должно разумѣть и о функціяхъ $\varphi_2(x, y, z \ldots)$, $\varphi_3(x, y, z \ldots)$. Мы сказали, что количества $x, y, z \ldots$ можно допустить весьма малыми, и это потому, что величины элементовъ, ими изображаемыхъ, вообще извѣстны по приближенію. Остается только уточнить ихъ, прибавляя къ нимъ, въ видѣ поправокъ, весьма малыя количества. Сіи-то поправки и можно принять за неизвѣстныя величины вопроса, которыя изображены у насъ буквами $x, y, z \ldots$ Смот. CARRÉS (MÉTHODE DES MOINDRES).

И такъ уравненія (1) приведутся къ слѣдующимъ условнымъ уравненіямъ:

$$(2)\begin{cases} A_1 + B_1x + C_1y + D_1z + \ldots - M_1 = \varepsilon_1 \\ A_2 + B_2x + C_2y + D_2z + \ldots - M_2 = \varepsilon_2 \\ A_3 + B_3x + C_3y + D_3z + \ldots - M_3 = \varepsilon_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

которыя бы легко было разрѣшить, еслибъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots$ были извѣстны, что на самомъ дѣлѣ не имѣетъ мѣста.

Первые геометры, употребившіе *условныя уравненія (équations de condition)*, прибавляли къ уравн. (2) нѣкоторыя соотношенія, болѣе или менѣе выгодныя, между погрѣшностями $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots\ldots$; случалось часто, что вычисляя для одной и той же системы условныхъ уравненій величины $x, y, z \ldots$ разные математики приводимы были къ различнымъ значеніямъ для сихъ самыхъ неизвѣстныхъ. Долго не знали, какія именно соотношенія должны быть предпочтены другимъ. Сначала думали, что самая выгодная система величинъ $x, y, z \ldots$ есть та, для которой наибольшая изъ погрѣшностей $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots$ будетъ менѣе, нежели при всякой другой системѣ. Смот. SITUATIONS (MÉTHODE DES). Другіе полагали, что наивыгоднѣйшая система соотвѣтствуетъ тому предположенію, когда сумма погрѣшностей $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ есть наименьшая. Но когда анализъ вѣроятностей былъ приложенъ къ естественнымъ наукамъ, тогда увидѣли, что выборъ наивыгоднѣйшихъ выводовъ зависитъ не только отъ численныхъ величинъ погрѣшностей, но еще и отъ соотвѣтствующихъ имъ вѣроятностей. Наивыгоднѣйшій выводъ будетъ тотъ, для котораго сумма произведеній всѣхъ погрѣшностей (принимая ихъ всегда съ положительными знаками), помноженныхъ на соотвѣтствующія имъ вѣроятности, будетъ наименьшая. Такимъ образомъ наблюдателя сравниваютъ съ игрокомъ, который можетъ только проиграть, и стараются сдѣлать такъ, чтобы математическая величина его проигрыша была наименьшая. Такое сравненіе оправдывается тѣмъ, что погрѣшности наблюденій, какъ положительныя такъ и отрицательныя, въ равной степени должны быть избѣгаемы, почему онѣ и могутъ быть приняты за проигрышъ въ игрѣ; правда, въ строгомъ смыслѣ, въ игрѣ принимаютъ въ соображеніе не физическую, а нравственную выгоду (Смот. AVANTAGE), но, въ настоящемъ случаѣ, гдѣ погрѣшность въ измѣреніи очевидно не можетъ имѣть вліянія на нравственное состояніе наблюдателя, должно разсматривать только математическую выгоду.

Но какъ опредѣлить *наименьшую* величину суммы ошибокъ, помноженныхъ на соотвѣтствующія имъ вѣроятности, и какъ найти видъ функціи, выражающей вѣроятности погрѣшностей? Предѣлы нашего Лексикона не позволяютъ намъ изложить рѣшеніе этого вопроса; отсылаемъ читателей, желающихъ изучить сію теорію, весьма плодовитую по своимъ приложеніямъ, къ сочиненію Лапласа: *Théorie analytique des Probabilités.* Впрочемъ, мы предложимъ нѣкоторыя подробности по сему предмету въ статьяхъ: ÉQUATIONS DE CONDITION, PROBABILITÉ, TABLES ASTRONOMIQUES, MESURES GÉODÉSIQUES, CARRÉS (MÉTHODE DES MOINDRES).

AX.

AXE. (Геом.) **ОСЬ.** Такъ можно назвать въ обширномъ смыслѣ этого слова, всякую прямую линію, проходящую внутри или внѣ какой либо фигуры или тѣла.

Axe diamétral. *Діаметральная ось.* Прямая, раздѣляющая по-поламъ систему параллельныхъ хордъ въ нѣкоторыхъ кривыхъ. Всѣ коническія сѣченія допускаютъ безчисленное множество діаметральныхъ осей. Если діаметральная ось будетъ перпендикулярна къ хордамъ, то она принимаетъ названіе *главной оси (axe principal)*. Очевидно, что главная ось раздѣляетъ кривую на двѣ симетрическія части.

Axe d'une courbe или axe principal. См. выше.

Axe de rotation или de circonvolution. Ось вращенія. Линія, около которой обращается или плоская кривая линія, или какая нибудь площадь, образующія своимъ движеніемъ, первая, *поверхность вращенія (surface de révolution)*, а вторая, *тѣло вращенія (solide de révolution)*.

Axe d'un cercle. Ось, діаметръ, поперечникъ круга; прямая, проходящая чрезъ центръ круга, и ограниченная съ обѣихъ сторонъ его окружностію.

Axe d'une sphère. Ось, діаметръ, поперечникъ шара.

Подъ словомъ *ось* разумѣютъ также прямую, проведенную изъ вершины какой ни есть фигуры или тѣла къ средней точкѣ основанія. Напримѣръ: *Axe d'une section conique, d'un cylindre, d'un cône*, и пр. *Ось конической кривой, ось цилиндра, ось конуса* и пр.

Axe transverse или le grand axe de l'ellipse. Поперечная или большая ось эллипса. Смот. ELLIPSE.

Axe transverse de l'hyperbole. Поперечная ось, діаметръ иперболы. См. HYPERBOLE.

Axe conjugué или second axe de l'ellipse, de l'hyperbole. Сопряженная или вторая ось эллипса, иперболы. Смот. ELLIPSE, HYPERBOLE.

Axe de la parabole. Ось параболы. Неопредѣленная прямая, проходящая чрезъ вершину и фокусъ параболы.

Axes des coordonnées. Координатныя оси, оси координатъ. Такъ называются прямыя, взаимно пересѣкающіяся, къ коимъ относятъ кривыя линіи и поверхности для удобнѣйшаго изслѣдованія ихъ вида и свойствъ. Когда разсматриваютъ плоскую кривую, то проводятъ въ ея плоскости двѣ координатныя оси; одна изъ нихъ называется *осью абсциссъ*, а другая *осью ординатъ*, или, чаще, осью x-въ и осью y-въ. Кривыя двоякой кривизны и поверхности, относятъ къ тремъ координатнымъ осямъ. Одну называютъ *осью абсциссъ* или x-въ, другую *осью горизонтальныхъ ординатъ* или y-въ, а третью, *осью вертикальныхъ ординатъ* или z-въ. Чаще всего координатныя оси принимаются прямоугольными. Смот. COORDONNÉES, ABSCISSE, ORDONNÉE.

Axe des abscisses. Ось абсциссъ; ось, на которой считаются абсциссы. См. ABSCISSE.

Axe des ordonnées. Ось ординатъ; ось, параллельная ординатамъ. Смот. ORDONNÉE.

Axes rectangulaires. Прямоугольныя оси. Оси, пересѣкающіяся подъ прямымъ угломъ.

Axes obliquangles. Косоугольныя оси. Оси, пересѣкающіяся не подъ прямымъ угломъ.

Axes primitifs. Первоначальныя оси. Когда, при рѣшеніи какой либо задачи, вводятъ другія координатныя оси, то старыя оси въ отношеніи къ новымъ, называютъ *первоначальными*. Въ томъ же смыслѣ употребляютъ наименованіе *первоначальныхъ координатныхъ плоскостей*.

Axe d'un solide. Ось тѣла.

Axe diamétral d'un solide. Діаметральная, поперечная ось тѣла. Ось, проходящая чрезъ центръ тѣла.

Axe principal d'un solide. Главная ось тѣла. Главная ось главнаго сѣченія тѣла. См. SECTION PRINCIPALE. Напримѣръ, главныя оси эллипсоида, опредѣляемаго уравненіемъ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, суть оси координатъ. — Иногда подъ главною осью разумѣютъ опредѣленную часть ея направленія; такъ въ приведенномъ сей-часъ эллипсоидѣ, линіи $2a$, $2b$, $2c$ можно назвать главными осями.

AXE. (Мех.) **ОСЬ.** Въ теорической Механикѣ *осью* называется прямая линія, около которой тѣло дѣйствительно вращается, или только можетъ вращаться. Въ прикладной же Механикѣ подъ *осью, валомъ, веретеномъ (axe, cylindre, arbre, essieu)*, разумѣютъ прямую жердь, деревянную или металлическую, обыкновенно проходящую чрезъ центръ какого нибудь тѣла, и около которой происходитъ вращательное движеніе сего послѣдняго. Въ этомъ смыслѣ говоримъ: *ось маятника, колеса, часовъ* и проч.

L'axe d'oscillation d'un pendule. Ось качанія въ отвѣсѣ; прямая линія, параллельная горизонту, проходящая чрезъ точку, около которой отвѣсъ совершаетъ свои качанія.

Axes principaux или axes permanents. Главныя или постоянныя оси. Такъ называются въ Механикѣ оси, около которыхъ, при вращательномъ движеніи твердаго тѣла, не подверженнаго никакому постороннему дѣйствію, центробѣжныя силы всѣхъ частицъ взаимно уничтожаются. Смот. INERTIE (MOMENTS D').

Axes instantanés de rotation. Мгновенныя оси вращенія. Движеніе твердаго тѣла въ самомъ общемъ случаѣ, составлено: 1) изъ поступательнаго движенія, одинаковаго для всѣхъ его точекъ, и равнаго движенію центра тяжести и 2) изъ вращенія около оси, проходящей чрезъ сей центръ, но, по положенію своему, измѣняющейся въ каждое мгновеніе, такъ, что тѣло обращается около этой оси только въ продолженіи времени безконечно малаго. Сію-то прямую и называютъ *мгновенною осью вращенія.* — Если въ твердомъ тѣлѣ находится неподвижная точка, то движеніе его будетъ вращательное около оси, проходящей чрезъ неподвижную точку, и измѣняющейся въ своемъ направленіи. И эта прямая также называется мгновенною осью вращенія, ибо она, дѣйствительно служитъ осью вращенія только одно мгновеніе. Впрочемъ, когда тѣло свободно, то, собственно говоря, существуетъ безконечное число мгновенныхъ осей; та изъ нихъ, которая проходитъ чрезъ центръ тяжести, и о которой мы упомянули выше, наиболѣе способна къ опредѣленію вращательнаго движенія.

Можно принимать, что движеніе твердаго тѣла состоитъ изъ его вращенія около оси, проходящей чрезъ произвольную точку, и поступательнаго движенія, одинаковаго, какъ по скорости такъ и по направленію, для всѣхъ точекъ тѣла, и равнаго движенію той точки, чрезъ которую ось проведена. Смот. MOUVEMENTS (COMPOSITION DES). Сіи два движенія, поступательное и вращательное, совокупляются и не причиняютъ никакого помѣшательства одно другому. Каждое изъ нихъ происходитъ отдѣльно, независимо другъ отъ друга, и твердое тѣло въ каждое мгновеніе принимаетъ то положеніе, которое бы оно имѣло, еслибъ сіи два движенія происходили одно послѣ другаго.

Всѣ мгновенныя оси имѣютъ одно и то же направленіе для опредѣленнаго мгновенія; но одна изъ нихъ особенно примѣчательна: мы разумѣемъ ту, параллельно которой происходитъ поступательное движеніе. Принимая въ соображеніе эту ось, мы весьма ясно представляемъ себѣ самое общее движеніе, какое можетъ имѣть твердое тѣло. Такое движеніе состоитъ изъ вращательнаго около нѣкоторой оси, и движенія поступательнаго или скользенія по той же оси. Еслибы послѣднее прекратилось въ извѣстное мгновеніе, то *мгновенная ось вращенія* приняла бы названіе *внезапной (axe spontané de rotation).*

Однакоже замѣтимъ, что поступательное движеніе вообще не уничтожается, и слѣдовательно, чаще всего, не будетъ внезапной оси, а будетъ только мгновенная ось, безпрестанно измѣняющаяся по своему положенію. Движеніе твердаго тѣла будетъ состоять изъ вращенія около перемѣнной прямой и поступательнаго перемѣннаго движенія около той же прямой. — Впрочемъ, чаще употребляютъ наименованіе внезапной оси вращенія въ другомъ смыслѣ. Положимъ, что на твердое тѣло дѣйствуютъ какія ни есть силы, и что дѣйствія ихъ вдругъ прекращаются; ось, около которой тѣло начнетъ вращаться въ первое мгновеніе послѣ прекращенія дѣйствія силъ, будетъ та, которую вообще называютъ *внезапною осью вращенія.* Для дальнѣйшихъ подробностей о семъ важномъ предметѣ, Смот. ROTATION (MOUVEMENT DE).

Axe spontané de rotation. Смот. выше.

Axe d'un couple. Ось пары силъ. Axe central des couples; центральная ось паръ. Линія перпендикулярная къ плоскости равнодѣйствующей пары. См. COUPLE.

Axe dans le tambour, essieu dans le tour *(axis in peritrochio)*, или, употребительнѣе *tour, treuil, валъ.* Одна изъ простыхъ машинъ. Смот. TOUR, CABESTAN,

AXE. (Астр.) **ОСЬ.** Прямая линія, проходящая чрезъ центръ тяжести земли или другихъ небесныхъ тѣлъ, и около которой происходитъ ихъ вращательное движеніе.

Axe de l'horizon, de l'équateur. Ось горизонта, ось экватора. Прямая, проходящая чрезъ центръ каждаго изъ сихъ круговъ, и перпендикулярная къ ихъ плоскости.

Axe d'un cadran solaire. (Гном.) Ось квадрана, ось солнечныхъ часовъ. Прутъ на квадрантѣ, указывающій часъ дня своею тѣнью. См. CADRAN.

AXE. (Опт.) **ОСЬ.** *Axe optique* или *axe visuel*; *оптическая, зрительная ось.* Лучъ проходящій чрезъ центръ глаза, и падающій перпендикулярно на глазъ.

Axe d'une lentille. Ось оптическаго стекла. Смот. LENTILLE.

AXIFUGE. (Мех.) **ЦЕНТРОБѢЖНЫЙ** (собственно *осебѣжный*). *Force axifuge, центробѣжная сила;* Смот. CENTRIFUGE, FORCE.

AXIOME. АКСІОМА, САМОИСТИНА. Предложеніе само собой очевидное. Напримѣръ: *двѣ величины, порознь равныя третьей, равны между собою; между двумя точками нельзя провести болѣе одной прямой линіи,* и проч.

Аксіома, при разысканіи истины, есть то самое, что первоначальныя идеи въ отношеніи къ сложнымъ. Она есть такого рода истина, которую невозможно разложить на другія, простѣйшія, и самая вразумительная для насъ.

AZ.

AZIMUT или **AZIMUTH.** (Астр.) **АЗИМУТЪ.** Азимутъ свѣтила есть уголъ, составляемый вертикальнымъ кругомъ свѣтила съ меридіаномъ мѣста наблюденія. — *Земнымъ азимутомъ (azimut terrestre)* какого либо предмета при мѣстѣ наблюденія, называется плоскій уголъ, заключающійся между полуденною линіею и лучемъ зрѣнія, направленнымъ на тотъ предметъ. Для опредѣленія азимутовъ употребляются угломѣрные инструменты, составленные изъ двухъ круговъ, одного горизонтальнаго, а другаго вертикальнаго. Смот. THÉODOLITE.

AZIMUTAL. АЗИМУТАЛЬНЫЙ. Принадлежащій или относящійся къ азимуту. *Cadran azimutal* или *analemmatique. Аналеммагическій квадрантъ.* См. CADRAN ANALEMMATIQUE.

B.

BA.

BABBAGE (MACHINE A CALCULER DE). БАББЕДЖЕВА СЧЁТНАЯ, ЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАШИНА. Всѣ слыхали объ удивительной счётной машинѣ, устроенной въ наше время Англійскимъ математикомъ *Баббеджемъ;* за недостаткомъ свѣдѣній объ ея устроеніи, мы помѣстимъ здѣсь въ переводѣ письмо Г-на Баббеджа къ Г-ну *Стассарту (de Stassart),* Президенту Брюссельской Королевской Академіи Наукъ, читанное въ общемъ засѣданіи 7 и 8 Мая 1835 года. Замѣтимъ, что Г. Баббеджъ говоритъ въ своемъ письмѣ объ *второй,* новой счётной своей машинѣ. Вотъ его слова:

„Я самъ удивляюсь могуществу *(puissance)* составляемой мною машины; за годъ передъ симъ, я не повѣрилъ бы возможности такого результата. Эта машина можетъ производить дѣйствія надъ сто перемѣнными (числами, которыя могутъ измѣняться); каждое число можетъ состоять изъ 25 цифръ. Если изобразимъ чрезъ $v_1, v_2 \ldots v_n$ какія угодно числа, гдѣ n менѣе ста, и предположимъ, что имѣемъ какую ни есть функцію $f(v_1, v_2, v_3 \ldots v_n)$, которая составляется посредствомъ сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, извлеченія корней и возвышенія въ степени, то машина опредѣлитъ численную величину этой функціи. Она произведетъ подстановленіе сей величины на мѣсто v, или иной перемѣнной, и вычислитъ новую функцію относительно v_1. При пособіи этой машины почти всѣ уравненія въ конечныхъ разностяхъ могутъ быть приведены въ таблицы. Положимъ, что посредствомъ наблюденій получили до тысячи величинъ a, b, c, d, и желаемъ вычислить ихъ по формулѣ *)

$$p = \sqrt{\frac{a+b}{cd}};$$

сперва приготовляютъ машину къ вычисленію этой формулы, и располагаютъ первый рядъ величинъ a, b, c, d; потомъ машина вычислитъ ихъ,

*) Это мѣсто намъ кажется невразумительнымъ.

напечатаетъ и уравнитъ нулю; наконецъ, зазвѣнитъ колокольчикъ, и тѣмъ самымъ дастъ знать, что надобно расположить второй рядъ постоянныхъ. Когда, между какимъ ни есть числомъ послѣдовательныхъ коэффиціентовъ ряда, существуетъ отношеніе, выражающееся, какъ сказано было выше, то машина вычислитъ ихъ, и опредѣлитъ послѣдовательно члены того ряда; послѣ того, можно будетъ расположить машину такъ, что она дастъ сумму ряда для какихъ угодно значеній перемѣннаго количества."

Г. Баббеджъ, оканчивая письмо, извѣщаетъ, что онъ уже успѣлъ преодолѣть самыя большія трудности изобрѣтенія, и что чертежи машины будутъ окончаны чрезъ нѣсколько мѣсяцевъ. За недостаткомъ дальнѣйшихъ извѣстій, мы не знаемъ, въ какой степени успѣхъ увѣнчалъ предначертанія Г-на Баббеджа.

BACULAMÉTRIE. (Геом.) **БАКУЛАМЕТРІЯ;** искусство измѣрять приступныя и неприступныя высоты и разстоянія посредствомъ кольевъ.

BAGUETTES или **BATONS DE NEPER** (*ossa Neperi*). **НЕПЕРОВЫ ПАЛОЧКИ.** Ариѳметическій приборъ, изобрѣтенный *Неперомъ*, и посредствомъ котораго можно довольно скоро производить умноженія и дѣленія надъ большими числами.

Чертежъ 6 (листъ II) изображаетъ приборъ Неперовыхъ палочекъ. Дощечки *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *j*, *k*, всѣ отдѣльныя; онѣ дѣлаются изъ дерева, металла, картузной бумаги и. т. п. Каждая изъ нихъ раздѣляется на девять квадратиковъ, а каждый изъ сихъ послѣднихъ, за исключеніемъ верхняго, подраздѣляется своею діагональю на два треугольника. Въ квадратикахъ пишутъ числа, заключающіяся въ обыкновенной таблицѣ умноженія такъ, чтобы единицы находились въ треугольникѣ съ правой стороны, а десятки въ другомъ треугольникѣ. Сверхъ того, на пластинкѣ единицъ *a*, назначаются просто въ серединѣ квадратовъ числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, а на пластинкѣ *b*, пишутся нули съ правой стороны.

Неперовъ приборъ употребляется слѣдующимъ образомъ: положимъ что желаемъ умножить 9769 на 7; располагаемъ палочки такъ, чтобы верхнія числа изображали множимое, какъ показано на чертежѣ 7 (листъ II). Потомъ разсматриваемъ горизонтальный рядъ, соотвѣтствующій множителю 7 въ палочкѣ *a*, и производимъ надъ числами этого ряда слѣдующія дѣйствія: начинаемъ съ правой стороны, и пишемъ сперва (3); потомъ, складываемъ цифры 6 и 2, заключающіяся въ первомъ ромбѣ; сумму ихъ (8) приписываемъ съ лѣвой стороны къ (3) и получаемъ (83); далѣе, складываемъ числа 4 и 9 втораго ромба, и отъ суммы ихъ 13, пишемъ (3) съ лѣвой стороны 83-хъ, а 1 удерживаемъ въ памяти, чтобы сложить ее съ числами слѣдующаго ромба; такимъ образомъ имѣемъ (383), и продолжаемъ: $1+4+3=8$; приписываемъ (8) съ лѣвой стороны числа (383), и находимъ (8383). Наконецъ, прибавляя цифру (6), заключающуюся въ послѣднемъ треугольникѣ, получаемъ для искомаго произведенія число 68383. Еслибы множитель заключалъ въ себѣ болѣе одной цифры, то слѣдовало бы съ каждою изъ нихъ поступать точно такъ, какъ сейчасъ было показано, и потомъ сложить всѣ частныя произведенія какъ въ обыкновенномъ умноженіи.

Для дѣленія, размѣщаемъ палочки такъ, чтобы верхнія числа изображали дѣлителя. Съ лѣвой стороны, какъ и при умноженіи, ставимъ пластинку единицъ *a*. Положимъ, напримѣръ, что желаемъ раздѣлить 6385 на 84; располагаемъ палочки, какъ показано на чертежѣ 8 (листъ II). Потомъ, опускаясь, ищемъ, который изъ горизонтальныхъ рядовъ даетъ сумму, ближайшую къ той части дѣлимаго, въ которой должно искать, сколько разъ заключается дѣлитель. Въ настоящемъ случаѣ эта часть $=638$, потому что въ 63 дѣлитель 84 не заключается. Такимъ образомъ находимъ сумму 588, соотвѣтствующую цифрѣ 7 въ пластинкѣ *a*; и такъ, пишемъ въ частномъ (7), потомъ вычитаемъ 5880 изъ 6385 и получаемъ 505; ближайшая къ сему послѣднему числу сумма въ горизонтальныхъ рядахъ есть 504, соотвѣтствующая цифрѣ (6); приписываемъ эту цифру къ 7 съ правой стороны, и получаемъ (76); вычитаемъ 504 изъ 505, и находимъ въ остаткѣ (1). Слѣдовательно, частное, происходящее отъ раздѣленія 6385 на 84, будетъ 76, а остатокъ 1.

Замѣтимъ, что при дѣйствіяхъ надъ большими числами, должно имѣть по нѣскольку одинаковыхъ палочекъ. Впрочемъ Неперовъ приборъ, равно какъ и нѣкоторые другіе, болѣе любопытенъ, нежели полезенъ на практикѣ.

*

BAGUETTES LOGARITHMIQUES. Смот. LOGARITHMIQUES.

BAGUETTE DIVINATOIRE или **DIVINE** или еще **VERGE D'AARON. ГАДАТЕЛЬНЫЙ, ВОЛШЕБНЫЙ ЖЕЗЛЪ.** Такъ называется сучекъ, обыкновенно изъ орѣшника, перегнутый въ дугу, который, по увѣренію шарлатановъ, имѣетъ свойство открывать своими движеніями подземные ключи, присутствіе золота, серебра, также воровъ, убійцъ и проч. Вращательное движеніе жезла, который держатъ около концовъ обѣими руками, легко объясняется, допустивъ почти непримѣтныя движенія пальцевъ, производимыя мнимымъ гадателемъ.

BAISEMENT. Уст. слово. (Геом.) **СОПРИКАСАНІЕ.** См. CONTACT, OSCULATION.

BAISER. (Геом.) не употр. **ОБХВАТЫВАТЬ, СОПРИКАСАТЬСЯ.** Когда двѣ кривыя линіи касаются одна другой, и бываютъ вогнуты въ одну и ту же сторону, то одна изъ нихъ будетъ *обхватывать* другую. Но ежели одна изъ сихъ кривыхъ обращена вогнутостію въ извѣстную сторону, а другая выпуклостію въ ту же самую сторону, то кривыя будутъ просто *касаться* одна другой. Впрочемъ, вмѣсто слова *baisement*, преимущественно употребляютъ *osculation* (*соприкасаніе*). Смот. CONTACT.

BALANCE. (Мех.) **ВѢСЫ.** Машина, служащая для взвѣшиванія тѣлъ. Вѣсы относятся къ рычагу (Смот. LEVIER), и поэтому бываютъ различныхъ родовъ.

Balance ordinaire. Обыкновенные вѣсы состоятъ изъ *коромысла (fléau) AB* (чертежъ 9, листъ II), на оконечностяхъ котораго привѣшены *чашки (bassins) E* и *F;* въ одну изъ нихъ кладется взвѣшиваемое тѣло, а въ другую гирьки опредѣленнаго вѣса (развѣсы). Коромысло должно свободно обращаться около оси, проходящей сквозь *обоймицу* (*chasse*) *CD;* сверхъ того, стрѣлка *ab*, утвержденная перпендикулярно къ коромыслу на его серединѣ, показываетъ своимъ направленіемъ, будетъ ли коромысло горизонтально. Для вѣрности вѣсовъ необходимо, чтобы плечи, то есть части *CA* и *CB*, имѣли одинакій вѣсъ и длину, и чтобы коромысло по возможности свободнѣе обращалось около своей оси *C*. Когда послѣднее условіе выполнено, то вѣсы называются *чуткими (sensible)*.

При взвѣшиваніи тѣлъ, слѣдуетъ прибавлять или отнимать развѣсовъ до тѣхъ поръ, пока стрѣлка *ab* не приметъ вертикальнаго положенія; когда достигли этого, то можемъ положиться на вѣрность взвѣшиванія, если вѣсы имѣютъ тѣ достоинства, о которыхъ мы говорили. Впрочемъ и посредствомъ невѣрныхъ вѣсовъ, когда невѣрность происходитъ только отъ несовершенства коромысла, можно опредѣлить истинный вѣсъ тѣла. Дѣйствительно, положимъ, что взвѣшивая тѣло *X* въ чашкѣ *E*, привели его въ равновѣсіе грузомъ *P*; слѣдовательно, изобразивъ разстояніе *CA* чрезъ *p*, а *CB* чрезъ *q*, получимъ, по закону равновѣсія рычага,

$$pX = qP.$$

Переложивъ тѣло *X* въ чашку *F*, и приведя его въ равновѣсіе грузомъ *Q*, положеннымъ въ чашку *E*, найдемъ

$$qX = pQ.$$

Перемноживъ сіи два уравненія между собою и раздѣливъ на pq, получимъ, по извлеченіи квадратнаго корня,

$$X = \sqrt{PQ}.$$

И такъ, истинный вѣсъ тѣла *X* есть средняя геометрическая между двумя найденными вѣсами. Напримѣръ, если бы при первомъ взвѣшиваніи нашли 100 золотниковъ, а при второмъ 81 зол., то истинный вѣсъ тѣла былъ бы $\sqrt{100.81} = 90$ зол.

Можно найти вѣсъ тѣла посредствомъ невѣрныхъ вѣсовъ еще проще: положимъ, что данное для взвѣшиванія тѣло *X*, привели какъ можно точнѣе въ равновѣсіе какимъ ни есть грузомъ *P*; вынимаемъ тѣло *X* изъ чашки, въ которую оно было положено, напримѣръ изъ *F*, а на мѣсто его, въ ту же чашку *F*, кладемъ развѣсы до тѣхъ поръ, пока не приведемъ въ равновѣсіе груза *P*. Очевидно, что совокупность развѣсовъ покажетъ истинный вѣсъ взвѣшиваемаго тѣла *X*, отъ какой бы причины не происходила невѣрность вѣсовъ.

Balance romaine или просто la Romaine. Римскіе вѣсы, на которыхъ взвѣшиваются тѣла посредствомъ постояннаго груза, передвигаемаго по длинѣ коромысла. Они названы *Римскими*, потому что были въ большомъ употребленіи у Римлянъ.

Чертежъ 10 (листъ II) представляетъ Римскіе вѣсы. Они состоятъ изъ коромысла *AB*, обращающагося около оси въ обоймицѣ CD, которая раздѣляетъ его на два неравныя плеча CA и CB. Къ короткому плечу CA привѣшивается чашка E или крюкъ для прицѣпленія взвѣшиваемаго тѣла, а по длинному плечу CB ходитъ на кольцѣ постоянный грузъ P, уравновѣшивающій вѣсъ тѣла.

Для взвѣшиванія тѣлъ посредствомъ Римскихъ вѣсовъ, слѣдуетъ раздѣлить надлежащимъ образомъ коромысло; на сей конецъ передвигаютъ постоянный грузъ P до тѣхъ поръ, пока весь приборъ не придетъ въ равновѣсіе, то есть, пока коромысло не приметъ горизонтальнаго положенія. Очевидно, что въ точкѣ, гдѣ будетъ тогда находиться подвижной грузъ, надобно отмѣтить нуль дѣленія, ибо въ этомъ случаѣ нѣтъ никакого тѣла въ чашкѣ. Пусть будетъ K эта точка. Положимъ теперь что въ чашку E, или къ крючку, привѣсили грузъ равный P; весьма естественно принимать сей послѣдній за единицу вѣса (напримѣръ, одинъ фунтъ); равновѣсіе нарушится, и для возстановленія его, надобно будетъ удалить подвижную гирю отъ точки подпоры C; для опредѣленія же степени сего удаленія, означаемъ AC чрезъ p, и переносимъ вѣсъ P въ точку C; отсюда произойдетъ пара Pp; чтобы уничтожить ее, мы должны приложить, по другую сторону подпорной точки C, пару силъ равную и противную сказанной, что должно быть выполнено однимъ только перенесеніемъ подвижнаго груза P. Для этого, передвигаемъ подвижной грузъ P изъ K въ I такъ, чтобы $KI = p$; въ этой точкѣ I означаемъ 1 дѣленія. Очевидно, что для полученія другихъ точекъ дѣленія, надлежитъ отмѣтить 2 на разстояніи $2KI = 2p$ отъ K, или отъ нулевой точки для двойнаго вѣса $2p$; 3, на разстояніи $3p$, для тройнаго вѣса $3P$; и проч.

Дробныя части вѣса получаются точно такимъ образомъ: вѣсъ $\frac{1}{2}P$ будетъ соотвѣтствовать разстоянію $\frac{1}{2}p$ отъ точки K; $\frac{1}{3}P$, разстоянію $\frac{1}{3}p$ отъ той же точки, и такъ далѣе.

Peson. Безменъ и Безмѣнъ или Контарь. Вѣсы, въ которыхъ точка подпоры измѣняетъ свое положеніе. Безменъ въ большомъ употребленіи въ Россіи, также въ Даніи и Швеціи, почему Французы и называютъ его *peson Danois, peson Suèdois*.

Безменъ состоитъ изъ коромысла AB (черт. 11, листъ II); къ концу B придѣлана масса M, а въ A привѣшивается чашка E, или крюкъ, на которой вздѣваютъ взвѣшиваемое тѣло; по длинѣ коромысла ходитъ кольцо, дѣлаемое изъ проволоки, струны или бичевки, которое держутъ за ручку CD, и двигаютъ до тѣхъ поръ, пока безменъ не придетъ въ равновѣсіе, то есть, пока коромысло его не получитъ положенія горизонтальнаго. Очки или точки дѣленія на коромыслѣ безмена опредѣляются слѣдующимъ образомъ: приемемъ массу M, рычагъ AB и чашку E или крюкъ за одинъ вѣсъ P, сосредоточенный въ центрѣ тяжести G всего безмена; этотъ центръ соотвѣтствуетъ o дѣленія; пусть будетъ Q вѣсъ тѣла, который желаемъ опредѣлить, p разстояніе AC, кольца отъ точки A, а q разстояніе того же кольца отъ центра тяжести G безмена, то есть, длина CG. По условію равновѣсія рычага найдется

$$qP = pQ;$$

но если изобразимъ извѣстное разстояніе AG чрезъ a, то будемъ имѣть $p + q = a$; слѣдовательно получимъ

$$p = \frac{aP}{P+Q};$$

и такъ, по извѣстнымъ P и a, легко найти на коромыслѣ точки дѣленія, соотвѣтствующія разнымъ вѣсамъ, которые изображены у насъ буквою Q.

Хотя безменъ, по своему устроенію, и довольно удобенъ, но, болѣе другаго рода вѣсовъ, подверженъ невѣрности, и, при недобросовѣстности продавца, весьма способенъ служить орудіемъ обмана.

Есть много другихъ приборовъ для взвѣшиванія; безполезно приводить ихъ. Мы упомянемъ только объ *Робервалевыхъ вѣсахъ*, представляющихъ довольно примѣчательный случай.

Balance de Roberval. Робервалевы вѣсы. Такъ называется изобрѣтенный Робервалемъ особеннаго рода рычагъ, на которомъ уравновѣшиваются два равные груза, хотя, повидимому, плечи рычаговъ, имъ соотвѣтствующія, не равны между собою. Чертежъ 12 (листъ II) изображаетъ эту машину. Измѣняемаго вида параллелограммъ, составленный изъ четырехъ линеекъ AB, CD, AC, BD, обращается около неподвижныхъ осей въ точкахъ a и b стойки LK. Перпендикулярно къ линейкамъ AC и BD, въ точкахъ f и l

прикрѣплены полоски fk и lm, различной длины. Къ концамъ k и m привѣшиваются грузы P и Q; если эти два груза равны между собою, то, на Робервалевыхъ вѣсахъ, они уравновѣшиваются, несмотря на то, что разстоянія ихъ отъ подпорныхъ точекъ a и b различны. Это самое, съ перваго взгляда, кажется противорѣчащимъ *началу равновѣсія на рычагѣ;* но если внимательно разсмотримъ условія равновѣсія на сей машинѣ, то увидимъ, что сей кажущійся парадоксъ объясняется весьма удовлетворительнымъ образомъ.

Дѣйствительно, положимъ что въ точкѣ f, (черт. 13 листъ II), по направленію AC, приложили двѣ силы, равныя P, и прямопротивныя. Получимъ одну силу P, дѣйствующую по направленію fC и пару силъ $(P, -P)$, коей плечо равно fk. Но, по свойству паръ (См. COUPLE), $(P, -P)$ можно будетъ замѣнить другою парою $(P', -P')$, находящеюся въ плоскости параллелограмма $ABCD$, и приложенною къ точкамъ A и C такъ, что плечо ея равно длинѣ AC; направленіе же силъ P' и $-P'$, можно будетъ предположить такимъ, какъ показано на чертежѣ. Пара $(P', -P')$, находясь въ такомъ положеніи, очевидно уничтожится неподвижностію точекъ a и b, къ которымъ направляются ея составляющія силы; и такъ, останется только одна сила P, приложенная къ точкѣ f по направленію fC; точку приложенія этой силы можно перенесть въ A.

Точно такимъ образомъ докажемъ, что силу Q, приложенную въ m, можно замѣнить тою же силою Q, но приложенною въ B по направленію BD. И такъ останутся двѣ силы P и Q, приложенныя къ концамъ A и B рычага, коего плечи aA и aB равны между собою; слѣдовательно, если самыя силы P и Q равны, то онѣ будутъ находиться въ равновѣсіи. Для дальнѣйшихъ подробностей отсылаемъ читателей къ сочиненію: *Élémens de Statique par Poinsot* или къ Русскому переводу этой книги.

Balance hydrostatique. Гидростатическіе вѣсы. Вѣсы, устроенные такъ, чтобы можно было взвѣшивать тѣла и въ водѣ. Для этого стоитъ только въ нижней части одной чашки обыкновенныхъ вѣсовъ придѣлать небольшой крючокъ; этимъ крючкомъ зацѣпляютъ, посредствомъ волоска или тонкой шелковой нити, тѣло, которое желаютъ взвѣсить въ водѣ. — Нѣкоторые физики называютъ *гидростатическими вѣсами* инструментъ, который преимущественно извѣстенъ подъ наименованіемъ *ареометра.* Смот. ARÉOMÈTRE.

Посредствомъ гидростатическихъ вѣсовъ опредѣляются: 1) *объёмъ твердаго тѣла,* 2) *плотность воды и другихъ жидкостей,* 3) *плотность твердаго тѣла* и 4) *количество составныхъ частей какой либо механической смѣси.*

Всѣ сіи опредѣленія основаны на Архимедовомъ началѣ Гидростатики, въ слѣдствіе котораго тѣла, погруженныя въ воду, теряютъ изъ своего вѣса, вѣсъ вымѣщенной воды.

Для опредѣленія объёма твердаго тѣла, прицѣпляютъ сіе послѣднее къ крючку, и взвѣшиваютъ сперва въ воздухѣ (или, точнѣе, въ пустотѣ), потомъ опускаютъ его въ сосудъ, наполненный водою; такъ какъ тѣло потеряетъ изъ своего вѣса, вѣсъ вымѣщенной воды, то равновѣсіе нарушится; для возстановленія равновѣсія, надобно будетъ положить надлежащій вѣсъ въ чашку, подъ которою привѣшено тѣло. Этотъ прибавочный вѣсъ, выраженный посредствомъ вѣса кубическаго дюйма воды, покажетъ объёмъ взвѣшиваемаго тѣла въ кубическихъ дюймахъ. Очевидно, что если объёмъ тѣла будетъ извѣстенъ заблаговременно, то показанное сей-часъ дѣйствіе послужитъ къ опредѣленію *плотности* воды. — Если вмѣсто воды возьмемъ другую жидкость, то такимъ же точно образомъ можемъ найти ея плотность.

Чтобы опредѣлить плотность твердаго тѣла, взвѣшиваютъ его сперва въ воздухѣ, потомъ въ водѣ; такимъ образомъ получаютъ два различные вѣса, и потомъ узнаютъ, сколько тѣло потеряло въ водѣ изъ своего вѣса. Раздѣливъ найденный вѣсъ тѣла въ воздухѣ, на потерянный имъ въ водѣ, получимъ относительный вѣсъ тѣла, или его плотность. Очевидно впрочемъ, что для употребленія сего способа, надобно чтобы тѣло было тяжелѣе воды, и притомъ, чтобы оно не разлагалось и не растворялось въ водѣ. Если же тѣло будетъ легче воды, то, при его взвѣшиваніи въ водѣ, прибавляютъ къ нему другое тяжелое тѣло, котораго, какъ вѣсъ въ воздухѣ, такъ и потеря вѣса въ водѣ, предварительно опредѣлены. Вычтя изъ общей потери въ водѣ потерю тяжелаго тѣла, и раздѣливъ на сію разность вѣсъ даннаго тѣла въ воздухѣ, получимъ его плотность. Когда тѣло растворяется въ водѣ, то опредѣляютъ сперва его плотность относительно такой жидкости, въ которой оно не можетъ растворяться; сверхъ того, предполагается, что плотность второй жидкости относительно воды извѣстна. Перемноживъ между собою числа, выражающія сіи двѣ плотности, получимъ искомую плотность тѣла, растворяющагося въ водѣ.

Легко будетъ понять теперь, какимъ образомъ опредѣляются количества составныхъ веществъ механической смѣси; дѣйствительно, пусть будетъ C смѣсь, состоящая изъ веществъ A и B. Изобразимъ чрезъ p вѣсъ смѣси, чрезъ x вѣсъ вещества A, входящаго въ нее; $p-x$ будетъ вѣсъ вещества B. Предположимъ, что вѣсъ p смѣси C теряетъ въ водѣ c изъ своего вѣса; что вѣсъ p вещества A теряетъ a, и наконецъ вѣсъ p вещества B, теряетъ b. Для опредѣленія x поступаемъ слѣдующимъ образомъ: изъ предположеннаго легко заключить, что вѣсъ x вещества A теряетъ въ водѣ изъ своего вѣса $\frac{ax}{p}$, ибо эта величина опредѣляется четвертымъ членомъ пропорціи $p:x=a:\frac{ax}{p}$; точно такимъ образомъ увидимъ, что вѣсъ $p-x$ вещества B теряетъ въ водѣ изъ своего вѣса $\frac{b(p-x)}{p}$. И такъ, смѣсь C потеряетъ въ водѣ изъ своего вѣса $\frac{ax}{p}+\frac{b(p-x)}{p}$; но, непосредственнымъ взвѣшиваніемъ находимъ, что сія потеря равна c; слѣдовательно

$$\frac{ax}{p}+\frac{b(p-x)}{p}=c,$$

откуда

$$x=p\left(\frac{c-b}{a-b}\right) \text{ и } p-x=p\left(\frac{a-c}{a-b}\right).$$

По поводу сей задачи, мы должны упомянуть объ одномъ случаѣ, который приводитъ *Витрувій*. Онъ разсказываетъ, что Гіеронъ, Царь Сиракузскій заказалъ для себя золотую корону, и велѣлъ выдать на эту работу кусокъ чистаго золота, опредѣленнаго вѣса. Когда корона была готова, то нашли, что вѣсъ ея вѣренъ; однакоже подозрѣвали еще художника въ томъ, что онъ удержалъ часть золота, и подмѣшалъ серебра. *Архимеду* было поручено открыть подлогъ, не повредивъ отличную работу короны. Архимедъ предложилъ рѣшеніе сего вопроса на томъ самомъ основаніи, на которомъ оно показано у насъ выше. Витрувій разсказываетъ, что Сиракузскій математикъ, находясь однажды въ купальнѣ, и думая о предложенной ему Гіерономъ задачѣ, нашелъ ея рѣшеніе, и такъ былъ обрадованъ симъ открытіемъ, что прямо изъ купальни побѣжалъ по улицамъ города, громко восклицая: *ἑύρηκα, ἑύρηκα* (нашелъ! нашелъ!).

Чтобы сдѣлать приложеніе найденныхъ выше формулъ, положимъ, что вѣсъ короны былъ 20 фунтовъ, и что, при взвѣшиваніи въ водѣ, она потеряла $1\frac{13}{27}$ фунт. Но, по опытамъ извѣстно, что 20 фунт. золота теряютъ въ водѣ изъ своего вѣса $1\frac{1}{9}$ ф. а 20 ф. серебра, $1\frac{2}{3}$ ф. И такъ, въ настоящемъ случаѣ

$$p=20,\ c=1\tfrac{13}{27},\ b=1\tfrac{1}{9},\ a=1\tfrac{2}{3};$$

слѣдовательно

$$x=20\left(\frac{1\frac{13}{27}-1\frac{1}{9}}{1\frac{2}{3}-1\frac{1}{9}}\right)=13\tfrac{1}{3}\text{ фунт.}$$

$$p-x=20\left(\frac{1\frac{2}{3}-1\frac{13}{27}}{1\frac{2}{3}-1\frac{1}{9}}\right)=6\tfrac{2}{3}\text{ фунт.}$$

то есть, корона состояла изъ $13\frac{1}{3}$ ф. золота и $6\frac{2}{3}$ ф. серебра, такъ что золото и серебро входили въ смѣсь въ отношеніи двухъ къ единицѣ. Смот. ALLIAGE (RÈGLE D').

BALANCE ÉLECTRIQUE или BALANCE DE TORSION. Электрическіе вѣсы, крутительные вѣсы. Приборъ, изобрѣтенный *Кулонибомъ*, и преимущественно употребляемый для измѣренія весьма малыхъ электрическихъ силъ притягательныхъ и отталкивающихъ. Электрическіе вѣсы вообще состоятъ изъ металлической нити, весьма тонкой, прикрѣпленной однимъ концомъ къ неподвижной точкѣ; другой конецъ привязывается къ центру тяжести тонкой стрѣлки, или иглы, которая, при вертикальномъ положеніи нити, должна сохранять направленіе горизонтальное. Къ оконечностямъ стрѣлки придѣлываются два небольшіе шарика, свинцовые, бузинные и проч. смотря по тому, измѣряемъ ли мы обыкновенное или электрическое притяженіе. Изъ точки, гдѣ вертикальная металлическая нить встрѣчаетъ горизонтальную плоскость, и подъ самою стрѣлкою, описываемъ окружность, и раздѣляемъ ее на градусы. Очевидно, что при такомъ устроеніи, легко будетъ читать на окружности число градусовъ, перейденныхъ шариками. Въ естественномъ состояніи металлической нити, стрѣлка будетъ имѣть извѣстное равновѣсное положеніе; но ежели, посредствомъ какой либо силы, отклонимъ одинъ шарикъ отъ его первоначальнаго положенія, то нить скрутится, и бо́льшая или ме́ньшая величина угла отклоненія будетъ зависѣть отъ величины притягательной силы, дѣйствующей на шарикъ. Опыты Куломба доказали, что сила крученія пропорціональна углу отклоненія стрѣлки отъ начальнаго ея положенія. И такъ, если примемъ прямой уголъ за единицу, и изобразимъ чрезъ h силу крученія, соотвѣтствующую сему углу, то, для какого ни есть угла ϑ, сила крученія выразится чрезъ $h\vartheta$.

Приборъ Куломба, употребляемый физиками для доказательства законовъ электрическихъ притяженій, служитъ также для опредѣленія средней плотности земнаго шара. Для подробностей по симъ двумъ предметамъ, отсылаемъ читателей къ *Журналу Политехнической Школы* и курсамъ Физики. Скажемъ только, что Англійскій физикъ *Кавендишъ (Cavendish)*, употребивъ такого рода приборъ для опредѣленія средней плотности земнаго шара, нашелъ, что плотность его равна плотности воды, взятой пять разъ съ половиною.

BALANCE. (Астр.) **ВѢСЫ.** Седьмой знакъ зодіака. Смот. ZODIAQUE.

BALANCE. (Комм.) **БАЛАНСЪ, СВОДЪ.**

BALANCEMENT. (Мех.) **КАЧАНІЕ, КОЛЕБАНІЕ.** Смот. OSCILLATION.

BALANCER то же что CONTREBALANCER (См.).

BALANCIER. (Мех.) **МАЯТНИКЪ, ОТВѢСЪ.** Такъ называется всякій снарядъ, коего колебательное движеніе служитъ къ замедленію или къ уравненію движенія остальныхъ частей машины, къ которой онъ принадлежитъ. Смот. PENDULE.

BALISTE и **BALLISTE.** (Мех.) **БАЛИСТА** и **БАЛЛИСТА.** Военное орудіе, бывшее въ употребленіи у древнихъ, и посредствомъ котораго бросали на значительныя разстоянія большія тяжести, какъ то: камни, куски раскаленнаго желѣза, тяжелыя копья и проч.

BALISTIQUE и **BALLISTIQUE.** (Мех.) **БАЛИСТИКА** и **БАЛЛИСТИКА** (отъ Греческ. *βαλλω, бросаю*). Теорическія и практическія изслѣдованія законовъ движенія брошенныхъ тѣлъ, преимущественно артиллерійскихъ снарядовъ.

Въ этой статьѣ мы предложимъ сперва нѣкоторыя историческія показанія о Баллистикѣ, потомъ изложимъ вкратцѣ аналитическое рѣшеніе баллистической задачи, и окончимъ краткимъ указаніемъ на результаты нѣкоторыхъ опытовъ, произведенныхъ надъ сопротивленіемъ воздуха и скоростію вылетающихъ снарядовъ.

Первый, занимавшійся теорическими изслѣдованіями о Баллистикѣ, былъ Италіанскій математикъ *Тартагліа (Tartaglia)*; въ сочиненіи *Della nova Scienzia*, изданномъ имъ въ 1537 году, онъ показываетъ ошибочность мнѣнія, общаго между тогдашними артиллеристами, будто бы путь снаряда состоитъ изъ трехъ частей; они полагали, что при вылетѣ изъ орудія, снарядъ описываетъ прямую линію, потомъ кривую, и наконецъ упадаетъ по вертикальному направленію. Тартагліа нашелъ, что вся траэкторія есть непрерывная кривая, и что углу возвышенія въ 45°, соотвѣтствуетъ наибольшая дальность полёта. Впрочемъ, начала, на которыхъ онъ основывалъ свои выводы, были ошибочны. Истинною теоріею Баллистики наука одолжена знаменитому *Галлилею*, который, принявъ за основаніе открытые имъ законы паденія тяжелыхъ тѣлъ, доказалъ строгимъ образомъ, что въ безвоздушномъ пространствѣ снарядъ описываетъ *параболу*. Послѣ Галлилея, *Торичелли*, *Мерсенъ*, *Колладо*, *Андерсонъ*, *Блондель* и нѣкоторые другіе производили многочисленные опыты съ цѣлію приложить на самомъ дѣлѣ параболическую теорію къ движенію снарядовъ. На сей конецъ были составлены различныя таблицы, болѣе или менѣе удобныя. Но, около того самаго времени, первостепенные математики, разсматривая баллистическую задачу со стороны теоріи, убѣдились, что для точнаго ея рѣшенія, необходимо принимать въ расчетъ сопротивленіе воздуха. Нѣкоторые изъ нихъ, и между прочими *Иванъ Бернулли* (*Actes de Leipzig*, 1719), предложили аналитическія рѣшенія сего вопроса. Впослѣдствіи занимались имъ *Эйлеръ*, *Ламбертъ*, *Безу*, *Лагранжъ*, *Лежандръ* и другіе. На основаніи теорическихъ изслѣдованій математиковъ, производили многочисленные опыты *Робинсъ* (*Robins new principles of gunnery*, 1742), *Д'Арси*, *Гуттонъ*, *Прони*, *Гробертъ (Grobert)* и другіе. Совокупность сихъ трудовъ представила нынѣ возможность составить таблицы, хотя еще не совершенныя, но весьма достаточныя по своей точности во многихъ случаяхъ.

Перейдемъ теперь къ аналитическому рѣшенію баллистической задачи. Разсмотримъ сперва движеніе матеріальной точки, брошенной изъ O (черт. 14, листъ II) по направленію OA въ безвоздушномъ пространствѣ. Очевидно, что движущаяся точка не выйдетъ изъ вертикальной плоскости, проходящей чрезъ прямую OA; примемъ эту плоскость за координатную, и положимъ, что ось OX горизонтальная, а OY вертикальная, и направляется въ противную сторону тяжести. Пусть будетъ M положеніе точки по истеченіи времени t, $OP = x$, $PM = y$; изобразимъ чрезъ g постоянную силу тяжести, чрезъ a начальную скорость движущейся точки, и чрезъ α уголъ, составляемый направленіемъ сей скорости съ осью OX. Уравненія движенія будутъ [(Смот. CURVILIGNE (MOUVEMENT)]

$$\frac{d^2x}{dt^2} = o, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g;$$

интегрируя ихъ два раза и опредѣляя постоянныя величины, получимъ

(1) $$x = a\, Cos\, \alpha \cdot t, \quad y = a\, Sin\, \alpha . t - \tfrac{1}{2} gt^2;$$

если изъ сихъ двухъ уравненій исключимъ время t, то найдемъ уравненіе траэкторіи

(2) $$y = tang\, \alpha . x - \frac{gx^2}{2a^2 Cos^2 a}.$$

И такъ, въ разсматриваемомъ нами случаѣ, кривая, описываемая точкою, будетъ *парабола*, имѣющая ось вертикальную, а вершину свою въ точкѣ B, гдѣ $\frac{dy}{dx} = 0$. Изъ формулъ (1) и (2) очень легко вывести слѣдующее:

1) *Высота полёта (hauteur du jet)*, то есть высота $CB = \frac{a^2}{2g} Sin^2 \alpha$.

2) *Дальность полёта (amplitude du jet, portée)*, то есть разстояніе $OD = \frac{a^2}{g} . Sin\, 2\alpha$; чтобы сіе разстояніе, при опредѣленной начальной скорости a, было наибольшее, стоитъ только положить $Sin\, 2\alpha = 1$, откуда $\alpha = 45^0$.

3) Скорость v движущейся точки, выраженная въ функціи времени t, опредѣляется формулою

$$v^2 = a^2 - 2ag\, Sin\, \alpha . t + g^2 t^2,$$

которую легко получить, наблюдая что

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}.$$

4) Время T перехода движущейся точки изъ O въ D опредѣляется уравненіемъ

$$T = \frac{2a}{g} . Sin\, \alpha.$$

5) Скорости при точкахъ K и L, находящихся на одной и той же горизонтальной линіи, равны между собою; и такъ, движущееся тѣло, достигнувъ точки D, будетъ имѣть начальную скорость a.

Замѣтимъ, что еслибы вмѣсто матеріальной точки разсматривали тѣло опредѣленной величины, то приведенные нами законы должно бы было отнести къ движенію его центра тяжести.

Изъ числа задачъ, представляющихся въ Баллистикѣ, предложимъ рѣшеніе слѣдующей: *По данной начальной скорости a, найти уголъ возвышенія α, подъ которымъ снарядъ попадетъ въ опредѣленную цѣль.* Пусть будутъ k и l абсцисса и ордината данной цѣли; принявъ $z = tang\, \alpha$ за неизвѣстную, и подставивъ въ уравн. (2) k и l на мѣсто x и y, найдемъ

$$z = \frac{2h}{k} \pm \frac{1}{k} \sqrt{4h^2 - 4hl - k^2},$$

гдѣ, для простоты, $h = \frac{a^2}{2g}$.

Двоякое значеніе величины z показываетъ, 1) что когда $4h^2 > 4hl + k^2$, то въ данную цѣль можно попасть подъ двумя различными углами возвышенія орудія. 2) Когда $4h^2 = 4hl + k^2$, то существуетъ только одинъ уголъ возвышенія, удовлетворяющій условію; наконецъ 3) когда $4h^2 < 4hl + k^2$, то въ такомъ случаѣ задача не допускаетъ никакого рѣшенія.

Параболическая теорія весьма удовлетворительна по своей простотѣ, и она можетъ быть приложена къ движенію снарядовъ въ воздухѣ, когда скорость ихъ не слишкомъ значительна, какъ, напримѣръ, при метательномъ движеніи бомбъ. Но при большихъ скоростяхъ, сопротивленіе воздуха имѣетъ такое вліяніе, на обстоятельства движенія, что видъ траэкторіи совершенно измѣняется. Войдемъ въ нѣкоторыя подробности по предмету рѣшенія этой общей задачи.

Изъ *начала сохраненія движенія центра тяжести* (Смот. DYNAMIQUE) слѣдуетъ, что движеніе центра тяжести снаряда будетъ одинаково съ тѣмъ, которое бы имѣла тяжелая точка, получившая опредѣленную по величинѣ и направленію начальную скорость, и къ которой бы, сверхъ того, приложили параллельно самимъ себѣ силы, раждающіяся отъ сопротивленія и тренія воздуха, изъявляемаго на поверхность движущагося снаряда. И такъ, удержавъ прежнія знаменованія различныхъ буквъ, и изобразивъ чрезъ s дугу OM, (чертежъ 15 Листъ II), описываемую центромъ тяжести снаряда во время t, а чрезъ R движущую силу, происходящую отъ сопротивленія воздуха, общая баллистическая задача приведется къ опредѣленію обстоятельствъ движенія матеріальной точки, подверженной дѣйствіямъ тяжести, и перемѣнной силы R; если, сверхъ того, предположимъ снарядъ сферическимъ и однороднымъ, или, по крайней мѣрѣ, состоящимъ изъ однородныхъ концентрическихъ слоевъ, то сила R будетъ всегда заключаться въ вертикальной плоскости, проходящей чрезъ направленіе начальной скорости, а слѣдовательно вся траэкторія будетъ также находиться въ этой самой плоскости, которую примемъ за координатную.

Для составленія уравненій движенія, разложимъ силу R, дѣйствующую по направленію касательной въ сторону MT, на двѣ составляющія, параллельныя координатнымъ осямъ. Косинусы угловъ, заключающихся между частію MT касательной и положительными полуосями OX, OY будутъ $-\frac{dx}{ds}$ и $-\frac{dy}{ds}$; слѣдовательно, составляющія движущей силы R выразятся чрезъ $-R\frac{dx}{ds}$ и $-R\frac{dy}{ds}$; если, сверхъ того, изобразимъ чрезъ m массу снаряда, то получимъ слѣдующія уравненія:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -R\frac{dx}{ds},\quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - R\frac{dy}{ds}$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{R}{m}\frac{dx}{ds},\qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{R}{m}\frac{dy}{ds}.$$

Сообразно съ общепринятымъ предположеніемъ, сопротивленіе воздуха пропорціонально квадрату скорости центра тяжести снаряда, поверхности сего послѣдняго и плотности воздуха; Смот. RÉSISTANCE DES FLUIDES. Слѣдовательно, изобразивъ чрезъ v и ω, скорость центра тяжести и поверхность снаряда, чрезъ ϱ плотность воздуха, найдемъ

$$R = \lambda\varrho\omega v^2,$$

разумѣя подъ λ постоянный коэффиціентъ.

Когда примемъ снарядъ сферическимъ, то получимъ

$$m = \frac{4\pi Dr^3}{3},\ \omega = \pi r^2;$$

слѣдовательно

$$\frac{R}{m} = \frac{\mu\varrho}{2Dr}v^2;$$

здѣсь μ изображаетъ постоянный коэффиціентъ $\frac{3}{4}\lambda$, опредѣляемый изъ опытовъ. И такъ, наблюдая что $v = \frac{ds}{dt}$, предыдущія уравненія движенія примутъ видъ

$$(3)\quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{ds}{dt}\frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{ds}{dt}\frac{dy}{dt} + g = 0 \end{cases}$$

въ которыхъ, для краткости, предположили $\frac{\mu\varrho}{2Dr} = c$. Величину c мы будемъ принимать за постоянную, ибо плотность воздуха весьма мало измѣнится на всёмъ протяженіи кривой, описываемой снарядомъ.

Интегралъ перваго изъ уравн. (3) будетъ

$$(4)\quad \frac{dx}{dt} = a\,Cos\,\alpha\, e^{-cs}.$$

Для интегрированія втораго, полагаемъ $\frac{dy}{dt} = p\frac{dx}{dt}$, гдѣ p изображаетъ новую перемѣнную. Подставляя эту величину во второе изъ уравн. (3), получимъ, въ слѣдствіе перваго изъ нихъ

$$\frac{dx}{dt}\frac{dp}{dt} = -g;$$

раздѣляя это послѣднее на квадратъ уравн. (4), найдемъ

$$\frac{\frac{dp}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{g}{a^2\,Cos^2\,\alpha}e^{2cs}.$$

Если примемъ y и p за функціи перемѣнной x, то будетъ

$$p = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx},\ \frac{\frac{dp}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dp}{dx},$$

и слѣдовательно

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{2h\,Cos^2\,\alpha}e^{2cs},$$

разумѣя, какъ и выше, подъ h величину $\frac{a^2}{2g}$. Для интегрированія сего уравненія замѣтимъ, что

$$dx\sqrt{1+p^2} = ds;$$

перемноживъ почленно послѣднія два уравненія, получимъ формулу

$$\sqrt{1+p^2}.\,dp = -\frac{1}{2h\,Cos^2\alpha}e^{2cs}ds,$$

коей интегралъ будетъ

$$(5)\quad p\sqrt{1+p^2}+\log(p+\sqrt{1+p^2})=C-\frac{1}{2ch\,Cos^2\alpha}e^{2cs},$$

гдѣ C изображаетъ постоянное количество, опредѣляемое изъ условія, что при $s=o$, $p=tang\,\alpha$; слѣдовательно

$$C=\frac{1}{2ch\,Cos^2\alpha}+tang\,\alpha\sqrt{1+tang^2\alpha}+\log(tang\,\alpha+\sqrt{1+tang^2\alpha})$$

Но изъ найденныхъ нами уравненій легко вывести $dx=-2h\,Cos^2\alpha.e^{-2cs}dp$, $dy=pdx$, $gdt^2=-dxdp$; чрезъ исключеніе же показательнаго выраженія e^{2cs} посредствомъ уравненія (5), найдемъ слѣдующія формулы:

$$(6)\quad\begin{cases} cdx=\dfrac{dp}{p\sqrt{1+p^2}+\log(p+\sqrt{1+p^2})-C}\\ cdy=\dfrac{pdp}{p\sqrt{1+p^2}+\log(p+\sqrt{1+p^2})-C}\\ \sqrt{cg}.dt=-\dfrac{dp}{[C-p\sqrt{1+p^2}-\log(p+\sqrt{1+p^2})]^{\frac{1}{2}}}.\end{cases}$$

Выраженія сіи не могутъ быть интегрированы въ конечномъ видѣ, но можно будетъ опредѣлить x и y въ функціи времени t, для каждаго частнаго значенія сего послѣдняго, употребляя на сей конецъ извѣстные пріёмы интегрированія по приближенію. Что касается до скорости v, то по причинѣ

$$v^2=\frac{dx^2+dy^2}{dt^2},$$

получимъ

$$cv^2=\frac{g(1+p^2)}{C-p\sqrt{1+p^2}-\log(p+\sqrt{1+p^2})}.$$

Выведенныя нами формулы заключаютъ въ себѣ рѣшеніе баллистической задачи въ томъ предположеніи, что сопротивленіе воздуха пропорціонально квадрату скорости; правда, многосложность численныхъ выкладокъ, требуемыхъ изложенною теоріею, а еще болѣе неизвѣстность точныхъ законовъ сопротивленія жидкостей, заставляетъ желать новыхъ усилій какъ отъ аналистовъ, такъ и со стороны наблюдателей.

Мы не будемъ останавливаться на подробностяхъ приведеннаго рѣшенія; поименуемъ только нѣкоторыя слѣдствія, проистекающія изъ разбора выведенныхъ нами формулъ.

1) Траэкторія *OMBDE*, составлена изъ частей *BMON* и *BDE*, имѣющихъ каждая свою ассимптоту: ассимптота части *BMON* есть прямая *KL*, составляющая съ осью x уголъ β, обращающій въ нуль общій знаменатель формулъ (6), и слѣдовательно, удовлетворяющій уравненію

$$C-tang\,\beta\sqrt{1+tang^2\beta}-\log(tang\,\beta+\sqrt{1+tang^2\beta})=0.$$

Что касается до части *BDE* траэкторіи, коей направленіе болѣе и болѣе приближается къ вертикальному, то она имѣетъ ассимптотою вертикальную линію *LFG*.

2) Дальность полёта *OD* не равна, какъ въ параболической теоріи, удвоенной абсциссѣ *OC*, соотвѣтствующей высотѣ полёта *BC*. Равнымъ образомъ, уголъ α, соотвѣтствующій *наибольшей* дальности полёта, не будетъ равняться 45°, но углу ме́ньшему, зависящему отъ начальной скорости a.

При маломъ углѣ возвышенія орудія, формулы (6) могутъ быть легко интегрированы. Дѣйствительно, если положимъ уголъ α довольно малымъ, то снарядъ, при полётѣ своемъ, не достигнетъ значительной высоты, и слѣдовательно p будетъ весьма малая величина; откидывая по этой причинѣ p^2, получимъ приблизительно

$$ds=dx,\quad s=x,$$

и слѣдовательно, выведенное выше точное уравненіе

$$\frac{dp}{dx}=-\frac{1}{2h\,Cos^2\alpha}e^{2cx}$$

обратится въ

$$\frac{dp}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{2h\,Cos^2\alpha}e^{2cx};$$

интегрируя это уравненіе два раза сряду при условіи, что когда $x=0$, то $y=0$, а $\frac{dy}{dx}=tang\,\alpha$, найдемъ

$$y=x\,tang\,\alpha-\frac{1}{8c^2h\,Cos^2\alpha}(e^{2cx}-2cx-1).$$

Вотъ уравненіе искомой траэкторіи; для опредѣленія времени въ функціи x, замѣчаемъ, что $gdt^2=-dxdp$, и въ слѣдствіе приведенной сей-часъ величины для $\frac{dp}{dx}$, получаемъ формулу

$$g\frac{dt^2}{dx^2}=\frac{1}{2h\,Cos^2\alpha}e^{2cx},$$

коей интегралъ будетъ

$$t=\frac{1}{c\sqrt{2gh}\cdot Cos\,\alpha}(e^{cx}-1).$$

Если бы въ найденномъ уравненіи траэкторіи разложили показательное количество e^{2cx} въ рядъ, и положили потомъ $c=o$, то нашлибы уравненіе параболы. Очевидно, что предположеніе $c=o$, соотвѣтствуетъ тому случаю, когда не принимаемъ въ расчетъ сопротивленія воздуха.

*

Предѣлы нашего Лексикона не позволяютъ намъ даже поименовать тѣ опыты, которые были производимы для усовершенствованія Баллистики. Приводимъ здѣсь результаты нѣкоторыхъ изъ нихъ единственно для того, чтобы дать нашимъ читателямъ понятіе о родѣ испытаній, относящихся къ этой наукѣ.

Гуттонъ, производившій опыты надъ сопротивленіемъ воздуха, нашелъ, что эта сила, укосняющая движеніе снаряда, не выражается со всею строгостію произведеніемъ $\lambda\rho\omega v^2$, какъ мы предположили выше. Относительно поверхности ω опыты показали, что при скоростяхъ отъ 300 до 2000 футовъ въ секунду, сопротивленіе возрастаетъ нѣсколько болѣе, нежели поверхности, или что всё равно, чѣмъ квадраты діаметровъ, употребляемыхъ снарядовъ. Впрочемъ, разность отношенія сопротивленій и отношенія квадратовъ діаметровъ такъ незначительна въ бо́льшей части случаевъ, что можно, безъ чувствительной погрѣшности, принимать сопротивленіе пропорціональнымъ поверхности.

При равныхъ поверхностяхъ, но при скоростяхъ различныхъ, Гуттонъ вывелъ посредствомъ многочисленныхъ опытовъ, что сопротивленіе не совсѣмъ пропорціонально квадрату скорости, какъ обыкновенно предполагается. При малыхъ скоростяхъ снаряда, эта пропорціональность почти справедлива, но при увеличеніи ихъ, самое сопротивленіе увеличивается быстрѣе, нежели квадраты скоростей. Наблюдатели, въ разныя времена, предлагали эмпирическія формулы, въ которыхъ, вмѣсто квадрата скорости, вводили или степень нѣсколько бо́льшую двухъ, или другія функціи той же скорости.

Относительно скоростей ядеръ, опыты показали, что при равной длинѣ орудій, онѣ почти пропорціональны квадратнымъ корнямъ изъ вѣса пороха, употребляемаго на зарядъ. При одинаковыхъ зарядахъ и діаметрахъ ядеръ, скорости обратно пропорціональны квадратнымъ корнямъ изъ вѣсовъ сихъ самыхъ ядеръ, когда стрѣляемъ изъ одного и того же орудія. Хотя съ увеличеніемъ заряда скорость ядра и увеличивается, однакоже только до нѣкотораго предѣла, что̀ зависитъ отъ длины орудія. Замѣтимъ также, что бо́льшій или ме́ньшій зазоръ имѣетъ еще болѣе вліянія на начальную скорость снаряда: чѣмъ больше будетъ зазоръ, тѣмъ бо́льшая потеря произойдетъ въ скорости ядра.

Въ разсужденіи дальности полета опыты показали, что онѣ увеличиваются гораздо медленнѣе, нежели начальныя скорости, и почти какъ корни квадратные изъ сихъ послѣднихъ.

По предмету теоріи и практики Баллистики, мы отсылаемъ читателей къ различнымъ разсужденіямъ *Мопертюи*, *Эйлера*, *Лагранжа*, *Пуассона* и проч., помѣщеннымъ въ разныхъ мѣстахъ, а также къ сочиненіямъ:

Bombardier français par Belidor.

Nouveaux principes d'Artillerie, avec des remarques d'Euler; traduit et publié en Français par M. Lombard 1783.

Voyage en Grande-Bretagne par Ch. Dupin.

Теорія и практика Морской Артиллеріи, соч. *Сиръ-Говардъ-Дугласа.* Съ Англ. перев. на Франц. языкъ съ примѣчаніями А. Ф. Е. *Шарпантье;* Русскій переводъ съ Франц. напечатанъ въ 1830 году.

Теорія Баллистики, составленная Экстр. Профессоромъ Анкудовичемъ. Санктпетербургъ 1836.

BALLISTIQUE (PENDULE). БАЛЛИСТИЧЕСКІЙ МАЯТНИКЪ, ОТВѢСЪ. Приборъ, употребляемый для опредѣленія скорости снарядовъ, вылетающихъ изъ орудій. Онъ состоитъ изъ толстаго куска дерева, который, для увеличенія вѣса, оковываютъ желѣзомъ; весь приборъ свободно обращается около прочной желѣзной оси. Для дѣланія опытовъ, стрѣляютъ на весьма близкомъ разстояніи въ деревянную часть отвѣса: снарядъ, углубясь въ дерево, приведетъ маятникъ въ колебательное движеніе, и первая, то есть наибольшая дуга качанія, опредѣлится наблюденіемъ. Сверхъ того, такъ какъ размѣры, и всё, относящееся къ употребляемому баллистическому маятнику, а равно и вѣсъ снаряда извѣстны, то легко будетъ, по законамъ Механики, опредѣлить начальную скорость снаряда.

Изобрѣтеніе *баллистическаго маятника* (1742 года) принадлежитъ Англичанину *Робинсу*. Но онъ, при опытахъ своихъ, употреблялъ только ружейныя пули. Впослѣдствіи *Гуттонъ*, по порученію Лондонскаго Королевскаго Общества, производилъ въ Вульвичѣ опыты надъ снарядами большаго размѣра. Результаты сихъ трудовъ, начатыхъ въ 1775 году и продолжавшихся до 1786 года, помѣщены въ *Philosophical Transactions*, и въ книгѣ подъ заглавіемъ *Nouvelles expériences d'Artillerie par Hutton*, Paris 1802, publié par *Villantroi*.

Для опредѣленія скорости снарядовъ были придуманы еще другія средства, между которыми укажемъ на остроумный способъ *Маттея*. Читатели найдутъ описаніе этого способа въ книгѣ: *Теорія Баллистики*, составленная *Анкудовичемъ*.

BALLON. ВОЗДУШНЫЙ ШАРЪ. С. AÉROSTAT.

BANQUE. БАНКЪ. — БАНКИРСТВО.

BARICENTRIQUE (CALCUL). БАРИЦЕНТРИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНІЕ. Остроумный способъ приложенія Анализа къ Геометріи, придуманный *Мэбіусомъ (Möbius)*, и доставившій уже изобрѣтателю нѣсколько любопытныхъ результатовъ, особенно въ отношеніи теоріи коническихъ сѣченій. Хотя этотъ способъ и основанъ на разсматриваніи центра тяжести, какъ самое его наименованіе показываетъ, однако же начала его вовсе независимы отъ Механики, ибо центръ тяжести принимается въ немъ въ геометрическомъ значеніи, то есть, за *точку среднихъ разстояній*. См. CENTRE DES DISTANCES MOYENNES.

До открытія высшаго анализа не было еще общихъ способовъ для нахожденія криволинейныхъ площадей, поверхностей тѣлъ вращенія и ихъ объёмовъ; поэтому, въ частныхъ случаяхъ, прибѣгали къ особымъ пріёмамъ, которые часто заимствовали изъ Механики. Такимъ образомъ произошелъ такъ называемый *Центробарическій способъ* (Смот. CENTROBARIQUE), изобрѣтенный Паппомъ *) и усовершенствованный впослѣдствіи Іезуитомъ Гюльденомъ **). *Таккетъ (Tacquet)*, и въ новѣйшія времена *Карно (Carnot)* и *Люилье (l'Huilier)* также занимались симъ предметомъ, и старались ввести въ Геометрію ученіе о центрѣ тяжести. — Мы постараемся въ слѣдующемъ краткомъ изложеніи дать хотя общее понятіе о Барицентрическомъ Исчисленіи.

Представимъ себѣ двѣ точки A и B, на которыя дѣйствуютъ параллельныя между собою силы, напримѣръ двѣ тяжести a и b. Центръ тяжести P этой системы будетъ находиться между A и B, если a и b дѣйствуютъ въ одну сторону, и сверхъ того $\frac{AP}{PB}=\frac{b}{a}$. Проведемъ чрезъ A и B двѣ произвольныя параллельныя линіи, и вообразимъ плоскость, проходящую чрезъ P, и пересѣкающую сіи двѣ линіи въ A' и B'; получимъ $\frac{AP}{PB}=\frac{AA'}{B'B}$ *), и слѣдовательно, принявъ a и b за отвлеченныя числа, пропорціональныя тяжестямъ, дѣйствующимъ въ точкахъ A и B, найдемъ

$$aAA'+bBB'=o.$$

Всякая другая плоскость, не проходящая чрезъ P, не будетъ имѣть свойства, выражаемаго этимъ уравненіемъ; дѣйствительно, положимъ что таковая плоскость пересѣкаетъ двѣ вышеупомянутыя параллельныя линіи въ точкахъ A'' и B''; проведя чрезъ P прямую, параллельную линіи $A''B''$, пересѣкающую параллельныя AA'' и BB'' въ точкахъ A' и B', получимъ $aAA'+bBB'=o$; съ другой стороны, если чрезъ P, параллельно AA' и BB', проведемъ линію, пересѣкающую $A''B''$ въ P'', то будетъ $A'A''=B'B''=PP''$, а слѣдовательно $aA'A''+bB'B''=(a+b)PP''$; сложивъ это уравненіе съ предыдущимъ, найдемъ $aAA''+bBB''=(a+b)PP''$.

Если a и b имѣютъ разные знаки, то центръ тяжести P будетъ находиться не между A и B, а на продолженіи линіи AB за точкою A или B, смотря по тому, которое изъ двухъ чиселъ a, b будетъ больше. Проведя чрезъ P плоскость, пересѣкающую параллельныя AA' и BB', мы будемъ имѣть, какъ выше, $aAA'+bBB'=o$, гдѣ опять принимается въ соображеніе порядокъ буквъ; для всякой же другой плоскости, пересѣкающей сіи линіи, но не проходящей чрезъ P, будетъ $aAA''+bBB''=(a+b)PP''$. Если, въ послѣднемъ случаѣ, a и b равны между собою и имѣютъ противные знаки, то $a+b=o$, и тогда казалось бы, что и $aAA''+bBB''=o$; но это слѣдствіе очевидно не можетъ имѣть мѣста для всякой плоскости, по предположенію пересѣкающей параллельныя линіи AA', BB'. И дѣйствительно, такъ какъ центръ тяжести P, въ настоящемъ случаѣ,

---

*) *Pappi Alexandrini math. collectiones*, въ концѣ предисловія къ 7-ой книгѣ смот. изданіе 1588 г. (Pisauri) и 1660 (Bonon.); также *Montucla*, T. II, стр. 329, 330.

**) *De centro gravitatis* lib. II, III, IV.

*) Здѣсь надлежитъ замѣтить, что по знакоположенію Г. Мэбіуса, противуположность какой либо линіи AB означается чрезъ BA, такъ что $AB+BA=o$. И такъ, здѣсь нельзя было написать $\frac{AP}{PB}=\frac{AA'}{BB'}$, ибо отношеніе $\frac{AP}{PB}$ положительное, а $\frac{AA'}{BB'}$ отрицательное.

находится въ безконечномъ разстояніи отъ A и B, то и самая величина PP'' дѣлается безконечною, если только не предположимъ, что сѣкущая плоскость параллельна линіи AB. Изъ этого усматриваемъ, что произведеніе $(a+b)\,PP''$ обращается въ $0\times\infty$, или, что всё равно, въ $\frac{0}{0}$. И такъ, въ разсматриваемомъ нами случаѣ, собственно выходитъ $aAA''+bBB''=\frac{0}{0}$, то есть, величинѣ неопредѣленной; и только въ томъ предположеніи, что PP'' не $=\infty$, имѣемъ $aAA''+bBB''=0$.

За симъ авторъ предлагаетъ себѣ слѣдующую задачу: *Три линіи AA', BB', CC', параллельныя между собою, проходятъ чрезъ три данныя точки A, B, C или въ самой плоскости ABC, или внѣ этой плоскости; требуется пересѣчь плоскостію сіи три параллельныя такъ, чтобы было $a.AA'+b.BB'+c.CC'=0$, гдѣ A', B', C' означаютъ точки пересѣченія параллельныхъ съ плоскостію, а a, b, c три числа, находящіяся между собою въ данномъ отношеніи.*

Для рѣшенія этого вопроса, соединяемъ прямою линіею двѣ какія ни есть изъ трехъ данныхъ точекъ, напримѣръ A и B, и раздѣляемъ прямую AB въ P такъ, чтобы $\frac{BP}{PA}=\frac{a}{b}$, то есть, чтобы P былъ центромъ тяжести между A и B съ относительными коэффиціентами a, b. Проводимъ потомъ PC, и раздѣляемъ эту линію въ точкѣ Q такъ, чтобы $\frac{CQ}{QP}=\frac{a+b}{c}$; тогда Q будетъ центромъ тяжести между P и C съ относительными коэффиціентами $a+b$ и c. Всякая плоскость, проходящая чрезъ Q, удовлетворитъ условію задачи. Для доказательства, проведемъ чрезъ P линію PP', параллельную AA', BB' и CC'. Положимъ, что какая либо плоскость, проходящая чрезъ точку Q, пересѣкаетъ сіи четыре параллельныя въ A', B', C', P'; найдется по предыдущему $aAA'+bBB'=(a+b)\,PP'$ и $(a+b)\,PP'+c.CC'=0$; слѣдовательно $a.AA'+b.BB'+c.CC'=0$. Что касается до всякой другой плоскости, не проходящей чрезъ Q, то легко удостовѣриться, что она не удовлетворяетъ требованію задачи; и въ самомъ дѣлѣ, пусть таковая плоскость пересѣчетъ четыре параллельныя въ точкахъ A'', B'', C'', P'', а проведенную чрезъ Q пятую параллельную, въ точкѣ Q''; получимъ $aAA''+bBB''=(a+b)\,PP''$ и $(a+b)\,PP''+c.CC''=(a+b+c)\,QQ''$, и слѣдовательно

$$a.AA''+b.BB''+c.CC''=(a+b+c)\,QQ'',$$

гдѣ величина $(a+b+c)\,QQ''$ не обращается въ нуль.

Продолжая точно такимъ образомъ, легко доказать слѣдующую общую теорему: *Если дано извѣстное число точекъ A, B, $C\ldots.N$ съ относительными коэффиціентами $a, b, c\ldots n$, коихъ сумма не $=0$, то всегда можно будетъ найти одну (но не болѣе) точку S такого свойства, что если чрезъ данныя точки и чрезъ S (центръ тяжести системы) проведутся въ какомъ либо направленіи линіи, параллельныя между собою, и пересѣкаемыя въ точкахъ $A', B', C'\ldots. N'$, S' произвольно взятою плоскостію, то всегда будетъ $a.AA'+b.BB'+c.CC'+\ldots+n.NN'=(a+b+c+\ldots+n)SS'$; если же плоскость проходитъ чрезъ самую точку S, то $a.AA'+b.BB'+c.CC'+\ldots.+n.NN'=0$.*

Изъ сказаннаго нами о началахъ Барицентрическаго Исчисленія видно, что дѣйствительно въ изслѣдованіяхъ Г. Мэбіуса механическое понятіе о центрѣ тяжести вовсе устранено, и что, по смыслу сего исчисленія, можно эту точку, въ геометрическомъ значеніи, опредѣлить слѣдующимъ образомъ: Въ системѣ точекъ $A, B\ldots.N$, съ относительными коэффиціентами $a, b\ldots n$, центромъ тяжести называется точка, чрезъ которую проходятъ всѣ плоскости, отсѣкающія отъ параллельныхъ, проведенныхъ чрезъ тѣ же точки $A, B\ldots N$, такія части AA', $BB'\ldots. NN'$, что сумма $a.AA'+b.BB'+\ldots.+n.NN'=0$.

Основныя формулы барицентрическаго исчисленія. Всѣ формулы, относящіяся къ этому способу, могутъ быть подведены подъ три слѣдующія:

$$\begin{aligned}
&\text{I. } aA+bB+cC+dD+\ldots.=(a+b+c+d+\ldots)S\\
&\text{II. } aA+bB+cC+\ldots\ldots\ldots=fF+gG+\ldots\\
&\text{III. } aA+bB+cC+\ldots\ldots\ldots=0.
\end{aligned}$$

Уравненіе I выражаетъ, что S есть центръ тяжести точекъ A, B, C, $D\ldots.$ съ относительными коэффиціентами a, b, c, $d\ldots.$

Уравненіе II показываетъ, что точки A, B, $C\ldots.$ съ коэффиціентами a, b, $c\ldots.$ имѣютъ тотъ же центръ тяжести какъ и точки F, $G\ldots.$ съ коэффиціентами f, $g\ldots.$ предполагая что суммы коэффиціентовъ по ту и по другую сторону знака равенства равны между собою, то есть что $a+b+\ldots=f+g+\ldots.$ Здѣсь впрочемъ надлежить замѣтить, что еслибъ суммы коеффиціентовъ двухъ системъ, имѣющихъ одинъ и тотъ же центръ тяжести, были не равны, то для возстановленія равенства и для изображенія посредствомъ уравненія тождества центровъ тяжести, стоило бы только каждый коэффиціентъ одной системы, умножить на сумму коэффиціентовъ другой.

Наконецъ, уравненіе III, имѣющее мѣсто только въ томъ предположеніи, что сумма $a + b + c + \ldots = 0$, выражаетъ, что система точекъ A, B, $C \ldots$ съ коэффиціентами a, b, $c \ldots$ не имѣетъ центра тяжести.

Къ симъ уравненіямъ можно примѣнить только слѣдующія два алгебрическія дѣйствія:

a) Равенство не нарушится, когда къ обѣимъ частямъ уравненія будутъ приложены, или вычтены изъ нихъ равныя величины, которыя впрочемъ должны быть не числа, а точки или совокупленія точекъ съ ихъ коэффиціентами.

b) Равнымъ образомъ дозволяется съ обѣихъ сторонъ умножать и дѣлить на равныя величины; но въ такомъ случаѣ множитель или дѣлитель долженъ быть не точка, а число.

Остается еще замѣтить, что для упрощенія выше приведенныхъ формулъ, Г. Мэбіусъ употребляетъ знакъ $\equiv$, когда требуется изобразить, что какая либо извѣстная точка есть центръ тяжести данной системы, или что двѣ системы имѣютъ одинъ и тотъ же центръ тяжести, не принимая въ соображеніе равенства суммъ коэффиціентовъ по ту и по другую сторону знака равенства. И такъ вмѣсто уравненія I, можно употреблять формулу

$$aA + bB + cC + \ldots \equiv S,$$

а вмѣсто уравненія II, хотя бы и не было $a + b + c + \ldots = f + g + \ldots$, писать

$$aA + bB + cC + \ldots \equiv fF + gG + \ldots$$

Въ этомъ заключается аналитическая часть Барицентрическаго Исчисленія; для приложенія сего способа къ изслѣдованіямъ геометрическимъ, Г. Мэбіусъ показываетъ сперва какимъ образомъ барицентрическія выраженія служатъ условными уравненіями извѣстныхъ свойствъ геометрическихъ фигуръ, а потомъ въ семи главахъ перваго отдѣла своей книги (Гл. 3—9) показываетъ приложеніе своего исчисленія къ началамъ Аналитической Геометріи. Второй отдѣлъ имѣетъ предметомъ такъ называемое *сродство фигуръ* и проистекающія отъ этого сродства особаго рода геометрическія задачи; а третій, приложеніе Барицентрическаго Исчисленія къ нахожденію многихъ новыхъ свойствъ коническихъ сѣченій. Сіи-то два отдѣла, въ особенности второй, показываютъ пользу Барицентрическаго способа. Ученіе Эйлера о сродствѣ кривыхъ линій (Introd. in Anal. inf. Том. II Глав. XVII) представлено здѣсь въ видѣ, болѣе общемъ.

Предѣлы нашего Лексикона не позволяютъ намъ входить въ дальнѣйшія подробности объ этомъ предметѣ. Желающіе ближе ознакомиться съ способомъ Г. Мэбіуса, могутъ изучить его въ изданной имъ книгѣ подъ заглавіемъ: Der barycentrische Calcul, ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie, dargestellt und insbesondere auf die Bildung neuer Classen von Aufgaben und die Entwickelung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte angewendet von August Ferdinand Möbius, Prof. der Astronomie zu Leipzig. Mit vier Kupfertafeln. Leipzig bei Barth 1827 in 8°. Нѣкоторыя приложенія Барицентрическаго Исчисленія можно также найти въ Crelle's Journal B. V стр. 102, 397 въ статьяхъ Гг. Мэбіуса и Миндинга.

BARLONG. (Геом. и Ариѳ.) **ПРОДОЛГОВАТЫЙ ПРЯМОУГОЛЬНИКЪ, ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛОГРАММЪ.** — *Nombres barlongs* или *antélongiores, продолговатыя числа.* Такъ называется произведеніе двухъ цѣлыхъ чиселъ, коихъ разность равна единицѣ. Таковы числа $1.2 = 2$, $2.3 = 6$, $3.4 = 12$ и т. п. Очевидно, что *продолговатое число* равно *удвоенному треугольному.*

BARLONGUE. (Разр. камн.) **ПЕРЕКРЕСТНЫЙ СВОДЪ.**

BAROMÈTRE. (Физ.) **БАРОМЕТРЪ.** Инструментъ показывающій давленіе въ опредѣленной точкѣ атмосферы. Барометръ состоитъ изъ стеклянной трубки, длиною не менѣе 31 англійскаго дюйма, и имѣющей въ діаметрѣ около 3 линій; трубка съ одного конца запаяна герметически, а съ открытаго, наполняютъ ее чистою ртутью, и, закрывъ отверстіе пальцемъ, опрокидываютъ ее; потомъ опускаютъ въ чашечку съ ртутью. Тогда ртуть въ трубкѣ нѣсколько понизится, и остановится, вообще, на высотѣ, мало разнствующей отъ 30 дюймовъ, считая сію высоту отъ уровня ртути въ чашечкѣ. Изъ законовъ Гидростатики извѣстно, что сей столбецъ ртути будетъ уравновѣшиваемъ столбомъ атмосфернаго воздуха, производящимъ давленіе на свободную поверхность ртути въ чашечкѣ; слѣдовательно, по степени возвышенія или пониженія ртути въ трубкѣ, можно будетъ судить о степени увеличенія или уменьшенія упругости атмосферы. Для точнѣйшаго наблюденія высоты стоянія ртути, помѣщаютъ съ боку трубки шкалу, на которой назначены дюймы и линіи: часто къ сей шкалѣ придѣлывается ноній, для опредѣленія частей линіи. Нуль дѣленія очевидно долженъ находиться при уровнѣ ртути; но такъ какъ сей уровень нѣсколько измѣняется съ высотою ртутнаго столба, то придуманы средства для приведенія его къ нулю дѣленія. На сей конецъ употребляются или подвижныя шкалы, или, посредствомъ винтика, подымаютъ и опускаютъ чашечку, чрезъ что̀ возвышается или понижается самый уровень.

Для дальнѣйшихъ подробностей о Барометрахъ, отсылаемъ читателей ко всѣмъ курсамъ Физики, въ которыхъ они найдутъ описанія разнаго устройства такого рода снарядовъ. Скажемъ только, что нашъ Академикъ *А. Купферъ* значительно усовершенствовалъ обыкновенный барометръ. Описаніе сего новаго барометра помѣщено въ *Annalen der Physik und Chemie von Poggendorf*, Bd. XXVI.

Открытіе барометровъ собственно должно отнести къ 1644 году, когда знаменитый физикъ *Торричелли* первый произвелъ опытъ, описанный нами въ началѣ этой статьи, и доказалъ тѣмъ самымъ вѣсомость атмосфернаго воздуха.

BAROMÈTRIQUE (FORMULE). БАРОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА. Самое примѣчательное употребленіе барометра безъ сомнѣнія состоитъ въ измѣреніи посредствомъ сего инструмента вертикальныхъ высотъ, какъ то горъ и проч. Практическая польза этого предмета побуждаетъ насъ привести здѣсь *барометрическую формулу* со всѣми подробностями принадлежащими къ ней.

Пусть будетъ ABC (черт. 16 Листъ II) запаянная съ верхняго конца стеклянная трубка, въ которую, какъ сказано было въ предыдущей статьѣ, наливается ртуть. Положимъ, что въ бо̀льшемъ колѣнѣ AB ртуть подымается до высоты i, а въ мѐньшемъ до l, такъ что давленіе атмосфернаго воздуха въ томъ мѣстѣ, гдѣ производятъ наблюденіе, измѣряется высотою ртутнаго столбца ik. Если изобразимъ чрезъ g силу тяжести, чрезъ m плотность ртути, а чрезъ h высоту ik, то вѣсъ ртутнаго столбца, имѣющаго основаніемъ единицу поверхности, а высотою h, выразится произведеніемъ gmh, которое будетъ также измѣрять давленіе атмосферы на единичную поверхность въ томъ мѣстѣ, гдѣ дѣлаютъ наблюденіе. Изобразивъ чрезъ Π сіе послѣднее давленіе, найдется

$$gmh = \Pi.$$

Величина Π отъ различныхъ измѣненій, происходящихъ въ нашей атмосферѣ также измѣняется, а слѣдовательно, вмѣстѣ съ нею и высота h ртути въ барометрѣ. По мѣрѣ того какъ будемъ подыматься на высоты болѣе и болѣе значительныя, давленіе атмосферы уменьшается и ртуть въ барометрѣ упадаетъ. Если бы законъ, по которому измѣняется плотность воздуха въ послѣдовательныхъ его слояхъ былъ извѣстенъ, то легко бы было по разности высотъ ртутныхъ стояній при двухъ мѣстахъ наблюденія, опредѣлить разность вертикальныхъ высотъ сихъ двухъ мѣстъ. Для вывода сего закона мы должны прибѣгнуть къ нѣкоторымъ опытамъ, открывающимъ зависимость плотности воздуха отъ давленія и температуры; въ статьѣ: *aériformes (fluides)* мы видѣли, что изобразивъ чрезъ p упругость воздуха (или инаго газа), чрезъ ϱ его плотность, и чрезъ ϑ число градусовъ Цельсіева или стоградуснаго термометра, будетъ

$$(1) \qquad p = a\varrho\,(1 + 0{,}00375 \cdot \vartheta),$$

разумѣя подъ a отношеніе упругости къ плотности при 0°.

Основываясь на этомъ законѣ, выведенномъ изъ опытовъ, посмотримъ какимъ образомъ можно найти барометрическую формулу. Такъ какъ, независимо отъ предыдущаго отношенія, необходимо, для нашей цѣли, знать условіе равновѣсія атмосферы, то мы займемся сперва этимъ предметомъ, дабы читатель не имѣлъ надобности искать его изложеніе въ другомъ мѣстѣ.

Изобразимъ чрезъ p и ϱ давленіе и плотность воздуха въ какой ни есть точкѣ земной атмосферы; чрезъ x, y, z координаты этой точки, а чрезъ X, Y, Z ускорительныя силы, приложенныя къ ней. По законамъ Гидростатики получимъ

$$dp = \varrho\,(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Силы X, Y, Z суть составляющія тяжести, ибо всѣ другія силы, дѣйствующія на нашу атмосферу, такъ незначительны когда сія послѣдняя находится въ равновѣсіи, что могутъ быть пренебрежены. Изобразивъ чрезъ g' тяжесть, и принявъ плоскость xy горизонтальною, а ось z вертикальною и направленною снизу вверхъ, очевидно получимъ $X = o$, $Y = o$, $Z = -g$; слѣдовательно

$$dp = -\varrho g' dz.$$

Это уравненіе показываетъ, что величины p и ϱ могутъ только зависѣть отъ z; но какъ сіи условія никогда не удовлетворяются для цѣлой массы нашей атмосферы, то ясно, что эта жидкость никогда не будетъ находиться въ состояніи равновѣсномъ; и такъ, предыдущее уравненіе, а также и выводимыя изъ него слѣдствія, будутъ справедливы только относительно нѣкоторой части атмосферы, находящейся въ покоѣ въ опредѣленное мгновеніе; мы поступили бы весьма ошибочно, еслибъ распространили слѣдствія выведенной формулы на значительныя протяженія атмосферы; для этого надлежало бы знать, что разсматриваемая нами часть атмосферы дѣйствительно находится въ равновѣсіи, а это, безъ сомнѣнія, вовсе невозможно.

Раздѣливъ уравненіе $dp = -\varrho g' dz$ на урав. (1), получимъ

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g'dz}{a\,(1+\alpha\vartheta)},$$

гдѣ для краткости положили $\alpha = 0{,}00375$.

Для опредѣленія силы тяжести g', изобразимъ чрезъ r радіусъ земнаго шара, а чрезъ g напряженіе этой самой силы при поверхности земли; въ слѣдствіе закона притяженія (См. ATTRACTION) получимъ пропорцію $g' : g = \frac{1}{(r+z)^2} : \frac{1}{r^2}$, откуда $g' = \frac{gr^2}{(r+z)^2}$; слѣдовательно

$$\frac{dp}{p} = -\frac{gr^2}{a\,(1+\alpha\vartheta)}\cdot\frac{dz}{(r+z)^2}.$$

Еслибы зависимость температуры ϑ отъ высоты z была извѣстна, то изъ этого уравненія легко бы было опредѣлить величину p въ функціи z; но опыты не указали еще удовлетворительнымъ образомъ на видъ сей зависимости; извѣстно только, что по мѣрѣ того какъ подымаемся, температура ϑ уменьшается. Несмотря на неизвѣстность этого закона, мы можемъ рѣшить задачу съ надлежащею точностію; для сего, по извѣстнымъ правиламъ Интегральнаго исчисленія, и замѣтивъ что функція $a(1+\alpha\vartheta)$ удерживаетъ всегда одинъ и тотъ же знакъ, получимъ

$$log\left(\frac{\varpi}{p}\right) = \frac{gr}{a\,(1+\alpha\vartheta')}\cdot\frac{z}{r+z},$$

гдѣ ϑ' изображаетъ среднюю изъ всѣхъ температуръ отъ поверхности земли до высоты z, а ϖ давленіе при поверхности земли.

Чтобы гиперболическій логариѳмъ $log\left(\frac{\varpi}{p}\right)$ привести къ обыкновенному, то помножимъ предыдущее уравненіе на модуль, то есть на число 0,434295, которое для краткости изобразимъ чрезъ k. Получимъ

$$(2)\qquad Log\left(\frac{\varpi}{p}\right) = \frac{kgr}{a\,(1+\alpha\vartheta')}\cdot\frac{z}{r+z},$$

разумѣя подъ $Log.$ обыкновенный логариѳмъ. Что касается до ϑ', то очевидно, что безъ чувствительной погрѣшности можно замѣнить эту величину среднею ариѳметическою между температурами, соотвѣтствующими нижней и верхней точкѣ вертикальной высоты z.

Уравненія (1) и (2), опредѣляющія давленіе и плотность чрезъ вертикальную высоту z, суть именно тѣ, которыя нужны для нашей цѣли, и здѣсь собственно начинается способъ опредѣленія вертикальныхъ высотъ посредствомъ барометра.

Пусть будутъ h и h_1 высоты ртути въ барометрѣ при первомъ и второмъ мѣстѣ наблюденія; T и T' соотвѣтственныя температуры ртути, которыя узнаются посредствомъ термометра, соприкосновеннаго съ барометромъ, а t и t' температуры воздуха, указываемыя свободнымъ термометромъ. Вѣсы ртутныхъ столбцовъ, при основаніи высоты z и при ея вершинѣ, будутъ соотвѣтственно выражаться произведеніями gmh и $g'm'h_1$, разумѣя подъ m' плотность ртути при высотѣ z; и такъ получимъ

$$\varpi = gmh,\ p = g'm'h_1,$$

откуда

$$\frac{\varpi}{p} = \frac{g}{g'}\cdot\frac{m}{m'}\cdot\frac{h}{h_1}.$$

Но мы видѣли выше что $\frac{g}{g'} = \left(1+\frac{z}{r}\right)^2$; и если, сверхъ того, примемъ въ соображеніе, что ртуть расширяется для каждаго градуса Цельсіева термометра на $\frac{1}{5550}$ часть своего объёма, то найдемъ $m' = \left(1+\frac{T-T'}{5550}\right)m$, и слѣдовательно

$$\frac{\omega}{p} = \left(1+\frac{z}{r}\right)^2 \cdot \frac{h}{\left(1+\frac{T-T'}{5550}\right)h_1};$$

принявъ для краткости $\left(1+\frac{T-T'}{5550}\right)h_1 = h'$, получимъ

$$\frac{\omega}{p} = \left(1+\frac{z}{r}\right)^2 \cdot \frac{h}{h'}$$

или $Log\left(\frac{\omega}{p}\right) = Log\left(\frac{h}{h'}\right) + 2\,Log\left(1+\frac{z}{r}\right)$,

гдѣ h' изображаетъ высоту ртути при второмъ наблюденіи, исправленную отъ погрѣшности происходящей отъ измѣненія ея плотности.

Совокупляя послѣднее уравненіе съ уравн. (2), находимъ

$$(3)\quad Log\left(\frac{h}{h'}\right) + 2\,Log\left(1+\frac{z}{r}\right) = \frac{kgr}{a(1+\alpha\vartheta')} \cdot \frac{z}{r+z}.$$

Въ этой формулѣ, какъ замѣчено было выше, должно замѣнить величину ϑ' полусуммою температуръ двухъ мѣстъ наблюденій, то есть выраженіемъ $\frac{1}{2}(t+t')$. Мы сказали также, что коэффиціентъ $\alpha = 0{,}00375$; но, принимая въ расчётъ гигрометрическое состояніе воздуха, не худо увеличить нѣсколько этотъ коэффиціентъ: дѣйствительно, опыты показали, что при обыкновенномъ давленіи атмосферы, плотность воды, превращенной въ пары, относится къ плотности воздуха, такъ какъ 10 къ 16; и такъ, чѣмъ больше паровъ въ воздухѣ, тѣмъ легче сей послѣдній; но извѣстно: чѣмъ выше температура, тѣмъ болѣе и паровъ въ воздухѣ; слѣдовательно, при высшей температурѣ вѣсъ воздуха будетъ уменьшаться въ бо́льшемъ отношеніи, нежели увеличивается его объёмъ. По сей-то причинѣ мы и увеличимъ коэффиціентъ α, и примемъ его равнымъ 0,004; и такъ

$$\alpha\vartheta' = \frac{2(t+t')}{1000};$$

подставляя эту величину въ уравн. (3), найдемъ формулу

$$(4)\quad z = \frac{a}{kg}\left(1+\frac{2(t+t')}{1000}\right) \times \left[Log\left(\frac{h}{h'}\right) + 2\,Log\left(1+\frac{z}{r}\right)\right]\left(1+\frac{z}{r}\right).$$

Самое вѣрное средство для опредѣленія численнаго коэффиціента $\frac{a}{kg}$, входящаго въ эту формулу, состоитъ въ употребленіи какой нибудь высоты z, съ точностію опредѣленной помощію тригонометрическихъ измѣреній. На сей конецъ надобно подставить въ предыдущую формулу сказанное значеніе z и величины h, h', t, t', наблюденныя барометромъ и термометромъ при основаніи и вершинѣ высоты z, а вмѣсто r, средній радіусъ земли, то есть, величину 6366198 метровъ*). Очевидно, что такимъ образомъ опредѣлится значеніе коэффиціента $\frac{a}{kg}$. *Рамонъ* (*Ramond*), посредствомъ многочисленныхъ и весьма точныхъ наблюденій, произведенныхъ имъ въ Пиренейскихъ горахъ, нашелъ, что при широтѣ 45° (стараго дѣленія) $\frac{a}{kg} = 18336$ метрамъ. По сей причинѣ этотъ коэффиціентъ и называютъ часто *коэффиціентомъ Рамона* (*coëfficient de Ramond*). Съ измѣненіемъ широты мѣста наблюденія измѣняется сила тяжести g, а слѣдовательно и коэффиціентъ $\frac{a}{kg}$. При какой ни есть широтѣ ψ, найдется (Смот. GRAVITÉ),

$$\frac{a}{kg} = 18336^{\text{м.}}(1+0{,}002837\,.\,Cos\,2\psi).$$

И такъ, посредствомъ формулы (4) и величины для $\frac{a}{kg}$, опредѣляемой послѣднимъ уравненіемъ, можно будетъ опредѣлять вертикальныя высоты при какихъ угодно широтахъ. Для сего, откидываемъ сперва во второй части формулы (4) дробь $\frac{z}{r}$, которая вообще будетъ весьма мала; такимъ образомъ получится первая приближенная величина для z, которую изобразимъ чрезъ z'; слѣдовательно

$$z' = \frac{a}{kg}\left(1+\frac{2(t+t')}{1000}\right) Log\left(\frac{h}{h'}\right);$$

подставивъ эту величину z' на мѣсто z во вторую же часть уравн. (4), получимъ значеніе z уже весьма близкое къ истинному. Продолжая такимъ образомъ приближеніе мы нашли бы значенія z болѣе и болѣе точныя; но, замѣтимъ, что всегда можно довольствоваться второю приближенною величиною z.

Когда высота, измѣряемая посредствомъ барометра, не слишкомъ значительна, то можно

*) Для приведенія метровъ въ Россійскія мѣры, замѣтимъ, что 1 метръ = 3,281 россійскимъ или англійскимъ футамъ = 0,469 сажени.

принять первую приближенную величину; но въ такомъ случаѣ, надобно увеличить нѣсколько коэффиціентъ $\frac{a}{kg}$. Рамонъ вывелъ изъ многихъ наблюденій, что эта новая величина $\frac{a}{kg} = 18393$ метрамъ (около $60347\frac{1}{2}$ рос. футовъ). И такъ

$$z = 18393^{\text{м.}}\left(1 + \frac{2(t+t')}{1000}\right) Log\left(\frac{h}{h'}\right),$$

гдѣ коэффиціентъ 18393 относится къ широтѣ 45°, а для другой широты ψ долженъ быть умноженъ на $1 + 0{,}002837 . Cos\,2\psi$, какъ было сказано выше. Послѣдняя формула употребляется почти во всѣхъ случаяхъ.

Для облегченія вычисленій по приведеннымъ выше формуламъ, были составлены разныя таблицы, болѣе или менѣе удобныя; преимущественно отличаются передъ другими таблицы *Гаусса* и *Ольтманса (Oltmanns)*. Читатели найдутъ первыя въ Русскомъ Энциклопедическомъ Лексиконѣ въ статьѣ *барометръ*, а вторыя, въ *Annuaire du bureau des longitudes.*

Первая мысль объ употребленіи барометра для измѣренія высотъ, возникла безъ сомнѣнія послѣ извѣстнаго опыта, произведеннаго на горѣ *Пюи-де-Домъ* (*Puy-de-Dôme*) *Перьеромъ* (*Perier*), по указанію знаменитаго *Пасхаля*. По мѣрѣ того какъ приближались къ ея вершинѣ, ртуть въ трубкѣ понижалась, откуда слѣдовало заключить, что вѣсъ атмосферы, уравновѣшивающій ртуть въ барометрѣ, уменьшался по мѣрѣ того, какъ подымались на высоты болѣе и болѣе значительныя. Что касается до самаго *способа* измѣренія высотъ, то начала его принадлежатъ *Галлею* (См. *Transactions philosophiques* n° 181). Впослѣдствіи *Лапласъ* въ IV томѣ своей *Небесной Механики*, предложилъ общее рѣшеніе сей задачи, и вывелъ формулу, которая согласуется съ уравн. (4), когда въ семъ послѣднемъ откинемъ вторыя и высшія степени отношенія $\frac{z}{r}$.

BAROMÈTROGRAPHE. (Физ.) **БАРОМЕТРОГРАФЪ.** Барометръ устроенный такимъ образомъ, что высоты ртути, соотвѣтствующія извѣстнымъ промежуткамъ времени, напримѣръ каждому часу, сами собою отмѣчаются. — Въ иныхъ случаяхъ, *барометрографъ* назначается только для указанія *наибольшей* и *наименьшей* высоты стоянія ртути въ продолженіе цѣлыхъ сутокъ.

BAROSCOPE. Нѣкоторые физики употребляли слово *бароскопъ* въ смыслѣ *барометра;* нынѣ это названіе совсѣмъ вышло изъ употребленія. Смот. BAROMÈTRE.

BARRE. (Прикл. Мех.) **РЫЧАГЪ.** Желѣзная полоса или деревянный брусъ, употребляемый для поднимания тѣлъ, или для сообщенія вращательнаго движенія какой либо машинѣ. Смот. LEVIER.

BARREAUX MAGNÉTIQUES. (Физ.) **МАГНИТНЫЯ ПОЛОСЫ.** Намагниченныя желѣзныя полосы.

BARILLET. (Прикл. Мех.) **БАРАБАНЪ.** Такъ называется въ пружинныхъ часахъ, металлическій, большею частію мѣдный пустой цилиндръ, въ которомъ заключается пружина, приводящая весь механизмъ въ движеніе.

BASCULE. (Прикл. Мех.) **ПОДЪЁМЪ, ОЦѢПЪ.** Деревянный брусъ, обращающійся около оси, проходящей чрезъ его середину. Иногда оцѣпъ устраиваютъ такъ, чтобы ось могла двигаться по длинѣ бруса; въ такомъ случаѣ сей послѣдній, сверхъ вращательнаго движенія, можетъ еще возвышаться и понижаться. Часто на одномъ концѣ бревна придѣлывается *перевѣсъ* (*contrepoids*), какъ напримѣръ въ русскихъ колодезяхъ, извѣстныхъ подъ названіемъ *очеповъ.*

PONT A BASCULE. ВЕРТЯЩІЙСЯ МОСТЪ НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ОСИ.

BASE. (Геом.) **ОСНОВАНІЕ.** Вообще подъ симъ словомъ разумѣютъ низшую часть обмѣра какой нибудь фигуры. Въ семъ смыслѣ *основаніе* фигуры противуположно ея *вершинѣ.*

Впрочемъ можно принимать за *основаніе* и всякую сторону фигуры; напримѣръ, въ треугольникѣ, какую угодно изъ трехъ сторонъ. Въ прямоугольномъ треугольникѣ *гипотенуза* обыкновенно принимается за *основаніе;* въ равнобедренномъ же — *одиночная сторона.*

BASE DE L'HYPERBOLE, DE LA PARABOLE. ОСНОВАНІЕ ИПЕРБОЛЫ, ПАРАБОЛЫ, то есть, прямая пересѣченія сѣкущей плоскости съ плоскостію основанія конуса.

BASE D'UN SOLIDE. ОСНОВАНІЕ ТѢЛА. Площадь, на которой тѣло стоитъ, или стоять можетъ. И такъ, говорятъ: *основаніе пирамиды, конуса, цилиндра, параболоида,* и проч. *Base d'un plan incliné. Основаніе наклонной плоскости;* то есть, ея проэкція на горизонтальной плоскости.

*

BASE (Геод.) **ОСНОВАНІЕ, БАЗИСЪ.** Разстояніе, тщательно измѣряемое между двумя постоянными точками земной поверхности, съ цѣлію опредѣлить, или взаимное положеніе другихъ точекъ, или величину земныхъ градусовъ. Смот. LEVÉE DES PLANS, FIGURE DE LA TERRE. — Измѣреніе основанія есть самое важное дѣйствіе въ Геодезіи, и отъ точности его преимущественно зависитъ вѣрность опредѣляемыхъ разстояній между точками тригонометрической сѣти. Сверхъ того надобно наблюдать, чтобы длина основанія была какъ можно болѣе значительна, и, по крайней мѣрѣ, въ соразмѣрности съ боками тѣхъ треугольниковъ, къ которымъ она принадлежитъ.

Основанія измѣряются посредствомъ линеекъ, дѣлаемыхъ изъ дерева, желѣза, платины и проч. Обыкновенная ихъ длина бываетъ въ 5 метровъ, или, у насъ, въ 2 сажени. При измѣреніи основанія необходимо имѣть по крайней мѣрѣ двѣ, а еще лучше бо́льшее число такихъ линеекъ; въ такомъ случаѣ, положивъ ихъ по направленію измѣряемой линіи въ соприкосновеніи одна съ другою, можно будетъ снимать каждый разъ заднюю, и переносить для приложенія къ передней. Для точности дѣйствія надлежитъ, или класть линейки въ совершенно горизонтальномъ направленіи, или, наблюдая каждый разъ уголъ наклоненія, вмѣсто длины линейки, принимать ея проэкцію; сверхъ того, такъ какъ длина линейки измѣняется отъ вліянія температуры, то необходимо исправлять погрѣшность, происходящую отъ сей причины.

Мы не будемъ описывать *базиснаго прибора*, изобрѣтеннаго астрономо́мъ *Борда*; этотъ приборъ, служившій Деламбру для измѣренія дуги меридіана между Дюнкирхеномъ и Монжуи, соединяетъ въ себѣ всѣ условія, необходимыя для точности геодезическихъ измѣреній основаній. Читатели найдутъ обстоятельное описаніе сего инструмента въ книгахъ; *Traité de Géodesie par Puissant*, и *Геодезія А. Болотова*, 1836 года.

BASE. (Анал.) **ОСНОВАНІЕ.** *Base d'un systéme de logarithmes, основаніе логариѳмической системы.* Въ Бригговой логариѳмической системѣ основаніе $=10$; въ Неперовой, оно опредѣляется рядомъ $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots = 2,7182818\ldots$, Смот. LOGARITHME. — Подъ словомъ *base* иногда разумѣютъ то же, что и подъ словомъ *racine primitive (разноостаточное основаніе).* Смот. RACINE PRIMITIVE.

BATONS или **BAGUETTES DE NEPER. НЕПЕРОВЫ ПАЛОЧКИ.** Смот. BAGUETTES.

BE.

BEAUNE (PROBLÈME DE). ЗАДАЧА БОНА. Французскій математикъ *Флоримонъ Бонъ*, жившій въ первой половинѣ 17-го столѣтія, предложилъ *Декарту* слѣдующую задачу: *найти такую кривую линію, чтобы ея ордината относилась къ подкасательной, такъ какъ данная постоянная линія, къ разности между ординатою и абсциссою.* Декартъ, посредствомъ своего анализа, не могъ рѣшить эту задачу во всей ея полнотѣ, но указалъ на строеніе кривой и на нѣкоторыя свойства сей послѣдней. При пособіи же Интегральнаго Исчисленія, уравненіе искомой кривой находится весьма просто; дѣйствительно, условіе задачи приводитъ непосредственно къ дифференціальному уравненію

$$adx - (y - x)\,dy = 0,$$

гдѣ a изображаетъ данную линію.

Интегрируя это уравненіе по обыкновеннымъ правиламъ, находимъ слѣдующее конечное уравненіе искомой кривой:

$$\frac{y}{a} = \log\left(\frac{c}{a + x - y}\right)$$

гдѣ c изображаетъ постоянное произвольное количество.

Яковъ Бернулли предложилъ задачу Бона въ болѣе общемъ видѣ въ слѣдующихъ словахъ: *Дана какая ни есть кривая линія алгебрическая, трансцендентная, или даже начерченная наудачу: найти другую, которой подкасательная относилась бы къ ординатѣ, такъ какъ постоянная линія т къ суммѣ или разности этой самой ординаты и ординаты первоначальной кривой.*

Читатели найдутъ рѣшеніе этой задачи, относящейся къ *Бернулліеву уравненію* въ *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral par Lacroix*, 2-ое изд. Том. III. стр. 449.

Задача Бона примѣчательна тѣмъ, что была поводомъ къ изобрѣтенію *обратнаго способа касательныхъ.* Смот. TANGENTES (MÉTHODE INVERSE DES).

BÉLIER HYDRAULIQUE. (Прикл. Мех.) **ГИДРАВЛИЧЕСКІЙ ТАРАНЪ.** Водоподъёмная машина, изобрѣтенная *Монгольфіеромъ*, который извѣстенъ открытіемъ аэростатовъ. Описаніе этой остроумной и полезной машины читатели найдутъ въ *Traité élémentaire des Machines* соч. *Hachette*. Въ томъ же сочиненіи описаны *сифонный таранъ (bélier-siphon)* и *всасывающій таранъ (bélier aspirateur)*.

BÉLIER. (Астр.) **ОВЕНЪ.** Первый знакъ зодіака: Смот. ZODIAQUE.

BÉLIERS. ТАРАНЫ. Стѣнобитныя орудія древнихъ.

BÉNÉFICE. (Исч. Вѣр.) **ВЫГОДА.** Выгода, ожидаемая отъ какого либо событія, есть прибыль или выигрышъ доставляемый лицу этимъ событіемъ. Мѣрою выгоды въ Исчисленіи Вѣроятностей принимаютъ произведеніе ожидаемой прибыли на вѣроятность того событія, отъ котораго прибыль зависитъ.

Положимъ, что ожидаемъ s событій; появленіе каждаго изъ нихъ доставляетъ выигрышъ a, а непоявленіе, проигрышъ b. Спрашивается, какъ велика будетъ наша выгода? Изобразимъ чрезъ p вѣроятность появленія каждаго изъ событій, предполагаемыхъ равно вѣроятными, а чрезъ q противную вѣроятность, такъ что $p+q=1$. Возвышая $p+q$ въ степень s, находимъ

$$(p+q)^s=p^s+sp^{s-1}q+\frac{s(s-1)}{1.2}p^{s-2}q^2+\dots\dots\dots + \frac{1\cdot2\cdot3\cdot\dots\cdot s}{1.2.3\cdots n\cdot1.2.3\cdots m}p^mq^n+\dots+q^s$$

гдѣ $m+n=s$.

Каждый членъ этого выраженія будетъ изображать вѣроятность появленія событія столько разъ, сколько единицъ въ показателѣ надъ p, а вѣроятность непоявленія будетъ означена показателемъ количества q. Выигрыши, соотвѣтствующіе симъ различнымъ вѣроятностямъ, будутъ по порядку

$sa,\ (s-1)a-b,\ (s-2)a-2b,\dots(s-n)a-nb\dots-sb$

И такъ, искомая выгода будетъ

$$sap^s+s[(s-1)a-b]p^{s-1}q+\frac{s(s-1)}{1\cdot2}[(s-2)a-2b]p^{s-2}q^2+\dots\dots+\frac{1.2.3\dots\dots\dots\dots s}{1.2.3\dots n.1.2.3\dots(s-n)}[(s-n)a-nb]p^{s-n}q^n+\dots\dots-sbq^s=s(ap-bq)(p+q)^{s-1}=s(ap-bq).$$

По сей формулѣ весьма легко будетъ судить, въ каждомъ частномъ случаѣ, можно ли ожидать выгоды или невыгоды. Очевидно, что должно ожидать выгоды когда $ap>bq$, а невыгоды, если $bq>ap$.

Изъ всего сказаннаго можно заключить, что слово *выгода* употребляется въ одномъ значеніи съ реченіемъ *математическое ожиданіе (espérance mathématique)*. Одно различіе, которое можно положить между *bénéfice* и *espérance mathématique*, заключается въ томъ, что первое изображаетъ дѣйствительную прибыль, то есть величину существенно *положительную*, между тѣмъ какъ второе можетъ означать и проигрышъ, и въ этомъ смыслѣ быть величиною *отрицательною*. Смот. AVANTAGE.

BERNOULLI (NOMBRES DE). (Анал.) **БЕРНУЛЛІЕВЫ ЧИСЛА.** Численные коэффиціенты при первой степени перемѣнной x въ разложеніи интеграловъ $\Sigma x^2,\ \Sigma x^4,\ \Sigma x^6,\dots$ и вообще Σx^{2n}. Сіи коэффиціенты всегда принимаются съ положительными знаками. — *Яковъ Бернулли* первый замѣтилъ эти числа (*Ars conjectandi*. Basil. 1713. стр. 97.), почему они и названы его именемъ. — Бернулліевы числа имѣютъ довольно важное значеніе въ математическомъ анализѣ, ибо весьма часто встрѣчаются въ теоріи рядовъ; многіе первостепенные математики занимались изслѣдованіемъ ихъ свойствъ. *Муавръ (Moivre)* показалъ примѣчательный законъ составленія Бернулліевыхъ чиселъ. Если изобразимъ по порядку чрезъ

$$B_1,\ B_3,\ B_5,\ B_7,\ \dots\ B_{2n-1}$$

первое, второе, третье, четвертое,......... n-ое Бернулліево число, то имѣемъ слѣдующія формулы:

$$0=3B_1-\tfrac{1}{2}$$
$$0=5B_3-\frac{5\cdot4\cdot3}{1.2.3}B_1+\tfrac{3}{2}$$
$$0=7B_5-\frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}B_3+\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}B_1-\tfrac{5}{2}$$
$$0=9B_7-\frac{9.8.7}{1.2.3}B_5+\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}B_3-\frac{9.8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6.7}B_1+\tfrac{7}{2}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

изъ которыхъ усматриваемъ, какимъ образомъ опредѣляется Бернулліево число какого ни есть порядка посредствомъ чиселъ всѣхъ предшествующихъ порядковъ. *Эйлеръ* также не оставилъ этого предмета безъ вниманія. *Лапласъ*, употребивъ удачный пріёмъ въ разложеніи въ рядъ функціи $\frac{h}{e^h-1}$, получилъ *общій членъ* Бернулліевыхъ чиселъ. Вотъ сущность его анализа. Пусть будетъ:

$$\frac{h}{e^h-1}=A+A_1h+A_2h^2+A_3h^3+A_4h^4+\dots+A_nh^n+\dots$$

по Маклореновой шеоремѣ найдемъ:

$$A_n = \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{d^n\left(\frac{h}{e^h-1}\right)}{dh^n},$$

гдѣ, послѣ диффеpенцированія, надлежитъ положить $h=0$. Совершая означенныя дифференцированія для опредѣленія величинъ $A_1, A_2, A_3, \ldots$ увидимъ, что всѣ онѣ представляются въ неопредѣленномъ видѣ $\frac{0}{0}$. Для устраненія этого неудобства, Лапласъ придумалъ разложить дробь $\frac{h}{e^h-1}$ на слѣдующія двѣ

$$\frac{\frac{1}{2}h}{e^{\frac{1}{2}h}-1}-\frac{\frac{1}{2}h}{e^{\frac{1}{2}h}+1}.$$

И шакъ

$$\frac{d^n\left(\frac{h}{e^h-1}\right)}{dh^n}=\frac{d^n\left(\frac{\frac{1}{2}h}{e^{\frac{1}{2}h}-1}\right)}{dh^n}-\frac{d^n\left(\frac{\frac{1}{2}h}{e^{\frac{1}{2}h}+1}\right)}{dh^n}$$

$$=\frac{1}{2^n}\,\frac{d^n\left(\frac{\frac{1}{2}h}{e^{\frac{1}{2}h}-1}\right)}{d(\frac{1}{2}h)^n}-\frac{1}{2^n}\,\frac{d^n\left(\frac{\frac{1}{2}h}{e^{\frac{1}{2}h}+1}\right)}{d(\frac{1}{2}h)^n}.$$

Но полагая $h=0$, очевидно будетъ

$$\frac{d^n\left(\frac{h}{e^h-1}\right)}{dh^n}=\frac{d^n\left(\frac{\frac{1}{2}h}{e^{\frac{1}{2}h}-1}\right)}{d(\frac{1}{2}h)^n}$$

и слѣдовательно

$$\frac{d^n\left(\frac{h}{e^h-1}\right)}{dh^n}=-\frac{1}{2^n-1}\cdot\frac{d^n\left(\frac{\frac{1}{2}h}{e^{\frac{1}{2}h}+1}\right)}{d(\frac{1}{2}h)^n}.$$

Вторая часть этого уравненія уже не обращается, какъ первая, въ $\frac{0}{0}$ для $h=0$. Когда она опредѣлится, то получимъ величину A_n посредствомъ уравненія

$$A_n=-\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots n}\cdot\frac{1}{2^n-1}\cdot\frac{d^n\left(\frac{\frac{1}{2}h}{e^{\frac{1}{2}h}+1}\right)}{d(\frac{1}{2}h)^n}.$$

Чрезъ разложеніе количества $\frac{d^n\left(\frac{\frac{1}{2}h}{e^{\frac{1}{2}h}+1}\right)}{d(\frac{1}{2}h)^n}$ Лапласъ нашелъ:

$$A_n=\frac{\pm1}{1.2.3\cdots(n-1)(2^n-1)2^n}\left\{\begin{array}{l}1-(2^{n-1}-n)+\left(3^{n-1}-n2^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\right)-\ldots\ldots\\ \pm\left[(n-1)^{n-1}-n(n-2)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-3)^{n-1}-\ldots\right]\end{array}\right\}.$$

Но, по свойству Бернулліевыхъ чиселъ, имѣемъ слѣдующія отношенія:

$$B_1 = 2A_2$$
$$B_3 = 2.3.4.A_4$$
$$B_5 = 2.3.4.5.6.A_6$$
$$B_7 = 2.3.4.5.6.7.8.A_8$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_{2n-1} = 2.3.4\ldots\ldots\ldots 2n.A_{2n}$$

почему *общій членъ Бернулліевыхъ чиселъ* опредѣлится формулою

$$B_{2n-1}=\frac{\pm2n}{(2^{2n}-1)2^{2n-1}}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}n^{2n-1}-(n-1)^{2n-1}\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2n}{1}\right]+(n-2)^{2n-1}\left[1+\frac{2n}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2n(2n-1)}{1\cdot2}\right]\\ -(n-3)^{2n-1}\left[1+\frac{2n}{1}+\frac{2n(2n-1)}{1\cdot2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1\cdot2\cdot3}\right]+\ldots\end{array}\right\}.$$

Послѣ Лапласа, другіе математики занимались рѣшеніемъ этой же задачи, и еще недавно Профессоръ *Шеркъ* въ Галле (Смот. Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von A. L. Crelle, 1829, IV часть, 3 тетрадь), предложилъ новое выраженіе для общаго члена, которое онъ вывелъ разлагая въ рядъ тангенсъ дуги $(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x)$, по возрастающимъ степенямъ перемѣнной x.

Приведемъ здѣсь первыя 25 Бернулліевыхъ чиселъ, которыя мы заимствуемъ изъ прибавленій къ Математическому Лексикону *Клюгеля*, изданныхъ *Грунертомъ*.

$$\frac{1}{6},\ \frac{1}{30},\ \frac{1}{42},\ \frac{1}{30},\ \frac{5}{66},\ \frac{691}{2730},\ \frac{7}{6},\ \frac{3617}{510},\ \frac{43867}{798},\ \frac{174611}{330},$$
$$\frac{854513}{138},\ \frac{236364091}{2730},\ \frac{8553103}{6},\ \frac{23749461029}{870},\ \frac{8615841276005}{14322},$$
$$\frac{7709321041217}{510},\ \frac{2577687858367}{6},\ \frac{26315271553053477373}{1919190},$$
$$\frac{2929993913841559}{6},\ \frac{261082718496449122051}{13530},$$
$$\frac{1520097643918070802691}{1806},\ \frac{27833269579301024235023}{690},$$
$$\frac{596451111593912163277961}{282},\ \frac{5609403368997817686249127547}{46410},$$
$$\frac{495057205241079648212477525}{66}.$$

Всѣ изслѣдованія о Бернулліевыхъ числахъ изложены подробно и отчетливо въ книгахъ: Supplemente zu Georg Simon Klügel's Wörterbuche der reinen Mathematik. Herausgegeben von Johann August Grunert; erste Abtheilung, Leipzig, 1833, и въ *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral par Lacroix.* 2-ое изд. Том. III.

BERNOULLI (SÉRIE DE). (Анал.) **БЕРНУЛЛІЕВЪ РЯДЪ.** Такъ называется рядъ, выведенный *Иваномъ Бернулли,* и имѣющій то же значеніе въ Интегральномъ исчисленіи, какъ Тайлорова строка въ отношеніи Дифференціальнаго.

Положимъ

$$\int f(x)\, dx = \varphi(x);$$

если припишемъ перемѣнной x приращеніе h, то получимъ

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \varphi'(x)h + \varphi''(x)\frac{h^2}{1\cdot 2} + \varphi'''(x)\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$+ \text{ и проч.}$$

Но очевидно

$$\varphi'(x) = f(x),\ \varphi''(x) = f'(x),\ \varphi'''(x) = f''(x) \text{ и проч.}$$

слѣдовательно

$$\varphi(x) = \int f(x)dx = \varphi(x+h) - f(x)h - f'(x)\frac{h^2}{1\cdot 2}$$
$$- f''(x)\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \text{ и проч.}$$

Полагая въ этомъ ряду $h = -x$, найдемъ

$$\int f(x)dx = \varphi(0) + f(x)x - f'(x)\frac{x^2}{1\cdot 2} + f''(x)\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \text{ и пр.}$$

гдѣ $\varphi(0)$ изображаетъ постоянную произвольную величину.

Очевидно, что рядъ Бернулліевъ только для цѣлой функціи $f(x)$ будетъ состоять изъ ограниченнаго числа членовъ; во всѣхъ другихъ случаяхъ онъ будетъ безконечный, почему и не принесетъ никакой пользы какъ средство для точнаго интегрированія.

BERNOULLI (ÉQUATION DE). (Анал.) **БЕРНУЛЛІЕВО УРАВНЕНІЕ.** Такъ называется дифференціальное уравненіе перваго порядка $dy + yf(x)\,dx = F(x)\,dx$, гдѣ $f(x)$ и $F(x)$ изображаютъ какія угодно функціи перемѣнной x. Это самое уравненіе называютъ иногда *линейнымъ уравненіемъ перваго порядка (équation linéaire du premier ordre). Яковъ Бернулли,* котораго имя удержало приведенное уравненіе, поступилъ слѣдующимъ образомъ для его интегрированія: принявъ X за неопредѣленную функцію перемѣнной x, и положивъ $y = Xz$, найдемъ $dy = zdX + Xdz$, и слѣдовательно

$$zdX + Xdz + f(x)\,Xzdx = F(x)dx.$$

По причинѣ неопредѣленности X, мы можемъ располагать этою функціею такъ, чтобы перемѣнныя величины отдѣлились въ предыдущемъ уравненіи, для чего стоитъ только положить

$$zdX + f(x)\,Xzdx = 0 \text{ откуда } X = e^{-\int f(x)\,dx}.$$

Для опредѣленія z получимъ формулу

$$Xdz = F(x)\,dx;$$

слѣдовательно

$$dz = e^{\int f(x)\,dx}F(x)\,dx$$

и

$$z = \int e^{\int f(x)\,dx}F(x)\,dx + C,$$

разумѣя подъ C постоянную произвольную величину.

И такъ, интегралъ Бернулліева уравненія будетъ

$$y = e^{-\int f(x)\,dx}\left[\int e^{\int f(x)\,dx}F(x)dx + C\right].$$

Можно найти этотъ самый интегралъ безъ всякихъ подстановленій слѣдующимъ образомъ: раздѣливъ данное уравненіе на y, и интегрируя потомъ, найдется

$$\log y + \int f(x)\,dx = \int\frac{F(x)\,dx}{y}$$

но, по причинѣ $\int f(x)\,dx = \log e^{\int f(x)\,dx}$, получимъ

$$\log\left(y.e^{\int f(x)\,dx}\right) = \int\frac{F(x)\,dx}{y},$$

чего дифференціалъ будетъ

$$\frac{d\left(ye^{\int f(x)\,dx}\right)}{ye^{\int f(x)\,dx}} = \frac{F(x)dx}{y};$$

отсюда, чрезъ уничтоженіе дробей и интегрированіе получимъ ту же величину для y, какъ и выше.

Замѣтимъ что Бернулліево уравненіе можетъ быть обращено въ полный дифференціалъ чрезъ умноженіе обѣихъ его частей на $e^{\int f(x)\,dx}$.

BEVAU, BIVEAU или **BEUVEAU.** Не упот. (Геом.) **ДВУГРАННЫЙ УГОЛЪ;** См. ANGLE DIÈDRE. — **УГЛОМѢРЪ,** инструментъ, употребляемый для измѣренія двугранныхъ угловъ.

BI.

BIAISES (SURFACES). (Геом.) То же, что *surfaces gauches, косыя поверхности.* Смот. GAUCHE.

BI-ANGLE. (Геом.) **ДВУХЪ-УГОЛЬНИКЪ.** Неопредѣленное пространство, заключающееся между двумя параллельными линіями и прямою, перпендикулярною къ нимъ. Таково пространство *aABb* черт. 17 (листъ II).

BIANGULAIRE. ДВУХЪ-УГОЛЬНЫЙ. *Nombres biangulaires, двухъ-угольныя числа.* Такъ называются иногда натуральныя числа 1, 2, 3, 4 ...., когда причисляютъ ихъ къ *многоугольнымъ*. Дѣйствительно, если въ общемъ выраженіи $\frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{2}$ m-угольнаго числа положимъ $m=2$, то найдемъ просто n, изображающее бокъ двухъ-угольнаго числа. Смот. POLYGONES (NOMBRES).

BI-CARRÉ или **BICARRÉ.** (Ариө. и Алг.) **БИКВАДРАТЪ,** четвертая степень какого нибудь количества раціональнаго. См. BIQUADRATIQUE.

BI-CONCAVE. ДВОЯКО-ВОГНУТЫЙ. См. LENTILLE.
BI-CONVEXE. ДВОЯКО-ВЫПУКЛЫЙ. См. LENTILLE.

BIFIDES (DIVISEURS QUADRATIQUES) или просто **DIVISEURS BIFIDES.** (Теор. Чис.) **ДВОИЧНЫЕ КВАДРАТИЧЕСКІЕ ДѢЛИТЕЛИ,** или просто **ДВОИЧНЫЕ ДѢЛИТЕЛИ.** Такъ назвалъ *Лежандръ* выраженія второй степени слѣдующихъ трехъ видовъ: 1) px^2+ry^2, 2) $px^2+2qxy+2qy^2$, и 3) $px^2+2qxy+py^2$. О свойствахъ двоичныхъ дѣлителей смот. книгу: *Legendre, Théorie des Nombres.* Смот. также FORME.

BILLION или **MILLARD.** (Ариө.) **БИЛЛІОНЪ.** Такъ называютъ Французы цифру, занимающую съ лѣвой стороны *десятое* мѣсто. И такъ, 2000000000 изображаетъ у нихъ *два билліона.* У Германцевъ же *билліономъ* называется цифра, стоящая на *тринадцатомъ мѣстѣ.* У насъ, по бо́льшей части, какъ у Германцевъ, считаютъ на десятомъ мѣстѣ *тысячи милліоновъ.* Въ финансовыхъ расчетахъ Французы, вмѣсто *billion*, употребляютъ слово *millard.*

BIMÉDIAL. (Геом.) **БИМЕДІАЛЬНЫЙ, СОИЗМѢРИМЫЙ ВЪ СТЕПЕНИ.** Когда двѣ прямыя A и B будутъ *соизмѣримы только въ степени*, то сумма сихъ линій $A+B$ будетъ несоизмѣрима съ каждою изъ нихъ порознь. Линію $A+B$, въ такомъ случаѣ, древніе геометры называли *первою бимедіальною линіею (ligne première bimédiale.)*

Двѣ прямыя *соизмѣримы въ степени*, когда ихъ квадраты содержатся между собой, какъ цѣлое число къ другому, цѣлому же числу. Таковы напримѣръ ипотенуза и катетъ въ равнобедренномъ прямоугольномъ треугольникѣ. Смот. Евклида книгу X, *предлож.* 38 *и слѣдующія.*

BINAIRE (ARITHMÉTIQUE). ДІАДИЧЕСКАЯ, ДВОЙНИЧНАЯ, ДВУЦИФРЕННАЯ, ДВУЗНАЧНАЯ АРИӨМЕТИКА. Ариөметическая система, въ коей употребляются только два знака: 0 и 1. Основаніемъ діадической ариөметики служитъ геометрическая прогрессія

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 и проч.

такъ что 1 на второмъ мѣстѣ (считая отъ правой руки къ лѣвой) изображаетъ *два;* на третьемъ, *четыре;* на четвертомъ, *восемь,* и такъ далѣе. Въ слѣдствіе сего условія, *единица* изобразится чрезъ 1; *два,* чрезъ 10; *три,* чрезъ 11; *четыре,* чрезъ 100; *пять,* чрезъ 101; *шесть,* чрезъ 110; *семь,* чрезъ 111; *восемь,* чрезъ 1000; *девять,* чрезъ 1001; *десять,* чрезъ 1010; *одиннадцать,* чрезъ 1011, и такъ далѣе.

Подобная система неудобна по причинѣ значительнаго числа цифръ, требуемыхъ ею для изображенія чиселъ посредственной величины. Напримѣръ, число *двѣсти тридцать* (230), вмѣсто *трехъ* цифръ, требовало бы *восьми* цифръ; и дѣйствительно, по діадической системѣ, оно выражается слѣдующимъ образомъ: 11100110.

Что касается до перехода отъ десятичной системы къ діадической, и на оборотъ, то этотъ вопросъ рѣшается весьма простымъ образомъ. Положимъ, напримѣръ, что желаемъ выразить число 13 (тринадцать) по діадической системѣ: дѣлимъ 13 на 2, получаемъ частное 6 и остатокъ (1). Этотъ остатокъ будетъ *первая искомая цифра* съ правой стороны. Потомъ, найденное частное 6 дѣлимъ опять на 2, получаемъ новое частное 3 и остатокъ (0), который изобразитъ вторую цифру, считая по прежнему съ правой стороны къ лѣвой. Раздѣливъ 3 на 2, находимъ частное 1 и остатокъ (1). Далѣе дѣленіе невозможно, и частное (1) должно принимать за остатокъ, который пишется на послѣднемъ мѣстѣ. И такъ, *тринадцать* изобразится по діадической системѣ слѣдующими знаками: 1101.

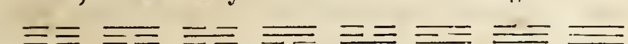
Для перехода отъ діадической системы къ десятичной, стоитъ только составить таблицу послѣдовательныхъ степеней числа 2. Потомъ, чрезъ простое сложеніе, получимъ искомое число. Напримѣръ, чтобы найти значеніе діадическаго числа 1101 по десятичной системѣ, пишемъ, начиная отъ правой руки къ лѣвой,

$$\text{по діадической}\left.\begin{array}{c} 1 = 1^1 = 1 \\ 0 = 0 = 0 \\ 1 = 2^2 = 4 \\ 1 = 2^3 = 8 \end{array}\right\}\text{по десятичной.}$$

Сумма 13 по десятичной.

Доказательство приведенныхъ дѣйствій такъ просто, что мы считаемъ излишнимъ приводить его.

Мысль о *діадической Ариѳметикѣ* принадлежитъ *Лейбницу*, который сообщилъ ее въ 1702 году; онъ полагалъ, что при трудныхъ изслѣдованіяхъ въ теоріи чиселъ, она можетъ имѣть большія преимущества предъ *десятичною*. Іезуитъ *Буве (Bouvet)*, миссіонеръ въ Китаѣ, которому Лейбницъ писалъ о своей *діадической Ариѳметикѣ*, сообщилъ сему послѣднему, что загадочная надпись, существующая въ Китаѣ болѣе 4000 лѣтъ, по его убѣжденію, объясняется двоиничною системою. Эта надпись, сдѣланная Императоромъ *Фои (Fohi)*, основателемъ Китайской Имперіи, а вмѣстѣ и наукъ въ Китаѣ, была вѣроятно вразумительна въ теченіи многихъ столѣтій; но впослѣдствіи смыслъ ея утратился, и никакія старанія позднѣйшихъ учёныхъ въ Китаѣ, пытавшихся разгадать значеніе сихъ письменъ, не имѣли успѣха. Вотъ эта надпись:



Если принять, слѣдуя миссіонеру Буве, сплошную черту —— за *единицу*, а ломаную — — за *нуль*, то очевидно, что знаки приведенной надписи будутъ по порядку изображать числа

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

BINAIRE (FORME). (Теор. чис.) **ДВОИЧНЫЙ ВИДЪ.** Такъ называетъ *Гауссъ* алгебрическую однородную функцію какой ни есть степени съ двумя неопредѣленными величинами, въ которой всѣ коэффиціенты суть цѣлыя числа. И такъ, $ax^2 + 2bxy + cy^2$, есть *двоичный видъ второй степени*. Когда однородная функція заключаетъ въ себѣ три неопредѣленныя величины, также съ коэффиціентами цѣлыми, то она принимаетъ названіе *третичнаго вида (forme trinaire)*. Такова напримѣръ функція второй степени

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2.$$

Въ томъ же смыслѣ должно разумѣть названія *quaternaire (четверичный)*, *quinaire (пятеричный)* и проч. Замѣтимъ, что доселѣ математики большею частію ограничивались изслѣдованіемъ видовъ *второй степени*. Смот. FORMES (THÉORIE DES).

Expression binaire, двоичное выраженіе. Такъ называли нѣкоторые математики, между прочими *Эйлеръ*, выраженіе 2^n. — *Nombre binaire; двоиничное число; два* (2), число состоящее изъ двухъ единицъ.

BINOME. (Алг.) Отъ Греческаго *βὶς, два раза* и *νομή, часть.* **ДВУЧЛЕННОЕ КОЛИЧЕСТВО, БИНОМІЯ, БИНОМЪ, ДВУЧЛЕНЪ.** Выраженіе состоящее изъ двухъ членовъ, которые соединены между собою знаками $+$ или $-$. И такъ $a + b$, $3x^2 - 7$ суть *двучленныя количества.*

Трехъ-членнымъ количествомъ или *трех-členомъ (trinome)* именуется выраженіе изъ трехъ членовъ состоящее, каково напримѣръ $a + b + c$. Вообще *многочленнымъ выраженіемъ, полиноміей, полиномомъ*, или *многочленомъ (polinome, multinome)*, называется количество изъ многихъ членовъ составленное.

Евклидъ, разсматривавшій теорію биномій съ геометрической стороны, употреблялъ различныя названія, которыя нынѣ оставлены. Онъ называлъ *первою биноміею (binome premier)* линію, состоящую изъ двухъ частей, изъ коихъ одна раціональная, а другая, ме́ньшая, ирраціональная; сверхъ того, эти части должны быть таковы, чтобы разность ихъ квадратовъ равнялась точному квадрату. И такъ, выраженіе $8 + \sqrt{15}$ есть *биномія первая*, ибо $\sqrt{15} < 8$ и $8^2 - (\sqrt{15})^2 = 49 = 7^2$. Подъ *второю биноміею* онъ разумѣлъ сумму двухъ линій, изъ коихъ ме́ньшая, раціональная, а бо́льшая, ирраціональная; сверхъ того, отношеніе корня квадратнаго изъ разности квадратовъ двухъ частей къ ирраціональной части, должно быть раціональное. Напримѣръ, выраженіе $10 + \sqrt{180}$ есть *биномія вторая*, ибо $\sqrt{180} > 10$, а $\frac{\sqrt{(\sqrt{180})^2 - 10^2}}{\sqrt{180}} = \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{180}} =$ раціональному числу $\frac{2}{3}$. Мы не будемъ долѣе останавливаться на сихъ раздѣленіяхъ, совершенно безполезныхъ; скажемъ только, что между *биноміями* и *апотомами* полагали только то различіе, что въ первыхъ, двѣ линіи складывались, а во вторыхъ, одна вычиталась изъ другой. Смот. APOTOME.

BINOME DE NEUTON. (Алг.) **НЮТОНОВА БИНОМІЯ, НЮТОНОВЪ БИНОМЪ, ДВУЧЛЕНЪ.**

Извѣстная въ Алгебрѣ формула, посредствомъ которой двучленныя количества возвышаются въ различныя степени. Принявъ за основаніе двучленное количество $a+b$, а за степень какое ни есть число m, формула, о которой говоримъ, будетъ слѣдующая:

$$(A)\ (a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-3}b^3 + \ldots\ldots$$

Эта формула, найденная Нютономъ, досель сохранила названіе своего изобрѣтателя. Полагаютъ, что Нютонъ былъ приведенъ къ ней изслѣдованіемъ способа, предлагаемаго *Вальисомъ* въ *Ариѳметикѣ безконечныхъ* для опредѣленія площадей тѣхъ кривыхъ линій, которыя выражаются уравненіемъ $y=(1-x^2)^m$, гдѣ x изображаетъ абсциссу, y, ординату, а m, *цѣлое положительное число*. Нютонъ имѣлъ въ виду найти площадь круговаго сегмента; но такъ какъ для этого случая, ордината есть $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, и слѣдовательно m дробное, то способъ, изложенный въ Ариѳметикѣ безконечныхъ, былъ недостаточенъ, и Нютону предстояло распространить его.

Вальисъ въ упомянутомъ сей-часъ сочиненіи доказываетъ, что полагая послѣдовательно $m=0$, 1, 2, 3, 4, 5.... площади кривыхъ, соотвѣтствующія абсциссѣ x, будутъ

$$\begin{array}{l}
x \\
x - \frac{1}{3}x^3 \\
x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \\
x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \\
x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{6}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 \\
x - \frac{5}{3}x^3 + \frac{10x^5}{5} - \frac{10x^7}{7} + \frac{5x^9}{9} - \frac{1}{11}x^{11} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Разсматривая эти выраженія, Нютонъ замѣтилъ, что числители численныхъ коэффиціентовъ втораго столбца составляютъ рядъ натуральныхъ чиселъ 1, 2, 3, 4, 5....; третій столбецъ состоитъ изъ треугольныхъ чиселъ 1, 3, 6, 10...; четвертый составленъ изъ пирамидальныхъ 1, 4, 10.... и такъ далѣе. Что касается до порядка знаковъ, до степеней количества x и до численныхъ знаменателей, то законъ ихъ очевиденъ. Основываясь на этихъ замѣчаніяхъ, Нютонъ заключилъ, что численные коэффиціенты въ выраженіи площади кривой, коей ордината $=(1-x^2)^m$, начиная со втораго члена, будутъ m, $\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}$, $\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$....., ибо сіи количества изображаютъ по порядку общіе члены натуральныхъ, треугольныхъ, пирамидальныхъ .... чиселъ.

Убѣдясь въ справедливости сего общаго вида для цѣлыхъ степеней m, Нютонъ допустилъ то же и для дробнаго значенія $m=\frac{1}{2}$, въ чемъ удостовѣрился непосредственнымъ извлеченіемъ квадратнаго корня изъ $1-x^2$, и, дѣйствуя надъ этимъ разложеніемъ по способу Вальиса, получилъ слѣдующій рядъ для части круговой площади, считаемой отъ центра до неопредѣленной абсциссы x:

$$x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{8}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1}{16}\cdot\frac{x^7}{7} + \frac{5}{128}\cdot\frac{x^9}{9} - \text{и проч.}$$

Достигнувъ этого, уже не трудно было Нютону замѣтить, что написавъ строку, выражающую площадь кривой, коей ордината есть $(1-x^2)^m$, потомъ уменьшивъ всѣхъ показателей надъ x одною единицею, и откинувъ знаменателей, получится разложеніе двучленнаго количества $1-x^2$, возвышеннаго въ степень m; такимъ образомъ онъ вывелъ формулу

$$(1-x^2)^m = 1 - mx^2 + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^4 - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^6 + \ldots$$

которую, по наведенію, распространилъ на случай m цѣлаго отрицательнаго, и дробнаго положительнаго или отрицательнаго.

Нютонъ сообщилъ свою формулу безъ доказательства въ 1676 году. По своей важности, она сдѣлалась предметомъ изслѣдованій многихъ первостепенныхъ математиковъ, которые предложили различныя доказательства, болѣе или менѣе удовлетворительныя.

Общая формула (A) вырѣзана на гробницѣ Нютона въ Вестминстерскомъ Аббатствѣ. Хотя открытія болѣе блистательныя увѣковѣчили память Нютона, но ни одно изъ нихъ не можетъ сравниться въ отношеніи плодовитости своихъ приложеній въ Математическомъ Анализѣ съ тѣмъ открытіемъ, о которомъ говоримъ.

Предложено множество доказательствъ Нютоновой биноміи. Въ статьѣ COMBINATOIRE (ANALYSE) читатели найдутъ одно для случая цѣлой положительной степени. Для дробнаго же показателя, приведемъ одно изъ доказательствъ, придуманныхъ *Эйлеромъ*.

Допустимъ, что для m цѣлаго положительнаго, имѣемъ

(B) $(1+x)^m =$
$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\ldots.$$

Когда предположимъ, что m обращается въ число нецѣлое, или неположительное, то мы уже не знаемъ, какой функціи вторая часть предыдущаго уравненія будетъ служить разложеніемъ. Пусть будетъ $f(m)$ эта неизвѣстная функція, такъ что
$$f(m)=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\ldots..$$

Взявъ другое, какое ни есть число n, очевидно получимъ:
$$f(n)=1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\ldots.$$

и слѣдовательно
$$f(m).f(n)=\left[1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\ldots\right]$$
$$\times\left[1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\ldots\right].$$

Чтобы найти видъ этого произведенія, Эйлеръ замѣчаетъ, что составленіе его различныхъ членовъ не измѣнится, каковы бы ни были частныя значенія величинъ m и n; и такъ, если этотъ видъ будетъ извѣстенъ хотя въ одномъ случаѣ при m и n неопредѣленныхъ, то останется тѣмъ же самымъ и для всѣхъ случаевъ. Но когда m и n цѣлыя положительныя числа (впрочемъ неопредѣленныя), то сказанное произведеніе обращается въ $(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$; но
$$(1+x)^{m+n}=1+\frac{m+n}{1}x+\frac{(m+n)(m+n-1)}{1\cdot2}x^2$$
$$+\frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\ldots.$$

слѣдовательно, для какихъ ни есть m и n будетъ
$$1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\ldots)$$
$$\times\left(1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\ldots\right)$$
$$=1+\frac{m+n}{1}x+\frac{(m+n)(m+n-1)}{1\cdot2}x^2$$
$$+\frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\ldots.$$

Но вторая часть этого уравненія, по свойству функціи f, равна $f(m+n)$; слѣдовательно найдется уравненіе
$$f(m).f(n)=f(m+n),$$
которое должно служить для опредѣленія вида функціи f.

Измѣняя n въ $n+p$, получимъ
$$f(m).f(n+p)=f(m+n+p);$$

но
$$f(n).f(p)=f(n+p),$$
слѣдовательно
$$f(m).f(n).f(p)=f(m+n+p),$$
и вообще
$$f(m).f(n).f(p).f(q)\ldots=f(m+n+p+q+\ldots).$$

Полагая $m=n=p=q=\ldots.=\frac{\lambda}{\mu}$, а число количествъ $m, n, p, q, \ldots$ равнымъ μ, найдемъ
$$f\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)=[f(\lambda)]^{\frac{1}{\mu}}.$$

Но если примемъ λ цѣлымъ положительнымъ, то $f(\lambda)=(1+x)^\lambda$, и слѣдовательно $[f(\lambda)]^{\frac{1}{\mu}}=(1+x)^{\frac{\lambda}{\mu}}$; но такъ какъ
$$f\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)=1+\frac{\lambda}{\mu}x+\frac{\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}-1\right)}{1\cdot2}x^2$$
$$+\frac{\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}-1\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}-2\right)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\ldots\ldots$$
то заключаемъ, что эта строка есть не иное что, какъ разложеніе степеннаго количества $(1+x)^{\frac{\lambda}{\mu}}$.

Для показателя отрицательнаго, принимаемъ въ формулѣ
$$f(m).f(n)=f(m+n)$$
$m+n=o$; слѣдовательно $f(m+n)=(1+x)^0=1$, и
$$f(m).f(-m)=1.$$

И такъ, каково бы ни было число m, имѣемъ
$$f(-m)=\frac{1}{f(m)};$$

но, въ слѣдствіе доказаннаго выше,
$$f(m)=(1+x)^m,\ \frac{1}{f(m)}=\frac{1}{(1+x)^m}=(1+x)^{-m};$$
слѣдовательно
$$f(-m)=(1+x)^{-m}.$$

Но $f(-m)$ изображаетъ рядъ
$$1-mx+\frac{m(m+1)}{1\cdot2}x^2-\frac{m(m+1)(m+2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\ldots..,$$
который, въ силу предыдущаго уравненія, будетъ изображать разложеніе количества $(1+x)^{-m}$.

Мы умалчиваемъ о безчисленномъ множествѣ приложеній Нютоновой биноміи въ Математикѣ. Читатели, сколько нибудь знакомые съ математическимъ анализомъ, знаютъ общеполезность этой формулы. Въ заключеніе скажемъ, что при дробномъ показателѣ m, рядъ (B) бываетъ сходящійся для $x<1$, а расходящійся, для $x>1$. Для дальнѣйшихъ подробностей объ этомъ предметѣ, отсылаемъ къ статьямъ: SÉRIE, EXTRACTION DES RACINES, ELÉVATION AUX PUISSANCES.

BINOME DES FACTORIELLES или **FACTORIELLE A BASE BINOME.** (Анал.) **ФАКТОРІАЛЬНАЯ БИНОМІЯ, ФАКТОРІАЛЬНЫЙ БИНОМЪ, ФАКТОРІАЛЬНОЕ ВЫРАЖЕНІЕ СЪ ДВУЧЛЕННЫМЪ ОСНОВАНІЕМЪ.** Такъ называется формула, служащая для разложенія факторіальнаго количества

$$(a+b)(a+b+r)(a+b+2r)\dots\dots(a+b+[m-1]r),$$

которое, по знакоположенію *Крампа*, изображается чрезъ $(a+b)^{m|r}$. Смот. FACTORIELLE, COMBINATOIRE (ANALYSE). Въ слѣдствіе этого знакоположенія имѣемъ

$$a^{1|r} = a$$
$$a^{2|r} = a(a+r)$$
$$a^{3|r} = a(a+r)(a+2r)$$
$$a^{4|r} = a(a+r)(a+2r)(a+3r)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

а также

$$b^{1|r} = b$$
$$b^{2|r} = b(b+r)$$
$$b^{3|r} = b(b+r)(b+2r)$$
$$b^{4|r} = b(b+r)(b+2r)(b+3r)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Факторіальная биномія $(a+b)^{m|r}$ выражается слѣдующею формулою:

$$(1)\quad (a+b)^{m|r} = a^{m|r} + ma^{m-1|r}b^{1|r} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2|r}b^{2|r} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-3|r}b^{3|r} + \dots\dots$$

имѣющею большое сходство съ Нютоновой биноміей. Численные коэффиціенты этого разложенія не иное что, какъ коэффиціенты *биноміальные*; что касается до закона факторіальныхъ функцій $a^{m|r}$, $a^{m-1|r}$, $b^{1|r}\dots\dots$, то онъ очевиденъ.

Чтобы доказать формулу (1), разсмотримъ сперва частные случаи, и во первыхъ замѣтимъ, что

$$(a+b)^{1|r} = a + b = a^{1|r} + b^{1|r}$$
$$(a+b)^{2|r} = (a+b)(a+b+r) = a(a+r) + 2ab + b(b+r) = a^{2|r} + 2a^{1|r}b^{1|r} + b^{2|r}$$
$$(a+b)^{3|r} = (a+b)(a+b+r)(a+b+2r) = a(a+r)(a+2r) + 3a(a+r)b + 3ab(b+r) + b(b+r)(b+2r) = a^{3|r} + 3a^{2|r}b^{1|r} + 3a^{1|r}b^{2|r} + b^{3|r}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Разложеніе факторіальныхъ количествъ $(a+b)^{1|r}$, $(a+b)^{2|r}$, $(a+b)^{3|r}$, найденное непосредственно, согласуется съ общимъ видомъ формулы (1). Чтобы доказать справедливость сей послѣдней для какого ни есть цѣлаго положительнаго числа, покажемъ, что если она справедлива для цѣлаго числа m, то будетъ также имѣть мѣсто и для слѣдующаго, то есть, для $m+1$. Такимъ образомъ общность формулы (1) будетъ доказана, ибо, зная что для $m=3$, она справедлива, мы въ правѣ заключить, что она справедлива и для $m+1=4$, а слѣдовательно и для $4+1=5$, $5+1=6\dots\dots$ и вообще для какого ни есть цѣлаго положительнаго числа.

И такъ, мы допускаемъ справедливость формулы (1), и имѣемъ въ виду доказать, что она будетъ состояться и въ томъ случаѣ, когда отъ цѣлаго m, перейдемъ къ $m+1$. Изобразимъ для краткости биноміальные коэффиціенты m, $\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}$, $\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\dots\dots$ чрезъ M_1, M_2, $M_3\dots$, получимъ

$$(a+b)^{m|r} = a^{m|r} + M_1a^{m-1|r}b^{1|r} + M_2a^{m-2|r}b^{2|r} + M_3a^{m-3|r}b^{3|r} + \dots\dots$$

Помноживъ обѣ части этого уравненія на $a+b+mr$, найдемъ, въ слѣдствіе самаго опредѣленія факторіальныхъ функцій

$$(2)\quad (a+b)^{m+1|r} = [a^{m|r} + M_1a^{m-1|r}b^{1|r} + M_2a^{m-2|r}b^{2|r} + M_3a^{m-3|r}b^{3|r} + \dots]\times(a+mr) + [a^{m|r} + M_1a^{m-1|r}b^{1|r} + M_2a^{m-2|r}b^{2|r} + \dots]b;$$

но легко видѣть, что

$$a^{m|r}(a+mr) = a^{m+1|r}$$
$$a^{m-1|r}(a+mr) = a^{m-1|r}(a+\overline{m-1}.r+r) = a^{m|r} + r.a^{m-1|r}$$
$$a^{m-2|r}(a+mr) = a^{m-2|r}(a+\overline{m-2}.r+2r) = a^{m-1|r} + 2r.a^{m-2|r}$$
$$a^{m-3|r}(a+mr) = a^{m-3|r}(a+\overline{m-3}.r+3r) = a^{m-2|r} + 3r.a^{m-3|r}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

а также

$$b = b^{1|r}$$
$$b^{1|r}b = b^{2|r} - rb^{1|r}$$
$$b^{2|r}b = b^{3|r} - 2rb^{2|r}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Подставляя эти величины въ уравненіе (2), получимъ формулу

$$(a+b)^{m+1|r} = a^{m+1|r} + M_1(a^{m|r} + ra^{m-1|r})b^{1|r} + M_2(a^{m-1|r} + 2ra^{m-2|r})b^{2|r} + M_3(a^{m-2|r} + 3ra^{m-3|r})b^{3|r} + \dots + a^{m|r}b^{1|r} + M_1(a^{m-1|r}b^{2|r} - ra^{m-1|r}b^{1|r}) + M_2(a^{m-2|r}b^{3|r} - 2ra^{m-2|r}b^{2|r}) + \dots$$

которая, послѣ сокращеній, приметъ видъ

$$(a+b)^{m+1|r} = a^{m+1|r} + (M_1+1)a^{m|r}b^{1|r} + (M_2+M_1)a^{m-1|r}b^{2|r} + (M_3+M_2)a^{m-2|r}b^{3|r} + \dots$$

Но

$$M_1+1 = m+1$$
$$M_2+M_1 = \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} + m = \frac{(m+1)m}{1\cdot 2}$$
$$M_3+M_2 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} = \frac{(m+1)m(m-1)}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Слѣдовательно
$$(a+b)^{m+1} = a^{m+1|r} + (m+1)a^{m|r}b^{1|r} + \frac{(m+1)m}{1\cdot 2}a^{m-1|r}$$
$$+ \frac{(m+1)m(m-1)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-2|r}b^{3|r} + \ldots\ldots$$

Но эта формула вполнѣ согласуется съ уравн. (1), когда замѣнимъ въ семъ послѣднемъ цѣлое число m слѣдующимъ за нимъ $m+1$. Слѣдовательно, изъ сказаннаго нами выше, должно заключить, что формула (1) имѣетъ мѣсто для всѣхъ возможныхъ значеній цѣлаго положительнаго числа m.

Вотъ доказательство *факторіальной биноміи* для цѣлой степени m; слѣдуя ходу доказательства, предложеннаго Эйлеромъ для Нютоновой биноміи (Смот. BINOME DE NEUTON), можно распространить приведенную сей-часъ формулу на какое ни есть значеніе степени m. Предоставляемъ читателямъ это обобщеніе, которое впрочемъ не представляетъ никакого особеннаго затрудненія,

Вандермондъ первый вывелъ факторіальную биномію; его формула ограничивалась случаемъ $r = -1$; впослѣдствіи *Крампъ* предложилъ ее въ томъ общемъ видѣ, въ какомъ она приведена у насъ. Чтобы читатели наши болѣе ознакомились съ этимъ предметомъ, мы отсылаемъ ихъ къ статьямъ: FACTORIELLE, GAMMA (FONCTION), FACULTÉS NUMÉRIQUES, COMBINATOIRE (ANALYSE).

BINOMES (DIFFÉRENTIELLES). (Инт. Исч.) **ДВУЧЛЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦІАЛЫ, ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ БИНОМІИ.** Такъ называется дифференціальное выраженіе вида

$$(1) \qquad x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}dx,$$

гдѣ m, n, p и q изображаютъ цѣлыя числа. Ясно, что полагая m и n цѣлыми, мы чрезъ то нисколько не ограничиваемъ общности выраженія (1); и дѣйствительно, положимъ, что вмѣсто цѣлыхъ показателей m и n, имѣемъ дробные $\frac{\lambda}{\mu}$, $\frac{\lambda'}{\mu'}$. Принявъ $z^{\mu\mu'} = x$, найдется $x^{\frac{\lambda}{\mu}} = z^{\lambda\mu'}$, $x^{\frac{\lambda'}{\mu'}} = z^{\lambda'\mu}$, $dx = \mu\mu' z^{\mu\mu'-1}dz$, и слѣдовательно двучленный дифференціалъ въ z-ахъ будетъ

$$\mu\mu' z^{\lambda\mu'+\mu\mu'-1}(a+bz^{\lambda'\mu})^{\frac{p}{q}}dz,$$

въ которомъ показатели надъ z внѣ скобокъ, и подъ скобками, суть цѣлыя числа, какъ и въ выраженіи (1).

Приведеніе двучленнаго выраженія (1) къ раціональному виду, а слѣдовательно и интегрированіе его посредствомъ функцій алгебрическихъ, логариѳмическихъ и круговыхъ, возможно только въ двухъ случаяхъ, именно:

$$(2) \quad \begin{cases} 1^{\circ} \text{ когда } \frac{m+1}{n} = \pm \text{ цѣлому числу,} \\ 2^{\circ} \text{ когда } \frac{m+1}{n} + \frac{p}{q} = \pm \text{ цѣлому числу.} \end{cases}$$

Дѣйствительно, когда $m+1$ дѣлится на-цѣло на n, то принявъ $\frac{m+1}{n} = e$ и положивъ

$$a+bx^n = z^q,$$

найдемъ послѣдовательно

$$(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = z^p,$$
$$x^n = \frac{z^q-a}{b}$$
$$x^{ne} = \left(\frac{z^q-a}{b}\right)^e$$
$$nex^{ne-1}dx = \frac{eq(z^q-a)^{e-1}z^{q-1}dz}{b^e};$$

но $ne-1 = m$; почему

$$x^m dx = \frac{q}{nb^e}(z^q-a)^{e-1}z^{q-1}dz,$$

и слѣдовательно

$$x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}dx = \frac{q}{nb^e}(z^q-a)^{e-1}z^{p+q-1}dz.$$

Такъ какъ e изображаетъ число цѣлое, то выраженіе $(z^q-a)^{e-1}$ будетъ раціональное, именно, *цѣлое*, если e *положительное*, а *дробное*, когда e *отрицательное*.

Выраженіе (1) можетъ очевидно принять еще слѣдующій видъ:

$$x^{m+n\frac{p}{q}}(b+ax^{-n})^{\frac{p}{q}}dx,$$

и, въ слѣдствіе того что было доказано предъ симъ, дѣлается раціональнымъ, когда $m+n\frac{p}{q}+1$ дѣлится на-цѣло на $-n$, то есть, когда $\frac{m+1}{n}+\frac{p}{q} = \pm$ цѣлому числу.

Если это условіе, составляющее второй изъ упомянутыхъ двухъ случаевъ, имѣетъ мѣсто, то выраженіе (1) приведется къ раціональному виду, полагая

$$b+ax^{-n} = z^q.$$

Замѣтимъ, что приведенные два случая существенно различны между собою: и дѣйствительно, если $\frac{m+1}{n}$ есть цѣлое число, то очевидно, что сумма $\frac{m+1}{n}+\frac{p}{q}$ будетъ дробная, ибо $\frac{p}{q}$ предполагается всегда дробнымъ; и на оборотъ, если $\frac{m+1}{n}+\frac{p}{q}$ равняется цѣлому числу, то $\frac{m+1}{n}$ будетъ непремѣнно дробное.

Выраженіе (1) можетъ быть разсматриваемо въ слѣдующемъ, болѣе общемъ видѣ:

$$(ax+b)^{\lambda}(a_1x+b_1)^{\mu}dx,$$

гдѣ λ и μ изображаютъ вообще дробныя числа. Легко усмотрѣть, что это выраженіе можетъ быть преобразовано въ раціональное, когда одно изъ трехъ количествъ λ, μ, $\lambda+\mu$ будетъ цѣлое, и сверхъ того, всѣ три раціональныя. Эти условія приводятъ къ слѣдующимъ тремъ видамъ:

$$(ax+b)^{\pm l}(a_1x+b_1)^{\pm\frac{m}{n}}dx$$

$$(ax+b)^{\pm\frac{m}{n}}(a_1x+b_1)^{\pm l}dx$$

$$(ax+b)^{\pm\frac{m}{n}}(a_1x+b_1)^{\pm l\mp\frac{m}{n}}dx.$$

Первая биномія дѣлается раціональною, когда примемъ

$$a_1x+b_1=z^n,$$

вторая, когда предположимъ

$$ax+b=z^n,$$

и наконецъ третья, если возьмемъ

$$\frac{ax+b}{a_1x+b_1}=z^n.$$

Когда двучленный дифференціалъ (1) не можетъ быть приведенъ къ раціональному виду, то стараются привести его интегралъ къ простѣйшимъ случаямъ. Этой цѣли легко достигнуть посредствомъ пріёма, извѣстнаго подъ наименованіемъ *интегрированія по частямъ (intégration par parties)*. Этотъ способъ приводитъ къ формуламъ, помощію которыхъ показатель m надъ x внѣ скобокъ можетъ быть уменьшенъ всѣми кратными отъ n, заключающимися въ немъ, а дробный показатель $\frac{p}{q}$ приведенъ къ правильной дроби.

Такъ какъ m и $\frac{p}{q}$ могутъ быть и положительные и отрицательные, то ясно, что для достиженія во всѣхъ случаяхъ предполагаемой цѣли, необходимо имѣть четыре формулы; вотъ онѣ:

Для m и $\frac{p}{q}$ *положительныхъ*:

$$(A)\int x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}dx=\frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{b\left(n\frac{p}{q}+m+1\right)}-\frac{a(m-n+1)}{b\left(n\frac{p}{q}+m+1\right)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}dx,$$

$$(B)\int x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}dx=\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}}{n\frac{p}{q}+m+1}+\frac{na\frac{p}{q}}{n\frac{p}{q}+m+1}\int x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}dx.$$

Для m и $\frac{p}{q}$ *отрицательныхъ*:

$$(C)\int x^{-m}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}dx=-\frac{(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}}{a(m-1)x^{m-1}}+\frac{b\left(n\frac{p}{q}+n-m+1\right)}{a(m-1)}\int x^{-(m-n)}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}dx,$$

$$(D)\int x^m(a+bx^n)^{-\frac{p}{q}}dx=\frac{x^{m+1}}{na\left(\frac{p}{q}-1\right)(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}}-\frac{m+n+1-n\frac{p}{q}}{na\left(\frac{p}{q}-1\right)}\int x^m(a+bx^n)^{-\left(\frac{p}{q}-1\right)}dx.$$

Напримѣръ, если бы желали посредствомъ этихъ формулъ привести къ простѣйшему виду интегралъ

$$\int x^6(1+x^2)^{-\frac{11}{5}}dx,$$

то надлежало бы употребить три раза формулу (*A*) и два раза формулу (*D*).

Первое преобразованіе по формулѣ (*A*), привело бы къ интегралу $\int x^4(1+x^2)^{-\frac{11}{5}}dx$; второе, къ $\int x^2(1+x^2)^{-\frac{11}{5}}dx$; третье, къ $\int(1+x^2)^{-\frac{11}{5}}dx$.

Первое преобразованіе по формулѣ (D) послѣдняго интеграла $\int(1+x^2)^{-\frac{11}{5}}dx$ приведетъ его къ $\int(1+x^2)^{-\frac{6}{5}}dx$; второе, къ $\int(1+x^2)^{-\frac{1}{5}}dx = \int\frac{dx}{\sqrt[5]{1+x^2}}$; дальнѣйшія приведенія невозможны. И такъ мы видимъ, что интегралъ $\int x^6(1+x^2)^{-\frac{11}{5}}dx$ легко можетъ быть выраженъ посредствомъ другаго простѣйшаго, именно, интеграла $\int\frac{dx}{\sqrt[5]{1+x^2}}$.

BINOMES (ÉQUATIONS). (Алг.) **ДВУЧЛЕННЫЯ УРАВНЕНІЯ.** Такъ называются уравненія вида $x^m = A$, гдѣ A изображаетъ вещественную или мнимую величину. Предполагая A вещественнымъ, получимъ два случая, смотря по тому, будетъ ли A количество положительное или отрицательное. Разсмотримъ отдѣльно каждое изъ уравненій

$$x^m = +A,$$
$$x^m = -A.$$

Если изобразимъ чрезъ a ариѳметическій корень m-ой степени изъ A, такъ что $a = \sqrt[m]{A}$, и положимъ $x = ay$, то предыдущія уравненія примутъ видъ

$$y^m = +1, \tag{1}$$
$$y^m = -1, \tag{2}$$

и опредѣленіе всѣхъ корней уравненія $x^m = \pm A$ приведется къ опредѣленію величинъ y по уравненіямъ (1) и (2), то есть, къ нахожденію всѣхъ корней m-ой степени изъ $+1$ и -1.

Для рѣшенія уравненія (1), положимъ

$$y = \varrho\,(Cos\,\varphi + Sin\,\varphi\sqrt{-1}),$$

гдѣ ϱ и φ изображаютъ вещественныя величины; получимъ

$$\begin{aligned} y^m &= \varrho^m(Cos\,\varphi + Sin\,\varphi\sqrt{-1})^m \\ &= \varrho^m(Cos\,m\varphi + Sin\,m\varphi\sqrt{-1}). \end{aligned}$$

Но $y^m = 1$; слѣдовательно

$$\varrho^m(Cos\,m\varphi + Sin\,m\varphi\sqrt{-1}) = 1.$$

Откуда

$$\varrho^m\,Cos\,m\varphi = 1;\quad \varrho^m\,Sin\,m\varphi = 0;$$

взявъ сумму квадратовъ послѣднихъ двухъ уравненій, получимъ

$$\varrho^{2m}(Cos^2 m\varphi + Sin^2 m\varphi) = \varrho^{2m} = 1.$$

И такъ $\varrho = 1$, въ слѣдствіе чего

$$Cos\,m\varphi = 1,\quad Sin\,m\varphi = 0.$$

Чтобы удовлетворить этимъ двумъ уравненіямъ, очевидно должно положить

$$m\varphi = \pm\,2l\pi,\ \text{или}\ \varphi = \pm\frac{2l\pi}{m},$$

разумѣя подъ l какое ни есть цѣлое число. Слѣдовательно

$$y = Cos\frac{2l\pi}{m} \pm Sin\frac{2l\pi}{m}\cdot\sqrt{-1}.$$

Пусть будетъ h ближайшее къ отношенію $\frac{l}{m}$ цѣлое число. Разность между числами h и $\frac{l}{m}$ очевидно не можетъ превышать $\frac{1}{2}$; и такъ

$$\frac{l}{m} = h \pm \frac{k}{m},$$

гдѣ $\frac{k}{m}$ изображаетъ дробь равную или мéньшую $\frac{1}{2}$, а слѣдовательно k число мéньшее, или, по бóльшей мѣрѣ, равное $\frac{m}{2}$. Отсюда заключаемъ

$$\frac{2l\pi}{m} = 2h\pi \pm \frac{2k\pi}{m},$$

почему

$$Cos\frac{2l\pi}{m} \pm Sin\frac{2l\pi}{m}\cdot\sqrt{-1} = Cos\frac{2k\pi}{m} \pm Sin\frac{2k\pi}{m}\cdot\sqrt{-1},$$

и наконецъ

$$y = Cos\frac{2k\pi}{m} \pm Sin\frac{2k\pi}{m}\cdot\sqrt{-1}. \tag{3}$$

Это уравненіе, въ которомъ k изображаетъ цѣлыя числа, заключающіяся между предѣлами 0 и $\frac{m}{2}$, даетъ всѣ значенія $\sqrt[m]{1}$. Дѣйствительно, когда m будетъ чётное число, то величины для k будутъ такія

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ \frac{m-2}{2},\ \frac{m}{2},$$

и слѣдовательно формула (3) доставитъ m значеній для y, изъ которыхъ два, соотвѣтствующія предположеніямъ $k=0$, $k=\frac{m}{2}$, будутъ вещественныя, именно $+1$ и -1, а остальныя мнимыя, и сопряженныя пò-два.

Когда m нечётное, то, не выходя изъ предѣловъ 0 и $\frac{m}{2}$, получимъ для k рядъ величинъ

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ \frac{m-3}{2},\ \frac{m-1}{2};$$

первое значеніе $k=0$, доставляетъ корень $y=1$, а всѣ остальныя, мнимые сопряженные корни.

Напримѣръ, для уравненія $y^4 = 1$, по формулѣ (3) получили бы слѣдующіе четыре корня:

для $k=0$, $y = +1$;
для $k=1$, $y = Cos\frac{\pi}{2} \pm Sin\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{-1} = +\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$;
для $k=2$, $y = Cos\,\pi \pm Sin\,\pi.\sqrt{-1} = -1$.

Еслибы взяли уравненіе $y^3 = 1$, то формула (3) привела бы насъ къ слѣдующимъ тремъ корнямъ третей степени изъ единицы:

для $k=0$, $y=1$;

для $k=1$, $y=Cos\,\frac{2\pi}{3}\pm Sin\,\frac{2\pi}{3}\cdot\sqrt{-1}$.

Но $Cos\,\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$, $Sin\,\frac{2\pi}{3}=+\frac{\sqrt{3}}{2}$; слѣдовательно три корня, о которыхъ говоримъ, будутъ:

$$1,\ -\tfrac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{-1},\ -\tfrac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{-1}.$$

Разсмотримъ теперь уравненіе $y^m=-1$; полагая, какъ и прежде,

$$y=\varrho\,(Cos\,\varphi+Sin\,\varphi\sqrt{-1}),$$

получимъ

$$y^m=\varrho^m\,(Cos\,m\varphi+Sin\,m\varphi\,.\sqrt{-1})=-1$$

откуда

$$\varrho=1,\ Cos\,m\varphi=-1,\ Sin\,m\varphi=0,$$

и слѣдовательно

$$m\varphi=\pm(2k+1)\,\pi\ \text{или}\ \varphi=\pm\frac{(2k+1)\,\pi}{m},$$

разумѣя подъ k какое ни есть цѣлое число. И такъ, всѣ рѣшенія уравненія (2) будутъ заключаться въ формулѣ

$$(4)\qquad y=Cos\,\frac{(2k+1)\,\pi}{m}\pm Sin\,\frac{(2k+1)\,\pi}{m}\cdot\sqrt{-1},$$

въ которой, какъ легко видѣть, можно предположить, что $2k+1$ заключается между предѣлами 0 и m; и дѣйствительно, пусть будетъ h наибольшее цѣлое число, заключающееся въ отношеніи $\frac{2K+1}{2m}$. Ясно, что разность между числами h и $\frac{2K+1}{2m}$ будетъ дробь съ числителемъ нечётнымъ, ме́ньшая, или по бо́льшей мѣрѣ равная $\frac{1}{2}$; и такъ

$$\frac{2K+1}{2m}=h\pm\frac{2k+1}{2m},$$

гдѣ $2k+1$ не превышаетъ m. Слѣдовательно

$$\frac{(2K+1)\,\pi}{m}=2h\pi\pm\frac{(2k+1)\,\pi}{m}$$

и
$$Cos\,\frac{(2K+1)\,\pi}{m}\pm Sin\,\frac{(2K+1)\,\pi}{m}\cdot\sqrt{-1}$$
$$=Cos\,\frac{(2k+1)\,\pi}{m}\pm Sin\,\frac{(2k+1)\,\pi}{m}\cdot\sqrt{-1},$$

какъ сей-часъ было сказано.

Когда величина, которую изобразили выше чрезъ A, будетъ мнимая, то для рѣшенія уравненія

$$(5)\qquad x^m=\alpha+\beta\sqrt{-1},$$

полагаемъ

$$x=\varrho\,(Cos\,\varphi+Sin\,\varphi\,.\sqrt{-1})$$

и
$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=r\,(Cos\,a+Sin\,a\,.\sqrt{-1}),$$

гдѣ $r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ и $Cos\,a=\frac{a}{\sqrt{a^2+\beta^2}}$, и слѣдовательно r и a величины извѣстныя. На этомъ основаніи найдемъ

$$\varrho^m\,(Cos\,\varphi+Sin\,\varphi\sqrt{-1})^m=r\,(Cos\,a+Sin\,a\,.\sqrt{-1}),$$

или

$$\varrho^m\,(Cos\,m\varphi+Sin\,m\varphi\sqrt{-1})=r\,(Cos\,a+Sin\,a\sqrt{-1}),$$

откуда

$$\varrho^m\,Cos\,m\varphi=r\,Cos\,a,\quad \varrho^m\,Sin\,m\varphi=r\,Sin\,a.$$

Взявъ сумму квадратовъ сихъ двухъ уравненій, получимъ

$$\varrho^{2m}\,(Cos^2m\varphi+Sin^2m\varphi)=r^2\,(Cos^2a+Sin^2a),$$

или $\varrho^m=r$, откуда $\varrho=\sqrt[m]{r}$;

сверхъ того, такъ какъ

$$Cos\,m\varphi=Cos\,a,\quad Sin\,m\varphi=Sin\,a$$

то найдется

$$m\varphi=a\pm 2k\pi\ \text{ и }\ \varphi=\frac{a\pm 2k\pi}{m},$$

разумѣя подъ k какое ни есть цѣлое число. И такъ, всѣ рѣшенія уравненія (5) будутъ заключаться въ формулѣ

$$x=\sqrt[m]{r}\left(Cos\,\frac{a\pm 2k\pi}{m}+Sin\,\frac{a\pm 2k\pi}{m}\cdot\sqrt{-1}\right)=$$
$$\sqrt[m]{r}\left(Cos\,\frac{a}{m}+Sin\,\frac{a}{m}\cdot\sqrt{-1}\right)\left(Cos\,\frac{2k\pi}{m}\pm Sin\,\frac{2k\pi}{m}\cdot\sqrt{-1}\right);$$

но, въ силу уравненія (3),

$$Cos\,\frac{2k\pi}{m}\pm Sin\,\frac{2k\pi}{m}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt[m]{1},$$

слѣдовательно, всѣ корни уравненія (5) найдутся по формулѣ

$$(6)\qquad x=\sqrt[m]{r}\left(Cos\,\frac{a}{m}+Sin\,\frac{a}{m}\cdot\sqrt{-1}\right)\sqrt[m]{1},$$

въ которой $\sqrt[m]{r}$ изображаетъ величину вещественную и положительную, а $\sqrt[m]{1}$ всѣ корни m-ой степени изъ $+1$.

Вотъ общее рѣшеніе двучленныхъ уравненій, основанное на *тригонометрическихъ* формулахъ. Что касается до ихъ рѣшенія посредствомъ *радикаловъ*, то знанія аналистовъ по сему предмету были весьма ограниченны до появленія въ свѣтъ (въ 1801 году) примѣчательнаго сочиненія Брауншвейгскаго математика *Гаусса*, подъ заглавіемъ *Disquisitiones Arithmeticae*. Въ этой книгѣ Гауссъ предлагаетъ полную, совершенно новую теорію, для рѣшенія двучленныхъ уравненій, или, что всё равно (какъ видно изъ предыдущаго), для раздѣленія окружности круга на m равныхъ частей. Для другихъ подробностей отсылаемъ читателя къ статьѣ: ANGULAIRES (SECTIONS).

Мы намѣрены изложить здѣсь въ самомъ краткомъ видѣ теорію *Гаусса*. Читатели, желающіе совершенно освоиться съ нею, найдутъ всѣ надлежащія подробности въ книгахъ: *Disquisitiones Arithmeticae, Théorie des Nombres, par Legendre* 1830, 3-е изд. и *Traité de la résolution des équations numériques par Lagrange*, 2-е и 3-е изд. — Но прежде мы приведемъ нѣсколько предложеній, относящихся къ двучленнымъ уравненіямъ; доказательства сихъ предложеній читатели найдутъ во всѣхъ элементарныхъ курсахъ Алгебры.

Замѣтимъ сперва, что для рѣшенія уравненія $x^m - 1 = 0$, гдѣ m изображаетъ какое ни есть цѣлое *сложное число*, достаточно будетъ знать рѣшеніе уравненія такого же вида, но въ томъ случаѣ, когда показатель будетъ *простое число*. И такъ, пусть p простое число, отличное отъ 2; уравненіе, которымъ займемся теперь, будетъ слѣдующее:

$$x^p - 1 = 0.$$

Если изобразимъ чрезъ r, который ни есть изъ мнимыхъ корней этого уравненія, то всѣ остальные корни будутъ

$$r,\ r^2,\ r^3, \ldots .\ r^{p-1},\ r^p;$$

послѣдній изъ нихъ очевидно равенъ единицѣ. Отдѣливъ этотъ корень, то есть, раздѣливъ $x^p - 1$ на $x - 1$, найдется уравненіе

$$(A)\quad x^{p-1} + x^{p-2} + x^{p-3} + \ldots\ldots + x + 1 = X = 0,$$

коего корни изобразятся чрезъ

$$(B)\qquad r,\ r^2,\ r^3, \ldots\ldots r^{p-1},$$

и, очевидно, будутъ всѣ мнимые.

И такъ, вообще r^μ будетъ корнемъ уравненія $X = 0$, лишь бы только μ не равнялось нулю, и не дѣлилось на p. При такомъ условіи, выраженіе r^μ будетъ допускать только $p-1$ значеній, какъ бы число μ не было велико; дѣйствительно, если примемъ $\mu = pk + \lambda$, разумѣя подъ k какое ни есть цѣлое число, то найдемъ: $r^\mu = r^{pk+\lambda} = (r^p)^k \cdot r^\lambda$, и по причинѣ $r^p = 1$, получимъ $r^\mu = r^\lambda$, гдѣ $\lambda < p$. Легко также видѣть, что всѣ значенія (B) будутъ различны между собою; ибо, допустивъ что $r^\alpha = r^\beta$, гдѣ α и $\beta < p$, нашли бы $r^\beta(r^{\alpha-\beta} - 1) = 0$, т. е. $r^{\alpha-\beta} - 1 = 0$, и $\alpha - \beta = \delta < p$. И такъ, уравненія $r^p - 1 = 0$ и $r^\delta - 1 = 0$ должны бы имѣть мѣсто въ одно время, а это не можетъ быть по той причинѣ, что p число простое, а r отлично отъ единицы.

Къ симъ элементарнымъ предложеніямъ о двучленныхъ уравненіяхъ, прибавимъ еще двѣ теоремы изъ Теоріи Чиселъ, въ которыхъ будемъ имѣть надобность:

1-я Теорема. *Для каждаго простаго числа p существуетъ такое цѣлое число ϱ, что послѣдовательныя его степени $\varrho, \varrho^2, \varrho^3, \ldots \varrho^{p-1}$, раздѣленныя на p, даютъ остатки, всѣ различныя между собою, именно $1, 2, 3, \ldots\ldots (p-1)$, но въ порядкѣ вообще отличномъ отъ порядка показателей степеней. Цѣлое число ϱ, имѣющее такое свойство, называется* разноостаточнымъ основаніемъ *или* первообразнымъ корнемъ. Смот. RACINE PRIMITIVE.

2-я Теорема. *Всякое цѣлое число a, которое не дѣлится на простое число p, бывъ возвышено въ степень $p-1$, и раздѣлено на p, даетъ остатокъ, равный единицѣ. Или иначе, при допущенныхъ условіяхъ будетъ: $\frac{a^{p-1}-1}{p}$ = цѣлому числу, или, по знакоположенію Гаусса, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.* Смот. CONGRU. Эта теорема извѣстна подъ названіемъ *Ферматовой*. Смот. FERMAT.

Мы видѣли выше, что всѣ корни уравненія (A) заключаются въ ряду (B); этотъ самый рядъ (B) можетъ быть представленъ еще и въ другомъ видѣ. Дѣйствительно, изобразивъ чрезъ ϱ одно изъ разноостаточныхъ основаній простаго числа p, увидимъ (1-я Теорема), что строка

$$(C)\qquad r^1,\ r^\varrho,\ r^{\varrho^2},\ r^{\varrho^3}, \ldots .\ r^{\varrho^{p-2}}$$

заключаетъ въ себѣ тѣ же самыя величины какъ и рядъ (B), но только въ другомъ порядкѣ. Въ такомъ свойствѣ ряда (C) легко удостовѣриться, замѣтивъ, что по раздѣленіи на p показателей $\varrho, \varrho^2, \varrho^3, \ldots\ldots \varrho^{p-2}$, получится полный рядъ остатковъ $1, 2, 3, 4, \ldots (p-1)$ въ порядкѣ вообще отличномъ отъ порядка натуральныхъ чиселъ $1, 2, 3, 4 \ldots (p-1)$. Но такъ какъ $r^{pk} = 1$, то очевидно, что рядъ (C) будетъ заключать тѣ же самыя значенія какъ и рядъ $r^1, r^2, r^3, r^4, \ldots . r^{p-1}$.

Изобразимъ теперь чрезъ $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots . \alpha^{p-2}$ корни уравненія

$$\frac{y^{p-1}-1}{y-1} = y^{p-2} + y^{p-3} + y^{p-4} + \ldots . + y + 1 = 0,$$

и примемъ въ разсмотрѣніе слѣдующую функцію:

$$(D)\quad \Omega = r + \alpha r^\varrho + \alpha^2 r^{\varrho^2} + \alpha^3 r^{\varrho^3} + \ldots . + \alpha^{p-2} r^{\varrho^{p-2}}.$$

Если, во второй части этого уравненія, измѣнимъ корень r въ r^ϱ, то получимъ

$$r^\varrho + \alpha r^{\varrho^2} + \alpha^2 r^{\varrho^3} + \alpha^3 r^{\varrho^4} + \ldots . + \alpha^{p-2} r^{\varrho^{p-1}};$$

но въ слѣдствіе 2-ой теоремы $\varrho^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. И такъ, предыдущій рядъ обратится въ выраженіе

$$r^\varrho + \alpha r^{\varrho^2} + \alpha^2 r^{\varrho^3} + \alpha^3 r^{\varrho^4} + \ldots . + \alpha^{p-2} r;$$

но это количество одинаково съ тѣмъ, которое получилось бы чрезъ умноженіе второй части уравненія (D) на α^{p-2}, наблюдая что $\alpha^{p-1}=1$. И такъ

$$(E)\quad \alpha^{p-2}\Omega = r^{\varrho}+\alpha r^{\varrho^2}+\alpha^2 r^{\varrho^3}+\alpha^3 r^{\varrho^4}+\ldots+\alpha^{p-2}r.$$

Перемѣнивъ опять въ этомъ уравненіи r на r^{ϱ}, увидимъ, что вторая часть приведется къ той самой величинѣ, которую бы получили умноживъ вторую часть формулы (E) на α^{p-2}. Но $\alpha^{p-2}.\alpha^{p-2}\Omega = \alpha^{p-1}.\alpha^{p-3}\Omega = \alpha^{p-3}\Omega$; слѣдовательно

$$\alpha^{p-3}\Omega = r^{\varrho^2}+\alpha r^{\varrho^3}+\alpha^2 r^{\varrho^4}+\ldots+\alpha^{p-3}r+\alpha^{p-2}r^{\varrho}.$$

Эта самая формула очевидно получилась бы чрезъ измѣненіе r въ r^{ϱ^2} въ уравненіи (D). Повторивъ $(p-2)$ раза подобное дѣйствіе, мы истощимъ всѣ измѣненія, которымъ формула (D) можетъ подвергнуться чрезъ перемѣну какого ни есть изъ корней

$$r,\ r^{\varrho},\ r^{\varrho^2},\ldots\ldots r^{\varrho^{p-2}}$$

на остальные. Такимъ образомъ получимъ $p-1$ значеній для функціи Ω, именно:

$$(F)\quad \Omega,\ \alpha^{p-2}\Omega,\ \alpha^{p-3}\Omega,\ \alpha^{p-4}\Omega,\ldots\alpha^2\Omega,\ \alpha\Omega.$$

Эти функціи пользуются тѣмъ свойствомъ, что $(p-1)$-ыя степени ихъ равны между собою, ибо

$$(\alpha^{p-2})^{p-1}=(\alpha^{p-3})^{p-1}=(\alpha^{p-4})^{p-1}=\ldots=(\alpha^{p-1})^{p-2}$$
$$=(\alpha^{p-1})^{p-3}=(\alpha^{p-1})^{p-4}=\ldots=1.$$

Изобразимъ чрезъ ϑ, $(p-1)$-ую степень котораго ни есть изъ значеній величины Ω въ ряду (F). Мы сказали сей-часъ, что такое количество ϑ не будетъ измѣняться съ перемѣною какого ни есть корня, напримѣръ r, на $r^{\varrho}, r^{\varrho^2}, r^{\varrho^3},\ldots$ Слѣдовательно, разложивъ величину $\Omega^{p-1}=\vartheta$ въ рядъ по степенямъ α, найдется выраженіе вида

$$\vartheta = a_1+a_2\alpha+a_3\alpha^2+a_4\alpha^3+\ldots\ldots+a_{p-1}\alpha^{p-2},$$

въ которое не войдутъ степени количества α выше $(p-2)$-ой, ибо ихъ можно исключить посредствомъ уравненія $\alpha^{p-1}=1$, доставляющаго $\alpha^p=\alpha$, $\alpha^{p+1}=\alpha^2$, $\alpha^{p+2}=\alpha^3$, и проч.

Что касается до функцій $a_1, a_2, a_3, a_4,\ldots a_{p-1}$, то онѣ заключаютъ въ себѣ только цѣлыя положительныя степени корня r, и не измѣняютъ своей величины съ перемѣною r на $r^{\varrho}, r^{\varrho^2}, r^{\varrho^3},\ldots\ldots r^{\varrho^{p-2}}$. Слѣдовательно, каждая изъ функцій $a_1, a_2, a_3,\ldots$ и вообще a_m можетъ быть представлена въ видѣ

$$a_m = A_0+A_1r+A_2r^2+A_3r^3+\ldots+A_{p-1}r^{p-1};$$

изъ этой суммы мы исключили степени r, превышающія $(p-1)$-ую, что́ всегда можно сдѣлать на основаніи уравненія $r^p=1$, изъ котораго $r^{p+1}=r$, $r^{p+2}=r^2$, $r^{p+3}=r^3$, и проч.

Но мы видѣли сей-часъ, что чрезъ измѣненіе корня r, на $r^{\varrho}, r^{\varrho^2},\ldots r^{\varrho^{p-2}}$, величина a_m не измѣнится; слѣдовательно найдемъ также

$$a_m = B_0+B_1r^{\varrho}+B_2r^{\varrho^2}+B_3r^{\varrho^3}+\ldots\ldots+B_{p-1}r^{\varrho^{p-1}},$$

гдѣ коэффиціенты $B_1, B_2, B_3,\ldots$ тѣ же, что и $A_1, A_2, A_3,\ldots$ но только расположены въ другомъ порядкѣ, ибо показатели $\varrho, \varrho^2, \varrho^3,\ldots$ уже не будутъ по порядку равноостаточны съ 1, 2, 3,... по модулю p. Измѣнивъ въ послѣднемъ уравненіи r на r^{ϱ}, получимъ формулу

$$a_m = B_0+B_1r^{\varrho^2}+B_2r^{\varrho^3}+B_3r^{\varrho^4}+\ldots+B_{p-1}r^{\varrho},$$

которая должна быть тождественна съ предыдущею, то есть, равенство между ними должно существовать независимо отъ r. И такъ

$$B_0+B_1r^{\varrho}+B_2r^{\varrho^2}+B_3r^{\varrho^3}+\ldots+B_{p-1}r^{\varrho^{p-1}}$$
$$=B_0+B_1r^{\varrho^2}+B_2r^{\varrho^3}+B_3r^{\varrho^4}+\ldots+B_{p-1}r^{\varrho},$$

откуда очевидно находимъ

$$B_0=B_0,\ B_2=B_1,\ B_3=B_2,\ \ldots B_1=B_{p-1},$$

то есть

$$B_1=B_2=B_3=\ldots=B_{p-1}.$$

И такъ

$$a_m = B_0+B_1(r^{\varrho}+r^{\varrho^2}+r^{\varrho^3}+\ldots+r^{\varrho^{p-1}})$$

Но $r^{\varrho}, r^{\varrho^2}, r^{\varrho^3},\ldots r^{\varrho^{p-1}}$ изображаютъ всѣ корни уравненія $x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1=0$, а ихъ сумма, какъ извѣстно изъ элементарной Алгебры, равна коэффиціенту степени x^{p-2}, взятому съ противнымъ знакомъ, то есть, -1. Слѣдовательно $a_m = B_0-B_1$.

Отсюда видимъ, что коэффиціенты $a_0, a_1, a_2,\ldots$ опредѣляются непосредственно; ибо чрезъ разложеніе величины $\Omega^{p-1}=\vartheta$, получимъ значенія коэффиціентовъ B_0, B_1, или A_0, A_1. Слѣдовательно функція ϑ будетъ извѣстна. Опредѣливъ потомъ всѣ $p-1$ значеній количества $\sqrt[p-1]{\vartheta}$, которыя изобразимъ чрезъ $\vartheta_1, \vartheta_2,\ldots\vartheta_{p-1}$, составимъ слѣдующія уравненія первой степени для опредѣленія корней $r, r^{\varrho}, r^{\varrho^2},\ldots r^{\varrho^{p-2}}$:

$$\vartheta_1 = r+\alpha r^{\varrho}+\alpha^2 r^{\varrho^2}+\ldots+\alpha^{p-2}r^{\varrho^{p-2}}$$
$$\vartheta_2 = r^{\varrho}+\alpha r^{\varrho^2}+\alpha^2 r^{\varrho^3}+\ldots+\alpha^{p-2}r$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\vartheta_{p-1} = r^{\varrho^{p-2}}+\alpha r+\alpha^2 r^{\varrho}+\ldots+\alpha^{p-2}r^{\varrho^{p-3}}.$$

Вотъ въ самомъ сокращенномъ видѣ алгебрическое рѣшеніе двучленныхъ уравненій, которое изложили, придерживаясь способа Лагранжа. Мы принуждены были выпустить многія подробности и пріёмы, упрощающіе значительнымъ образомъ эту теорію, а также и тѣ соображенія, которыми должно руководствоваться при избраніи различныхъ значеній $\sqrt[p-1]{\vartheta}$, когда составляются окончательныя уравненія, опредѣляющія корни $r, r^{\rho}, r^{\rho^2}, \ldots r^{\rho^{p-2}}$.

Въ указанныхъ выше сочиненіяхъ, читатели найдутъ разрѣшеніе всѣхъ недоумѣній, могущихъ имъ представиться.

Говоря объ открытіи Гаусса, мы должны непремѣнно коснуться и трудовъ знаменитаго *Абеля* по этой же самой теоріи.

Извѣстно, что общія алгебрическія уравненія, выше четвертой степени, не могутъ быть рѣшены посредствомъ радикаловъ, почему для обозначенія дѣйствій, производимыхъ для ихъ рѣшенія, надобно ввести новый знакъ. Но есть частные случаи, въ которыхъ уравненія высшихъ степеней рѣшаются посредствомъ радикаловъ, именно, когда между корнями предложеннаго уравненія существуетъ какая нибудь зависимость. Такъ напримѣръ уравненіе пятой степени

$$x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0,$$

вообще не можетъ быть рѣшено посредствомъ радикальной формулы; но еслибы мы узнали какъ нибудь, что сумма двухъ изъ его пяти корней x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, напримѣръ $x_1 + x_2$, равна опредѣленному количеству a, то предложенное уравненіе могло бы разложиться на два другія, одно 2-й степени, а другое 3-ей.

Рѣшеніе двучленнаго уравненія $x^p - 1 = 0$ посредствомъ радикаловъ, которое сей-часъ было изложено, основано на весьма простомъ отношеніи, существующемъ между его корнями. Абель распространилъ изслѣдованія Гаусса на уравненія, заключающія въ себѣ болѣе двухъ членовъ. Онъ предположилъ, что корни алгебрическаго уравненія $f(x) = 0$, связаны между собою соотношеніемъ болѣе сложнымъ, нежели въ случаѣ двучленнаго уравненія; принявъ r за корень функціи $f(x)$, Абель допустилъ что $\varphi(r)$ изобразитъ другой ея корень, разумѣя подъ φ какую ни есть раціональную функцію.

Чтобы познакомить нашихъ читателей съ трудами Абеля по сему предмету, мы приведемъ предложенное имъ рѣшеніе уравненія $f(x) = 0$ въ томъ случаѣ, когда степень n сего послѣдняго будетъ *число простое*. Положимъ, что функція $f(x)$ не можетъ быть разложена на два раціональные множителя; въ противномъ же случаѣ, вмѣсто одного уравненія, пришлось бы очевидно рѣшить два, низшей степени. Изобразимъ чрезъ r' функцію $\varphi(r)$; слѣдовательно r и r' будутъ два корня уравненія $f(x) = 0$. Замѣтимъ сперва, что функція $f(\varphi(x))$ обратится въ нуль, когда положимъ въ ней $x = r$, откуда слѣдуетъ, что сдѣлавъ $f(\varphi(x)) = F(x)$, функціи $F(x)$ и $f(x)$ должны имѣть общій множитель раціональный; но такъ какъ $f(x)$, по предположенію, *неразложимая* функція, то отсюда заключаемъ, что $F(x)$ будетъ дѣлиться на $f(x)$, и что слѣдовательно всѣ корни уравненія $f(x) = 0$, удовлетворяютъ и $F(x) = 0$. И такъ r', то есть $\varphi(r)$ будетъ корнемъ уравненія $F(x) = 0$, почему

$$F(r') = f(\varphi(r')) = f[\varphi(\varphi(r))] = 0,$$

а отсюда усматриваемъ, что $\varphi(\varphi(r))$ есть также корень уравненія $f(x) = 0$. Выраженіе $\varphi(\varphi(r))$ для краткости будемъ изображать чрезъ $\varphi^2(r)$; равнымъ образомъ подъ $\varphi^3(r)$ будемъ разумѣть функцію $\varphi[\varphi(\varphi(r))]$, и такъ далѣе. Изобразивъ чрезъ r'' корень $\varphi^2(r)$, найдемъ $F(r'') = f(\varphi(r''))$ $= 0$, откуда видимъ, что $\varphi(r'')$ или $\varphi^3(r)$ есть также корень предложеннаго уравненія $f(x) = 0$. То же самое докажемъ въ разсужденіи выраженій $\varphi^4(r)$, $\varphi^5(r)$ и проч.

И такъ, количества

$$(a) \qquad r,\ \varphi(r),\ \varphi^2(r),\ \varphi^3(r),\ \varphi^4(r), \ldots\ldots$$

будутъ корнями уравненія $f(x) = 0$; но такъ какъ сіе послѣднее не можетъ имѣть болѣе n корней, то члены ряда (a) не могутъ всѣ различествовать между собою. По этому, пусть будетъ $\varphi^{\lambda+\mu}(r) = \varphi^{\mu}(r)$. Такъ какъ уравненіе $\varphi^{\lambda}(x)$ $- x = 0$ удовлетворится когда возмемъ $x = \varphi^{\mu}(r)$, то отсюда слѣдуетъ, что функція $\varphi^{\lambda}(x) - x$ и $f(x)$ будутъ имѣть общій раціональный множитель, или, по причинѣ неразложимости функціи $f(x)$, $\varphi^{\lambda}(x) - x$ будетъ дѣлиться на $f(x)$; слѣдовательно, каждый изъ корней уравненія $f(x) = 0$ удовлетворитъ вмѣстѣ и уравненію $\varphi^{\lambda}(x) - x = 0$, почему $\varphi^{\lambda}(r) - r = 0$, откуда $\varphi^{\lambda}(r) = r$. И такъ первый корень r повторится въ ряду (a); сверхъ того легко видѣть, что этотъ корень r возвратится прежде другихъ $\varphi(r)$, $\varphi^2(r)$ и проч. Дѣйствительно, положимъ что не r, а $\varphi^3(r)$ возвращается прежде; въ такомъ случаѣ будетъ $\varphi^3(r) = \varphi^{k+3}(r)$, откуда $r = \varphi^k(r)$, изъ чего усматриваемъ, что r возвратится прежде нежели $\varphi(r)$, $\varphi^2(r), \ldots$ И такъ, рядъ корней будетъ

(b) $\quad r,\ \varphi(r),\ \varphi^2(r), \ldots \varphi^{\lambda-1}(r),\ r,\ \varphi(r),\ \varphi^2(r), \ldots$

Теперь легко показать, что $\lambda = n$. Дѣйствительно, если λ не равно n, то должно быть $\lambda < n$; пусть будетъ ϱ одинъ изъ корней уравненія $f(x) = 0$, не заключающійся въ ряду (b); корень ϱ долженъ удовлетворять уравненію $F(x) = f(\varphi(x)) = 0$, и слѣдовательно $\varphi(\varrho)$ будетъ также корнемъ уравненія $f(x) = 0$; такимъ образомъ получится новый рядъ корней

$$\varrho,\ \varphi(\varrho),\ \varphi^2(\varrho), \ldots \varphi^{\mu-1}(\varrho),\ \varrho,\ \varphi(\varrho),\ \varphi^2(\varrho), \ldots$$

въ которомъ μ изображаетъ число корней, различныхъ между собою. Но легко доказать что $\mu = \lambda$; дѣйствительно, такъ какъ $\varrho = \varphi^\mu(\varrho)$, то видимъ, что уравненіе $\varphi^\mu(x) - x = 0$ удовлетворяется значеніемъ $x = \varrho$; очевидно, что и всѣ остальные корни уравненія $f(x) = 0$ удовлетворяютъ уравненію $\varphi^\mu(x) - x = 0$; слѣдовательно $\varphi^\mu(r) - r = 0$; но мы нашли выше $\varphi^\lambda(r) - r = 0$, почему $\mu = \lambda$.

Теперь докажемъ, что всѣ корни ряда

(c) $\quad \varrho,\ \varphi(\varrho),\ \varphi^2(\varrho) \ldots \varphi^{\lambda-1}(\varrho)$

различны отъ корней, заключающихся въ ряду (b); если они не различны, то положимъ напримѣръ $\varphi^4(r) = \varphi^7(\varrho)$, гдѣ $7 < \lambda$; изъ этого уравненія заключаемъ $\varphi^{\lambda-3}(r) = \varrho$, а это противно сдѣланному выше предположенію, ибо ϱ не заключается въ ряду (b). И такъ, всѣ корни ряда (c) отличны отъ корней ряда (b).

Если корни уравненія $f(x) = 0$ не истощены рядами (b) и (c), то будемъ искать третій, четвертый, ... рядъ, пока не истощимъ полнаго числа n корней. И такъ, изобразивъ чрезъ i число всѣхъ рядовъ, получимъ $\lambda i = n$, и слѣдовательно $i = 1$, ибо n есть *число простое*. Слѣдовательно всѣ корни уравненія $f(x) = 0$ будутъ

$$r,\ \varphi(r),\ \varphi^2(r),\ \varphi^3(r), \ldots \varphi^{n-1}(r).$$

Доказавъ это предложеніе, и основываясь на соображеніяхъ, изложенныхъ Лагранжемъ въ изслѣдованіяхъ его объ алгебрическихъ уравненіяхъ, Абель составляетъ функцію

$$[r + \alpha\varphi(r) + \alpha^2\varphi^2(r) + \ldots\ldots + \alpha^{n-1}\varphi^{n-1}(r)]^n = \psi(r),$$

гдѣ α изображаетъ одинъ изъ мнимыхъ корней уравненія $\alpha^n - 1 = 0$.

Очевидно, что измѣнивъ r въ $\varphi(r)$ найдется

$$\begin{aligned}\psi[\varphi(r)] &= [\varphi(r) + \alpha\varphi^2(r) + \ldots + \alpha^{n-2}\varphi^{n-1}(r) + \alpha^{n-1}r]^n \\ &= [\alpha^{n-1}(r + \alpha\varphi(r) + \alpha^2\varphi^2(r) + \ldots + \alpha^{n-1}\varphi^{n-1}(r))]^n \\ &= \psi(r).\end{aligned}$$

Подобнымъ образомъ получимъ

$$\psi[\varphi^2(r)] = \psi(r)$$
$$\psi[\varphi^3(r)] = \psi(r)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\psi[\varphi^{n-1}(r)] = \psi(r)$$

откуда

$$\psi(r) = \frac{\psi(r) + \psi[\varphi(r)] + \psi[\varphi^2(r)] + \ldots + \psi[\varphi^{n-1}(r)]}{n}.$$

И такъ $\psi(r)$ будетъ *симетрическая* функція всѣхъ корней предложеннаго уравненія $f(x) = 0$, и слѣдовательно можетъ быть опредѣлена раціональнымъ образомъ посредствомъ его коэффиціентовъ. Изобразивъ чрезъ $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots \psi_n$ всѣ n значеній $\sqrt[n]{\psi(r)}$, очевидно получимъ

$$\begin{aligned}
r + \alpha\varphi(r) + \alpha^2\varphi^2(r) + \ldots + \alpha^{n-1}\varphi^{n-1}(r) &= \psi_1 \\
\varphi(r) + \alpha\varphi^2(r) + \alpha^2\varphi^3(r) + \ldots + \alpha^{n-1}r &= \psi_2 \\
\varphi^2(r) + \alpha\varphi^3(r) + \alpha^2\varphi^4(r) + \ldots + \alpha^{n-1}\varphi(r) &= \psi_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\varphi^{n-1}(r) + \alpha r + \alpha^2\varphi(r) + \ldots + \alpha^{n-1}\varphi^{n-2}(r) &= \psi_n.
\end{aligned}$$

Изъ этихъ n уравненій первой степени выведемъ по извѣстнымъ правиламъ всѣ n корней r, $\varphi(r)$, $\varphi^2(r), \ldots \varphi^{n-1}(r)$ предложеннаго уравненія $f(x) = 0$.

BINOMIAUX (COËFFICIENS). (Алг.) **БИНОМІАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦЕНТЫ.** Такъ называются численные коэффиціенты $1, \frac{m}{1}, \frac{m(m-1)}{1.2}$, $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}, \ldots$ и вообще $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-\overline{n-1})}{1.2.3\ldots n}$ въ послѣдовательныхъ членахъ разложенія двучленнаго количества $(a+b)^m$. *Эйлеръ* означалъ биноміальные коэффиціенты чрезъ $\left[\frac{m}{n}\right]$; *Тибо* (*Thibaut*) чрезъ $m\overset{n}{\mathfrak{B}}$, а *Роте* (*Rothe*) употребилъ самое удобное знакоположеніе, именно m_n. Всѣ эти знакоположенія изображаютъ общій биноміальный членъ $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-\overline{n-1})}{1.2.3\ldots n}$.

Легко видѣть, что сумма всѣхъ *биноміальныхъ коэффиціентовъ* равна 2^m, ибо положивъ въ уравненіи (A) [Смот. BINOME DE NEUTON] $a = 1$ и $b = 1$, найдемъ

$$(1+1)^m = 2^m = 1 + m + \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots$$

Самое примѣчательное свойство биноміальныхъ коэффиціентовъ, когда показатель m есть *простое число*, состоитъ въ томъ, что каждый изъ нихъ дѣлится на-цѣло на m. И въ самомъ дѣлѣ, произведеніе $m(m-1)(m-2)\ldots(m-\overline{n-1})$ дѣлится на $1.2.3\ldots n$, и какъ n всегда менѣе m, а m простое число, то ясно, что $(m-1)(m-2)\ldots(m-\overline{n-1})$ будетъ дѣлиться на $1.2.3\ldots n$; слѣдовательно $\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-\overline{n-1})}{1.2.3\ldots n}=$ цѣлому числу; помноживъ на m, усматриваемъ непосредственно справедливость предложенія, о которомъ сей-часъ упомянули.

BIPARTITION. Смот. BISSECTION.

BIQUADRATIQUE или **CARRÉ-CARRÉ.** (Алг.) **БИКВАДРАТНАЯ, ЧЕТВЕРТАЯ СТЕПЕНЬ.** *Un nombre biquadratique, биквадратное число, число четвертой степени. Parabole biquadratique, парабола биквадратная, четвертой степени*, опредѣляемая уравненіемъ $y=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$. *Équations biquadratiques. Уравненія биквадратныя, четвертой степени.* Уравненіе вида $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, гдѣ a, b, c, d изображаютъ какія угодно количества, вещественныя или мнимыя, предполагаемыя извѣстными.

Первый, предложившій способъ для рѣшенія биквадратныхъ уравненій, былъ Италіянецъ *Людовикъ Феррари*. Этотъ способъ называется *Италіянскимъ*, или, чаще, *правиломъ Рафаэля Бомбелли*, потому что сей послѣдній объяснилъ его въ своей Алгебрѣ, изданной въ 1574 году. Впослѣдствіи были предложены многіе другіе способы, изъ числа которыхъ болѣе примѣчательны рѣшенія *Декарта, Эйлера* и *Лагранжа*; мы изложимъ подробно способъ Эйлера и покажемъ другіе, не останавливаясь на нихъ.

Способъ Людовика Феррари, извѣстный подъ названіемъ правила Бомбелли.

Пусть будетъ

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

общее уравненіе 4-й степени. Предполагая его тождественнымъ съ слѣдующимъ:

$$(x^2+\tfrac{1}{2}ax+p)^2-(qx+r)^2=0,$$

получимъ, по разложеніи квадратовъ,

$$\tfrac{1}{4}a^2+2p-q^2=b$$
$$ap-2qr=c$$
$$p^2-r^2=d.$$

Если изъ этихъ трехъ уравненій исключимъ q и r, то найдемъ для опредѣленія p слѣдующее уравненіе третей степени:

$$p^3-\tfrac{1}{2}bp^2+\left(\frac{ac}{4}-d\right)p-\frac{a^2d-4bd+c^2}{8}=0;$$

опредѣливъ отсюда p, получимъ также величины q и r по формуламъ

$$q=\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+2p-b}$$
$$r=\frac{ap-c}{2q}.$$

Когда p, q, r будутъ извѣстны, то изъ уравненія

$$(x^2+\tfrac{1}{2}ax+p)^2-(qx+r)^2=0$$

выведемъ искомыя значенія для x; и дѣйствительно, такъ какъ

$$x^2+\tfrac{1}{2}ax+p=\pm(qx+r),$$

то и получимъ слѣдующія два квадратныя уравненія:

$$x^2+\tfrac{1}{2}ax+p=+qx+r$$
$$x^2+\tfrac{1}{2}ax+p=-qx-r,$$

коихъ корни будутъ одинаковы съ корнями предложеннаго уравненія 4-й степени.

Способъ Декарта. Освободивъ уравненіе четвертой степени отъ втораго члена (Смот. TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS), найдемъ

$$x^4+px^2+qx+r=0,$$

гдѣ p, q и r извѣстны. Допустивъ теперь, что x^4+px^2+qx+r тождественно равно произведенію двухъ множителей x^2+Px+Q и x^2-Px+R, найдемъ

$$x^4+px^2+qx+r=(x^2+Px+Q)(x^2-Px+R)$$
$$=x^4+(Q-P^2+R)x^2+P(R-Q)x+QR;$$

слѣдовательно

$$Q-P^2+R=p$$
$$P(R-Q)=q$$
$$QR=r;$$

исключая Q и R изъ сихъ уравненій, получимъ

$$P^6+2pP^4+(p^2-4r)P^2-q^2=0.$$

Это уравненіе, называемое *разрѣшающимъ (la réduite, la résolvante)* хотя и 6-й степени, но непосредственно приводится къ 3-ей, принявъ $P^2=z$. Найдя P, получимъ Q и R по формуламъ

$$Q=\tfrac{1}{2}\left(p+P^2-\frac{q}{P}\right)$$
$$R=\tfrac{1}{2}\left(p+P^2+\frac{q}{P}\right).$$

Но когда P, Q, R будутъ извѣстны, то четыре корня предложеннаго уравненія 4-й степени получатся чрезъ рѣшеніе двухъ уравненій 2-й степени

$$x^2+Px+Q=0$$
$$x^2-Px+R=0.$$

Способъ Эйлера. Предположивъ, какъ и выше, что данное уравненіе 4-й степени вида

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

принимаемъ $x = u + v + w$, разумѣя подъ u, v, w неизвѣстныя величины. Возвысивъ въ квадратъ, получимъ

$$x^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + uw + vw),$$

или, положивъ

$$(1) \qquad P = u^2 + v^2 + w^2, \text{ найдемъ}$$

$$x^2 - P = 2(uv + uw + vw),$$

откуда, возвысивъ опять въ квадратъ,

$$x^4 - 2Px^2 + P^2 = 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) + 8uvw(u + v + w).$$

Если положимъ

$$(2) \quad \begin{cases} Q = u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 \\ R = u^2v^2w^2 \end{cases}$$

и замѣнивъ сумму $u + v + w$ величиною x, перенесемъ всѣ члены въ первую часть уравненія, то получимъ

$$x^4 - 2Px^2 - 8\sqrt{R}.x + P^2 - 4Q = 0.$$

Чтобы это уравненіе имѣло всѣ корни одинаковые съ предложеннымъ, то должно быть

$$(3) \quad -2P = p, \ -8\sqrt{R} = q, \ P^2 - 4Q = r,$$

откуда $P = -\frac{p}{2}$, $Q = \frac{1}{4}\left(\frac{p^2}{4} - r\right)$, $R = \frac{q^2}{64}$.

Но изъ уравненій (1) и (2) слѣдуетъ, что принявъ величины u^2, v^2, w^2, за корни уравненія 3-ей степени, получимъ для опредѣленія ихъ

$$(4) \qquad z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0,$$

или, подставляя на мѣсто P, Q и R ихъ значенія

$$z^3 + \frac{p}{2}z^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{p^2}{4} - r\right)z - \frac{q^2}{64} = 0.$$

Опредѣливъ по извѣстнымъ правиламъ [Смот. CARDAN (RÈGLE DE)] корни этого уравненія, и изобразивъ ихъ чрезъ z_1, z_2, z_3, найдемъ

$$z_1 = u^2, \ z_2 = v^2, \ z_3 = w^2, \text{ откуда}$$

$$u = \mp\sqrt{z}, \ v = \mp\sqrt{z_2}, \ w = \mp\sqrt{z_3};$$

слѣдовательно

$$(5) \qquad x = \mp\sqrt{z_1} \mp \sqrt{z_2} \mp \sqrt{z_3}.$$

Въ этой суммѣ порядокъ обоюдныхъ знаковъ $\mp$ совершенно произвольный, почему и получатся 8 значеній для x, между тѣмъ какъ должно получить всего только 4. Для разрѣшенія этого затрудненія, стоитъ только обратить вниманіе на то обстоятельство, что уравненіе (4) не измѣнится, когда вмѣсто уравненія

$$(6) \qquad x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

будемъ разсматривать слѣдующее:

$$(7) \qquad x^4 + px^2 - qx + r = 0,$$

въ которомъ перемѣнили знакъ предпослѣдняго коэффиціента q. И такъ, очень естественно, что получаемъ восемь корней, ибо имѣемъ два уравненія 4-й степени.

Чтобы узнать, какіе именно корни принадлежатъ уравненіямъ (6) и (7), то для этого замѣчаемъ, что произведеніе uvw, равное $\sqrt{R}$, и въ силу одной изъ формулъ (3), также равное $-\frac{q}{8}$, должно имѣть противный знакъ съ величиною q; слѣдовательно, когда $q > 0$, то $uvw < 0$, и на-оборотъ, если $q < 0$, то $uvw > 0$. И такъ, двоякіе знаки предъ $\sqrt{z_1}$, $\sqrt{z_2}$, $\sqrt{z_3}$ должно брать такъ, чтобы упомянутыя условія удовлетворялись; этого замѣчанія достаточно для составленія двухъ системъ корней, соотвѣтствующихъ обоимъ уравненіямъ (6) и (7). Для (6), въ которомъ $q > 0$, получимъ четыре корня

$$(8) \quad \begin{cases} x_1 = +\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} \\ x_2 = +\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} \\ x_3 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} \\ x_4 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}. \end{cases}$$

Для (7), въ которомъ $q < 0$, найдемъ

$$(8) \quad \begin{cases} x_1 = +\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} \\ x_2 = +\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3} \\ x_3 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3} \\ x_4 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}. \end{cases}$$

Положимъ, напримѣръ, что дано уравненіе

$$x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0,$$

относящееся къ случаю уравненія (6).

Здѣсь $p = -25$, $q = 60$, $r = -36$; слѣдовательно $P = \frac{25}{2}$, $Q = \frac{769}{16}$, $R = \frac{225}{4}$, и уравненіе (4) приметъ видъ

$$z^3 - \frac{25}{2}z^2 + \frac{769}{16}z - \frac{225}{4} = 0.$$

Рѣшивъ это уравненіе, получимъ

$$z_1 = \frac{9}{4}, \ z_2 = 4, \ z_3 = \frac{25}{4};$$

слѣдовательно

$$u = \pm\frac{3}{2}, \ v = \pm 2, \ w = \pm\frac{5}{2},$$

и какъ $q > 0$, то должно будетъ употребить систему корней, опредѣляемую формулами (8). И такъ

$$x_1 = +\frac{3}{2} + 2 - \frac{5}{2} = +1$$
$$x_2 = +\frac{3}{2} - 2 + \frac{5}{2} = +2$$
$$x_3 = -\frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} = +3$$
$$x_4 = -\frac{3}{2} - 2 - \frac{5}{2} = -6.$$

Способъ Лагранжа. Этотъ способъ основанъ на теоріи симметрическихъ функцій. Изобразивъ, какъ и выше, чрезъ x_1, x_2, x_3, x_4 корни уравненія

$$x^4+px^2+qx+r=0,$$

Лагранжъ ищетъ функцію вида

$$\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3+\delta x_4,$$

которой бы опредѣленіе зависило отъ уравненія низшей степени противу предложеннаго. Функція $x_1+x_2-x_3-x_4$, получающая шесть различныхъ значеній

$$(a)\begin{cases}x_1+x_2-x_3-x_4\\x_1+x_3-x_2-x_4\\x_1+x_4-x_2-x_3\end{cases}\qquad(b)\begin{cases}x_3+x_4-x_1-x_2\\x_2+x_4-x_1-x_3\\x_2+x_3-x_1-x_4\end{cases}$$

удовлетворяетъ требованію, ибо величины ея, равныя по-двѣ, но имѣющія противные знаки, опредѣляются уравненіемъ 6-й степени, которое можетъ быть приведено непосредственно къ 3-ей. Для полученія какой ни есть изъ системъ (a) и (b) стоитъ только составить произведеніе трехъ множителей

$$z-(x_1+x_2-x_3-x_4)^2$$
$$z-(x_1+x_3-x_2-x_4)^2$$
$$z-(x_1+x_4-x_2-x_3)^2$$

которое, въ слѣдствіе извѣстныхъ отношеній

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0$$
$$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=p$$
$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-q$$
$$x_1x_2x_3x_4=r,$$

приведетъ къ уравненію третей степени

$$u^3+2pu^2+(p^2-4r)u-q^2,$$

гдѣ $u=\frac{z}{4}$. — Изобразимъ чрезъ u_1, u_2, u_3 корни этого уравненія. Соотвѣтственныя величины z будутъ $z_1=4u_1$, $z_2=4u_2$, $z_3=4u_3$; слѣдовательно, значенія функцій (a) и (b) опредѣлятся формулами

$$\begin{aligned}&x_1+x_2+x_3+x_4=0, && x_1+x_2+x_3+x_4=0\\&x_1+x_2-x_3-x_4=2\sqrt{u_1}, && x_1+x_2-x_3-x_4=-2\sqrt{u_1}\\&x_1+x_3-x_2-x_4=2\sqrt{u_2}, && x_1+x_3-x_2-x_4=-2\sqrt{u_2}\\&x_1+x_4-x_2-x_3=2\sqrt{u_3}, && x_1+x_4-x_2-x_3=-2\sqrt{u_3}.\end{aligned}$$

Замѣтимъ, что всякія другія перестановленія величинъ $2\sqrt{u_1}$, $2\sqrt{u_2}$, $2\sqrt{u_3}$, $-2\sqrt{u_1}$, $-2\sqrt{u_2}$, $-2\sqrt{u_3}$ не произведутъ иныхъ системъ, какъ только тѣ двѣ, которыя здѣсь приведены. Что касается до выбора одной изъ двухъ системъ то увидимъ, точно такъ какъ то было объяснено въ *способѣ Эйлера*, что должно принять первую, когда $q<0$, а вторую, когда $q>0$.

Первая система приводитъ къ формуламъ

$$x_1=\tfrac12(+\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3})$$
$$x_2=\tfrac12(+\sqrt{u_1}-\sqrt{u_2}-\sqrt{u_3})$$
$$x_3=\tfrac12(-\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}-\sqrt{u_3})$$
$$x_4=\tfrac12(-\sqrt{u_1}-\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3}),$$

а вторая даетъ

$$x_1=-\tfrac12(+\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3})$$
$$x_2=-\tfrac12(+\sqrt{u_1}-\sqrt{u_2}-\sqrt{u_3})$$
$$x_3=-\tfrac12(-\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}-\sqrt{u_3})$$
$$x_4=-\tfrac12(-\sqrt{u_1}-\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3}).$$

BIRECTANGLE (TRIANGLE). (Геом.) **ДВОЯКО-ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИКЪ.** Такъ называется сферическій треугольникъ, имѣющій два угла прямые. *Трояко-прямоугольнымъ (trirectangle)* называется такой сферическій треугольникъ, у котораго всѣ три угла прямые.

BISEAU. ГРАНЬ.

BISSECTION или **BIPARTITION. РАЗДѢЛЕНІЕ ПОПОЛАМЪ, НА ДВѢ РАВНЫЯ ЧАСТИ, ДВУСѢЧЕНІЕ.** *Bissection de l'angle, раздѣленіе угла пополамъ. Bissection d'une ligne, раздѣленіе линіи на двѣ равныя части.*

BISSEXTE или **INTERCALAIRE.** (Хрон.) **ВСТАВОЧНЫЙ, ПРИБАВОЧНЫЙ, ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ.** *Jour intercalaire, вставочный день*; день прибавляемый къ простому году для полученія високоснаго.

BISSEXTILE (ANNÉE). (Хрон.) **ВИСОКОСНЫЙ ГОДЪ, ВИСОКОСЪ** и **ВЫСОКОСЪ.** C. ANNÉE.

BIVEAU. Смот. BEVEAU.

BO.

BODE (LOI DE). (Астр.) **ЗАКОНЪ БОДЕ.** Такъ называется законъ, относящійся къ среднимъ разстояніямъ планетъ отъ солнца, найденный эмпирически Берлинскимъ астрономомъ *Боде*. Въ слѣдствіе этого закона разстоянія планетъ отъ солнца, выраженныя въ цѣлыхъ числахъ, будутъ слѣдующія:

Меркурій	4	=	4
Венера	$4+3.2^0$	=	7
Земля	$4+3.2^1$	=	10
Марсъ	$4+3.2^2$	=	16
......	$4+3.2^3$	=	28
Юпитеръ	$4+3.2^4$	=	52
Сатурнъ	$4+3.2^5$	=	100
Уранъ	$4+3.2^6$	=	196;

здѣсь разстояніе земли отъ солнца принимается равнымъ 10. И такъ, если означимъ чрезъ n мѣсто разсматриваемой планеты, считая по порядку отъ Венеры, то разстояніе той планеты отъ солнца, должно быть, по закону Боде,

$$4 + 3 . 2^{n-1}.$$

Промежутокъ между Марсомъ и Юпитеромъ очевиденъ: и дѣйствительно, извѣстно что въ этомъ пространствѣ въ новѣйшія времена открыты четыре малыя планеты: *Церера*, *Паллада*, *Юнона* и *Веста*. Можетъ быть когда нибудь онѣ и составляли одну планету, коей удаленіе отъ солнца равнялось 28, по закону Боде. Разстояніе Цереры подходитъ довольно близко подъ упомянутый законъ; дѣйствительно, по опредѣленію Гаусса, это разстояніе изображается числомъ 27, 67, которое мало разнствуетъ отъ 28.

BOIS (RÉSISTANCE DES). (Мех.) **СОПРОТИВЛЕНІЕ ДЕРЕВА.** Многіе авторы занимались теоріею и практикою задачи, состоящей въ опредѣленіи законовъ сопротивленія дерева, подвергаемаго разнаго рода усиліямъ, какъ то: давленію параллельному и перпендикулярному къ его волокнамъ, скручиванію, натягиванію и проч. Чтобы дать понятіе о родѣ изысканій по этому предмету, мы приводимъ одинъ результатъ, получаемый изъ теоріи, и согласующійся съ показаніями опыта:

Если прямоугольный брусъ AB (черт. 18 листъ II), *коего длина* $AB = l$, *высота* $CD = h$, *ширина* $BC = a$, *будетъ однимъ концемъ наглухо утвержденъ въ стѣнѣ LM, то другимъ концомъ своимъ онъ можетъ сдержать вѣсъ* $P = K . \frac{ah^2}{l}$, *гдѣ K изображаетъ постоянный коэффиціентъ, зависящій отъ крѣпости того дерева, которое подвергается испытанію. Съ увеличеніемъ груза P, брусъ переломится около прикрѣпленнаго конца A.* —

Задача о сопротивленіи дерева весьма важна въ Архитектурѣ и въ Кораблестроительномъ Искусствѣ. Читатели найдутъ надлежащія подробности по сему предмету въ сочиненіяхъ: *Duhamel, Traité sur la résistance des bois; Girard, Traité analytique de la résistance des solides; Resumé des leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la Mécanique, par Navier; Handbuch der Statik fester Körper, von Eitelwein. Berlin* 1808. *Gehlers neues physikalisches Lexicon*, статья *Cohesion*.

BOMBELLI (RÈGLE DE). См. BIQUADRATIQUES (ÉQUATIONS).

BOMBES (JET DES). БРОСАНІЕ, МЕТАНІЕ БОМБЪ. Смот. BALISTIQUE.

BONTÉ DES OBSERVATIONS. (Исч. Вѣр.) **ДОСТОИНСТВО, ТОЧНОСТЬ НАБЛЮДЕНІЙ.** Достоинство или точность наблюденій зависитъ отъ искусства наблюдателя и отъ вѣрности употребляемыхъ имъ инструментовъ. Всего желательнѣе, при дѣланіи наблюденій, чтобъ тѣлосложеніе наблюдателя и устроеніе инструмента не производили постоянныхъ погрѣшностей; но если отъ несовершенства инструмента будутъ происходить погрѣшности въ одну и ту же сторону какъ и отъ физическаго недостатка наблюдателя, то въ такомъ случаѣ нельзя уже положиться на сдѣланныя наблюденія. При одинаковой же вѣроятности погрѣшностей положительныхъ и отрицательныхъ, можно, числомъ наблюденій, вознаградить недостатокъ въ ихъ точности, и уменьшить погрѣшности до какой угодно степени.

Еслибы желали сравнить точность среднихъ выводовъ, полученныхъ изъ нѣсколькихъ рядовъ наблюденій, то надлежало бы поступить слѣдующимъ образомъ: пусть будутъ $a_1, a_2, a_3, \ldots a_m$ значенія какой нибудь величины, доставляемыя первымъ рядомъ наблюденій; $b_1, b_2, b_3, \ldots b_n$ значенія той же величины, выводимыя изъ втораго ряда наблюденій; и такъ далѣе. Предположивъ для краткости $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m = \Sigma a$, $a^2_1 + a^2_2 + a^2_3 + \ldots + a^2_m = \Sigma a^2$, $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n = \Sigma b$, $b^2_1 + b^2_2 + b^2_3 + \ldots + b^2_n = \Sigma b^2$, и проч. составляемъ функціи

$$\Sigma a^2 - \frac{(\Sigma a)^2}{m}$$

$$\Sigma b^2 - \frac{(\Sigma b)^2}{n}$$

$$\ldots\ldots$$

и смотримъ, которая изъ нихъ будетъ *наименьшая* изъ всѣхъ. Средняя, соотвѣтствующая ряду наблюденій, для котораго приведенная сей-часъ функція есть *наименьшая*, должна быть предпочтена всѣмъ другимъ.

BORÉAL. (Астр.) **СѢВЕРНЫЙ, ПОЛУНОЩНЫЙ.**

Pôle boréal, сѣверный полюсъ.

BORNE. (Земл.) **МЕЖА, ГРАНЬ.**

BOUGE. ВИЗИРЬШТАБЪ. Смотп. JAUGE.

BOUSSOLE, COMPAS DE MER. КОМПАСЪ, БУССОЛЬ. — У простолюдиновъ **МАТКА.** Стальная намагниченная игла или стрѣлка, надѣтая на мѣдное остріе, и свободно обращающаяся около него въ горизонтальномъ направленіи. Для предохраненія стрѣлки отъ движенія воздуха, заключаютъ ее обыкновенно въ круглую коробку (называемую у простолюдиновъ *маточникомъ*), дѣлаемую изъ дерева или мѣди. На днѣ коробки находится кругъ, коего центръ совпадаетъ съ основаніемъ острія, около котораго обращается стрѣлка. Кругъ обыкновенно раздѣленъ на 360 градусовъ; для употребленія же на морѣ, на 32 части, называемыя *румбами вѣтровъ (rumbs des vents)*. Указанія компаса были бы точны, еслибъ стрѣлка сохраняла, въ одномъ мѣстѣ, одно и то же направленіе. Къ сожалѣнію, на самомъ дѣлѣ этого не бываетъ, почему измѣненіе въ направленіи магнитной стрѣлки не можетъ служить, въ строгомъ смыслѣ, для опредѣленія положенія мѣста; и дѣйствительно, мы останемся въ неизвѣстности на счётъ того, произошло ли это измѣненіе отъ перемѣны мѣста, или отъ движенія магнитной стрѣлки, независимаго отъ перемѣны мѣста. Но такъ какъ перемѣны склоненія никогда не бываютъ слишкомъ значительны, по крайней мѣрѣ для промежутка времени довольно малаго, то несмотря на упомянутую неопредѣленность при наблюденіи компаса, онъ будетъ всегда неоцѣненнымъ пособіемъ для мореплавателей. — Во многихъ случаяхъ, компасъ съ пользою употребляется и при съёмкѣ плановъ.

Открытіе компасовъ относятъ обыкновенно къ концу XIII вѣка, и приписываютъ Неаполитанцу *Флавіо де Гіоіа, (Flavio de Gioia* или *Gioja)*. Впрочемъ не знаютъ положительнымъ образомъ, кто именно былъ изобрѣтателемъ этого инструмента; нѣкоторые думаютъ, что Французскіе мореплаватели уже знали употребленіе компаса въ XII столѣтіи.

Для дальнѣйшихъ подробностей о свойствахъ магнитной стрѣлки, отсылаемъ читателей къ статьѣ: MAGNÉTISME.

BR.

BRACHYSTOCHRONE или **LIGNE DE LA PLUS VITE DESCENTE.** (Мех.) **БРАХИСТОХРОНА, КРАТЧАЙШЕВРЕМЕННАЯ, КРИВАЯ НАИСКОРѢЙШАГО СКАТА.** Кривая линія по которой тѣло, побуждаемое одною силою тяжести, переходитъ изъ одной точки въ другую въ кратчайшее время.

Въ 1697 году, *Иванъ Бернулли*, бывшій тогда профессоромъ Математики въ Гронингенѣ, предложилъ геометрамъ, въ видѣ вызова, задачу о кривой наискорѣйшаго ската, названной имъ *Брахистохроническою*, отъ Греческихъ словъ: *βράχιστος, кратчайшій* и *χρόνος, время*. Задача состояла въ опредѣленіи линіи *ACB* (черт. 19, листъ II), имѣющей то свойство, что если изъ точки *A* будетъ опущено тѣло, то оно, двигаясь по вогнутости *ACB*, должно достигнуть точки *B* въ меньшій промежутокъ времени, какъ еслибъ, напримѣръ, переходило прямую *AEB*, или двигалось по какой либо другой кривой линіи *ADB*. *Лейбницъ* рѣшилъ задачу въ самый день полученія программы отъ Ивана Бернулли. Оба условились не открывать никому своихъ рѣшеній, и дать другимъ математикамъ цѣлый годъ времени для состязанія, о чемъ и было объявлено Иваномъ Бернулли почти во всѣхъ журналахъ. До истеченія назначеннаго срока, и почти въ одно время, были обнародованы три другія рѣшенія *брахистохронической задачи*. Авторы ихъ были: *Яковъ Бернулли*, профессоръ Математики въ Базелѣ (братъ Ивана Бернулли), *Маркизъ де Л'Опиталь* и *Ньютонъ*. Рѣшеніе послѣдняго было издано безъ имени сочинителя въ *Philosophical Transactions* Лондонскаго Королевскаго Общества; но Иванъ Бернулли отгадалъ тотчасъ автора по *львинымъ когтямъ (tanquam ex ungue leonem)*.

Всѣ эти рѣшенія привели къ тому заключенію, что *кривая наискорѣйшаго ската есть циклоида съ горизонтальнымъ основаніемъ AF, что она обращена выпуклостію внизъ, и имѣетъ началомъ своимъ точку A, изъ которой опускается тѣло.* Смот. CYCLOIDE. Если къ *брахистохронизму* циклоиды прибавимъ ея *тавтохронизмъ* (Смот. TAUTOCHRONISME) и еще многоразличныя геометрическія свойства, то должны будемъ поставить эту кривую на ряду съ самыми примѣчательными.

Можетъ быть нѣкоторые читатели, незнакомые съ соображеніями механическими, при первомъ воззрѣніи на задачу *Брахистохроны,* будутъ думать, что прямая линія AEB, какъ кратчайшій путь между двумя точками A и B, удовлетворяетъ вопросу. Безъ пособія математическаго анализа трудно доказать ошибочность такого заключенія. Однако же мы думаемъ, что нѣкоторыя, весьма простыя сужденія, могутъ, если не убѣдить читателя въ справедливости рѣшенія посредствомъ *циклоиды,* то, по крайней мѣрѣ, поселить въ его умѣ сомнѣніе на счетъ брахистохронизма *прямой линіи.* Дѣйствительно, замѣтимъ, что тѣло, опускаясь по дугѣ AC, приближающейся болѣе нежели AE къ вертикальной линіи AG, тѣмъ самымъ пріобрѣтаетъ въ меньшее время извѣстную скорость, почему перейденное тѣломъ пространство можетъ быть значительнѣе того, которое бы оно перешло, еслибъ двигалось по прямой AB. И такъ, прямая линія AE можетъ быть перейдена тѣломъ въ большій промежутокъ времени, нежели дуга AC; отсюда заключаемъ, что то же самое можетъ случиться и относительно цѣлой прямой AEB и дуги ACB. Слѣдовательно, нѣтъ никакой явной невозможности, чтобы тѣло, двигаясь по кривой ACB, достигло точки B въ меньшее время, какъ еслибъ оно было опущено по прямой линіи AEB.

Прежде Ивана Бернулли задача о *Скорѣйшевременной* была уже предметомъ, если не строгихъ геометрическихъ изслѣдованій, то по крайней мѣрѣ нѣкоторыхъ умственныхъ соображеній. *Галилей* думалъ, но ошибочно, что дуга круга удовлетворяетъ условію. Состояніе Геометріи въ то время не позволяло еще приступить къ рѣшенію такого рода вопросовъ. Нынѣ, задача Брахистохроны и другія ей подобныя, напримѣръ, задачи объ *изопериметрахъ* (См. ISOPÉRIMÈTRE), рѣшаются легкимъ, единообразнымъ способомъ, основаннымъ на Варіаціонномъ Исчисленіи.

Теперь приведемъ, въ немногихъ словахъ, аналитическое рѣшеніе Брахистохронической задачи. Для краткости мы допустимъ (что впрочемъ можетъ быть легко доказано), что *Брахистохрона* есть *плоская* кривая, заключающаяся въ вертикальной плоскости, проходящей чрезъ двѣ данныя точки A и B (черт. 19 листъ II. Примемъ линію AG за ось x, а AF за ось y, и сдѣлаемъ $AP = x$, $PM = y$. Положимъ, что тѣло, по истеченіи времени t, достигло положенія M; единственная сила дѣйствующая на него, будетъ сила тяжести, которую изобразимъ чрезъ g. Чтобы найти ускорительную силу, производящую движеніе, надобно разложить вертикальную силу g на двѣ другія, именно, на нормальную по направленію MN, которая не произведетъ никакого движенія, и на силу направленную по касательной MT къ кривой. Эта послѣдняя сила, производящая движеніе, выразится чрезъ $g \operatorname{Cos} \alpha$, разумѣя подъ α уголъ, составляемый касательною MT съ направленіемъ Mg, или, что всё равно, съ осью x. Но извѣстно что $\operatorname{Cos}\alpha = \frac{dx}{ds}$; слѣдовательно, ускорительная сила выразится чрезъ $g\frac{dx}{ds}$. Если изобразимъ дугу AM чрезъ s, то общее выраженіе ускорительной силы будетъ $\frac{d^2s}{dt^2}$ и такъ

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g\frac{dx}{ds},$$

откуда, умноживъ на $2ds$, и взявъ интегралъ

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2gx.$$

Мы не прибавляемъ постояннаго количества по той причинѣ, что отношеніе $\frac{ds}{dt}$, изображающее скорость тѣла, по предположенію равно нулю, когда $x = 0$. Изъ послѣдняго уравненія выводимъ

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int\frac{ds}{\sqrt{x}}.$$

Но извѣстно (Смот. ARC), что

$$ds = dx\sqrt{1+y'^2} \text{ гдѣ } y' = \frac{dy}{dx};$$

слѣдовательно

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{x}}.dx.$$

Чтобы получить *наименьшее значеніе* для t, слѣдуетъ, по правиламъ Исчисленія Варіацій, положить $\delta t = 0$, или, что все равно,

$$\delta\left[\frac{1}{\sqrt{2g}}\int\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{x}}.dx\right] = 0,$$

откуда выводимъ [Смот. VARIATIONS (CALCUL DES)]

$$d\left(\frac{d.\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{x}}}{dy'}\right) = 0 \text{ или } d\left(\frac{y'}{\sqrt{x}.\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0.$$

Интегрируя послѣднее уравненіе, находимъ

$$\frac{y'}{\sqrt{x}.\sqrt{1+y'^2}} = c,$$

откуда

$$y' = \frac{c\sqrt{x}}{\sqrt{1-c^2x}} = \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{c^2}x - x^2}}.$$

Написавъ $2a$ вмѣсто $\frac{1}{c^2}$, и замѣнивъ величину y', равною ей $\frac{dy}{dx}$, найдемъ дифференціальное уравненіе

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{2ax - x^2}},$$

принадлежащее *циклоидѣ*. Разборъ этого уравненія покажетъ, что опредѣляемая имъ циклоида имѣетъ дѣйствительно то положеніе, которое изображено на чертежѣ.

Заключимъ эту статью указаніемъ на одно приложеніе теоріи брахистохронической кривой: мы разумѣемъ *Русскія горы*. Изъ приведеннаго свойства циклоиды слѣдуетъ, что самый выгодный видъ, какой только можно дать скату горы, есть *циклоидальный*. Правда, въ строгомъ смыслѣ, по причинѣ сопротивленія воздуха, надлежало бы принять другую трансцендентную кривую линію, болѣе сложную, уравненіе которой было выведено Эйлеромъ; но такъ какъ сопротивленіе воздуха въ случаѣ искусственныхъ горъ имѣетъ малое вліяніе на видъ кривой, то можно будетъ, съ достаточною точностію, допустить циклоиду, какъ сказано было выше. Строители горъ, руководствуемые однимъ опытомъ, приведены были къ результату, согласному съ выводомъ вычисленія: дѣйствительно, мы видимъ, что форма ската горы не разнится чувствительнымъ образомъ отъ циклоидальной.

BRACHYSTOCHRONISME. (Мех.) **БРАХИСТОХРОНИЗМЪ, КРАТЧАЙШЕВРЕМЕННОСТЬ.** Свойство, по которому какая либо линія, бываетъ описываема движущимся тѣломъ въ самое короткое время. Смотр. выше.

BRANCHE. (Геом.) **ВѢТВЬ.** *Branche d'une courbe, вѣтвь кривой линіи.* Нѣкоторая часть кривой линіи, конечная или безконечная. Впрочемъ значеніе этого слова не совсѣмъ опредѣлено. Можно, кажется, назвать вѣтвью непрерывную часть кривой, отдѣльную отъ прочихъ ея частей. Въ этомъ смыслѣ *парабола* имѣетъ *одну вѣтвь*, а *гипербола*, *двѣ*. Иногда двѣ различныя вѣтви одной и той же кривой, могутъ пересѣкаться. Въ такомъ случаѣ точка пересѣченія называется *кратною*. См. COURBE, SINGULIERS (POINTS).

Branche infinie. Безконечная вѣтвь. Вѣтвь, простирающаяся въ безконечность. Гипербола имѣетъ *безконечныя вѣтви*.

Branches paraboliques. Параболическія вѣтви; такъ называются вѣтви, которыя могутъ имѣть ассимптотою параболу второй или высшей степени. Такъ напримѣръ кривая, опредѣляемая уравненіемъ $y = \frac{x^2}{a} + \frac{b^2}{x}$ имѣетъ *параболическую безконечную вѣтвь*, коей ассимптотою служитъ обыкновенная парабола, выражаемая уравненіемъ $y = \frac{x^2}{a}$.

Branches hyperboliques. Гиперболическія вѣтви; вѣтви, имѣющія своими ассимптотами или прямую линію, или гиперболу второй или высшей степени. Напримѣръ, кривая опредѣляемая уравненіемъ $y = \frac{x^3}{a^2} + \frac{b^3}{x^2}$, имѣетъ ассимптотою ось ординатъ, а также гиперболу третьей степени, коей уравненіе есть $y = \frac{b^3}{x^2}$. Смотр. ASYMPTOTE.

BRAS DU LEVIER. (Мех.) **ПЛЕЧО РЫЧАГА.** Смотр. LEVIER.

Bras du couple. Плечо пары. См. COUPLE.

BRICOLE. (Мех.) **ОТРАЖЕНІЕ; БРИКОЛЬ.** *Par bricole, чрезъ отраженіе.* Слово *bricole* употребляется почти исключительно въ билліардной игрѣ.

BRIGG (LOGARITHMES DE). БРИГГОВЫ ЛОГАРИѲМЫ. Обыкновенные логариѳмы, имѣющіе основаніемъ число 10. Смотр. LOGARITHME.

BRILLANT (POINT). (Теор. Тѣн.) **БЛЕСТЯЩАЯ ТОЧКА.** Когда выполированное тѣло освѣщено солнцемъ или другимъ свѣтящимся тѣломъ, то на первомъ усматриваемъ свѣтлыя изображенія, именуемыя *блестящими*. Но если вмѣсто свѣтящагося тѣла примемъ въ разсмотрѣніе свѣтящуюся точку, то на выполированной поверхности замѣчаемъ точки, отражающія свѣтъ въ глазъ зрителя: эти точки называются блестящими.

Для опредѣленія блестящей точки на поверхности какого ни есть тѣла, воображаемъ *эллипсоидъ вращенія* касательный къ данной поверхности, и имѣющій свои фокусы въ глазѣ зрителя и въ свѣтящейся точкѣ. Точка касанія предложенной поверхности и эллипсоида будетъ искомая *блестящая точка*, ибо нормаль эллипсоида въ этой точкѣ раздѣляетъ пополамъ уголъ, составляемый лучемъ паденія и лучемъ отраженія, и, сверхъ того, эта нормаль заключается въ плоскости обоихъ лучей. Когда лучи свѣта параллельны между собою, то вмѣсто касательнаго эллипсоида получимъ *параболоидъ вращенія*, коего ось параллельна лучамъ свѣта, и проходитъ чрезъ глазъ зрителя. Нормаль въ точкѣ касанія, какъ и прежде, будетъ раздѣлять пополамъ уголъ, заключающійся между направленіями падающаго и отраженнаго луча, и будетъ находиться въ плоскости сихъ двухъ лучей. См. CATOPTRIQUE, INCIDENCE (ANGLE D').

На этомъ основаніи, для построенія блестящей точки, поступаемъ слѣдующимъ образомъ:

1°. Въ предположеніи свѣтящейся точки. Глазъ зрителя и свѣтящуюся точку соединяемъ прямою, и изъ каждой точки сей послѣдней проводимъ нормали къ данной поверхности. Кривая, проходящая чрезъ точки встрѣчи сихъ нормалей съ поверхностію, будетъ геометрическимъ мѣстомъ блестящей точки. Далѣе, опредѣляемъ на каждой нормали такую точку M, чтобъ, соединивъ ее съ глазомъ O наблюдателя и съ блестящею точкою B, уголъ OMB дѣлился пополамъ тою же нормалью. Новая кривая, проходящая чрезъ всѣ точки, найденныя такимъ образомъ на нормаляхъ, будетъ также геометрическимъ мѣстомъ блестящей точки. Пересѣченіе двухъ кривыхъ опредѣлитъ *блестящую точку*.

2°. Въ предположеніи лучей свѣта, параллельныхъ между собою.

Чрезъ глазъ наблюдателя проводимъ прямую, параллельную лучамъ свѣта; потомъ, изъ всѣхъ точекъ этой прямой опускаемъ нормали на данную поверхность. Основанія нормалей на поверхности образуютъ кривую, которая будетъ геометрическимъ мѣстомъ блестящей точки. Далѣе, на каждой нормали ищемъ такую точку, чтобъ, соединивъ ее съ глазомъ зрителя, и проведя отъ нея прямую параллельную направленію лучей, уголъ, составляемый сими двумя прямыми, дѣлился пополамъ тою нормалью. Кривая, проходящая чрезъ всѣ точки, найденныя симъ способомъ на нормаляхъ, будетъ другимъ геометрическимъ мѣстомъ блестящей точки, а пересѣченіе двухъ кривыхъ очевидно опредѣлятъ искомую *блестящую точку*.

BRISÉE (LIGNE). (Геом.) **ЛОМАНАЯ ЛИНІЯ.** Когда нѣсколько прямыхъ линій, взятыхъ по-двѣ, встрѣчаются подъ угломъ различнымъ отъ двухъ прямыхъ, то совокупность ихъ называется *ломаною линіею*.

BRUIT. ШУМЪ. Смот. ACOUSTIQUE, SON.

BRULANTE (COURBE). Смот. CAUSTIQUE.

BRUSQUES (CHANGEMENTS — DE LA VITESSE). (Мех.) **ВНЕЗАПНЫЯ ПЕРЕМѢНЫ СКОРОСТИ.** Перемѣны почти мгновенныя въ скорости движущагося тѣла. Геометры прошедшаго столѣтія думали, что тѣло можетъ вдругъ измѣнить свою скорость, и они называли силы, способныя произвести такое дѣйствіе *мгновенными* или *побудительными* (*forces instantanées* или *impulsives*). Тѣ же геометры весьма тщательно отличали силы мгновенныя отъ силъ ускорительныхъ, и допускали, что первыя безконечно велики въ отношеніи къ послѣднимъ.

Геометры нашего времени другаго мнѣнія: они убѣждены въ невозможности мгновеннаго измѣненія скорости; никакая скорость не можетъ измѣниться въ другую чувствительно разнствующую отъ первой, не перейдя чрезъ всѣ промежуточныя степени. Такъ думалъ и Эйлеръ. — Можно сказать, что *внезапныя перемѣны* не иное что, какъ измѣненія скорости весьма быстрыя, но не мгновенныя. Такого рода перемѣны замѣчаемъ напримѣръ при ударѣ тѣлъ; онѣ происходятъ отъ дѣйствія силъ весьма значительныхъ, но не безконечныхъ. —

BU.

BURMANN (SÉRIE DE). (Анал.) **БЮРМАНОВЪ РЯДЪ.** Такъ называется рядъ, служащій для разложенія данной функціи $f(x)$ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ другой функціи $\varphi(x)$ той же перемѣнной x. Этотъ рядъ найденъ *Бюрманомъ* (*Burmann*), Профессоромъ въ Мангеймѣ, который, въ 1796 году, представилъ свое открытіе на разсмотрѣніе въ Французскій Институтъ. Вотъ въ чемъ состоитъ теорема Бюрмана:

Пусть будетъ X данная функція перемѣнной x, а u другая функція той же перемѣнной; ищемъ разложеніе X по цѣлымъ положительнымъ степенямъ функціи u.

Такъ какъ X можно принимать за функцію количества u, то, по Маклореновой теоремѣ, получимъ

$$X = U_0 + U_1 u + U_2 \cdot \frac{u^2}{1\cdot 2} + U_3 \cdot \frac{u^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots\dots + U_n \cdot \frac{u^n}{1\cdot 2\cdot 3 \dots n} + \text{и проч.}$$

гдѣ $U_0, U_1, U_2, \dots\dots$ изображаютъ значенія X, $\frac{dX}{du}, \frac{d^2X}{du^2}, \dots$ для $u = 0$; и вообще U_n найдется по формулѣ

$$U_n = \frac{d^n X}{du^n},$$

въ которой, послѣ всѣхъ дифференцированій, должно положить $u = 0$.

Преобразованіе, предложенное Бюрманомъ, состоитъ въ томъ, что

$$(1) \qquad \frac{d^n X}{du^n} = \frac{d^{n-1}\left[\frac{dX}{dz}\left(\frac{z}{u}\right)^n\right]}{dz^{n-1}},$$

разумѣя подъ z и u двѣ функціи перемѣнной x, уничтожающіяся въ одно время, но отношеніе которыхъ остается конечнымъ. Сверхъ того, по совершеніи дифференцированій, означенныхъ во второй части послѣдняго уравненія, должно сдѣлать $z = 0$. И такъ, рядъ Бюрмана будетъ слѣдующій:

$$(2) \qquad X = X_0 + \left[\frac{dX}{dz}\left(\frac{z}{u}\right)\right]\frac{u}{1} + \frac{d\left[\frac{dX}{dz}\left(\frac{z}{u}\right)^2\right]}{dz}\cdot\frac{u^2}{1\cdot 2} + \frac{d^2\left[\frac{dX}{dz}\left(\frac{z}{u}\right)^3\right]}{dz^2}\cdot\frac{u^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots\dots\dots + \frac{d^{n-1}\left[\frac{dX}{dz}\left(\frac{z}{u}\right)^n\right]}{dz^{n-1}}\cdot\frac{u^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} + \text{и пр.}$$

гдѣ X_0 означаетъ значеніе X для $z = 0$; ясно, что и во всѣхъ коэффиціентахъ передъ различными степенями u должно будетъ, послѣ дифференцированій сдѣлать $z = 0$.

Изъ формулы (2) очень легко вывести извѣстный рядъ *Лагранжа;* для этого положимъ

$$z = x - a,\ u = \frac{x-a}{\varphi(x)},\ dz = dx,$$

откуда

$$x = a + u\varphi(x),$$

и слѣдовательно, полагая $X = \psi(x)$ и $z = 0$, найдется рядъ Лагранжевъ

$$\psi(x) = \psi(a) + \varphi(a)\psi'(a)\cdot\frac{u}{1} + \frac{d\left[\psi'(a)\varphi(a)^2\right]}{da}\cdot\frac{u^2}{1\cdot 2} + \frac{d^2\left[\psi'(a)\varphi(a)^3\right]}{da^2}\cdot\frac{u^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{и проч.}$$

Сдѣлаемъ другое приложеніе формулы (2). Положимъ, что желаемъ разложить функцію a^x по цѣлымъ положительнымъ степенямъ произведенія xb^x. Найдется $X = a^x$, $u = x.b^x$, и слѣдовательно можно принять $z = x$; и такъ

$$a^x = 1 + \log a.\frac{xb^x}{1} + \log a(\log a - 2\log b)\cdot\frac{x^2b^{2x}}{1\cdot 2} + \log a(\log a - 3\log b)^2\cdot\frac{x^3b^{3x}}{1\cdot 2\cdot 3} + \log a(\log a - 4\log b)^3\cdot\frac{x^4b^{4x}}{1.2\cdot 3\cdot 4} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

гдѣ $log.$ означаетъ *Неперовы* логариѳмы.

Доказательство формулы (1) читатели найдутъ въ книгахъ: *Legendre*: *Exercices du Calcul Intégral,* Том. II стр. 230; *Lacroix*: *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral,* 2-ое изд. Томъ III стр. 623; *Supplemente zu Klügels Wörterbuche der reinen Mathematik,* 1833. Томъ 1 стр. 341.

C.

CABESTAN или **VINDAS.** (Мех.) **ШПИЛЬ, ВЕРТИКАЛЬНЫЙ ВОРОТЪ.** Деревянная, желѣзомъ окованная машина, состоящая изъ вертикальнаго вала (или усѣченнаго конуса), которому сообщается вращательное движеніе посредствомъ продѣтыхъ сквозь него горизонтальныхъ шестовъ. При такомъ движеніи канатъ, прикрѣпленный къ валу, навивается на него, а грузъ, привязанный къ другому концу каната, поднимается, или подвигается впередъ. *Шпиль* преимущественно употребляютъ на корабляхъ для подниманія якорей. — Что касается до условій равновѣсія на этой машинѣ, то отсылаемъ читателей къ статьѣ: TREUIL.

CADRAN SOLAIRE. (Гном.) **КВАДРАНЪ, СОЛНЕЧНЫЕ ЧАСЫ.** Снарядъ, помощію котораго, при солнечномъ свѣтѣ, узнается часъ дня; или, иначе, поверхность, на которой утвержденъ металлическій прутъ (чаще всего параллельный земной оси), отъ котораго тѣнь, совпадая постепенно съ начерченными на той же поверхности линіями (называемыми *часовыми*), показываетъ солнечное время. Въ статьѣ: GNOMONIQUE, читатели найдутъ правила для построенія нѣкоторыхъ квадрановъ.

Cadran équinoxial. Равноденственный или экваторіальный квадранъ. Квадранъ, коего плоскость параллельна плоскости экватора.

Cadran équinoxial portatif или **anneau astronomique.** Астрономическое кольцо. Квадранъ, въ родѣ экваторіальнаго, который можетъ быть употребляемъ во всякомъ мѣстѣ.

Cadran sphérique. Сферическій квадранъ. Квадранъ, коего поверхность есть сферическая.

Cadran horizontal. Горизонтальный квадранъ. Такъ называются солнечные часы, коихъ плоскость горизонтальна.

Cadran méridional. Полуденный квадранъ. Квадранъ вертикальный, коего плоскость перпендикулярна къ земной оси, и обращена къ югу.

Cadran septentrional. Полуночный квадранъ. Квадранъ вертикальный, обращенный прямо къ сѣверу.

Cadran oriental. Восточный квадранъ. Квадранъ вертикальный, коего плоскость обращена прямо къ востоку.

Cadran occidental. Западный квадранъ. Квадранъ вертикальный, обращенный прямо къ западу.

Cadran polaire. Полярный квадранъ. Квадранъ, коего плоскость составляетъ съ горизонтомъ уголъ, равный высотѣ полюса. Если квадранъ обращенъ къ *зениту*, то называется *верхнимъ полярнымъ (cadran polaire supérieur)*; если же къ *надиру*, то именуется *нижнимъ полярнымъ (cadran polaire inférieur)*.

Cadran vertical déclinant. Вертикальный склоняющійся квадранъ. Квадранъ, начерченный на вертикальной плоскости, напримѣръ на стѣнѣ, имѣющей какой угодно азимутъ.

Cadran sans centre. Безцентренный квадранъ. Когда плоскость вертикальнаго квадрана имѣетъ значительное склоненіе къ востоку или западу, то центръ квадрана такъ удаленъ, что не можетъ быть назначенъ на его плоскости. Такого рода квадранъ называется *безцентреннымъ*.

Cadran incliné et déclinant. Наклонный склоняющійся квадранъ, коего плоскость имѣетъ произвольныя, какъ наклоненіе, такъ и склоненіе.

Cadran sans style par la hauteur du soleil. Квадранъ безъ указателя, показывающій время посредствомъ высоты солнца.

Cadran universel par les hauteurs du soleil, или **le capucin.** Всеобщій квадранъ, показывающій время посредствомъ высоты солнца.

Cadran analématique или **azimutal.** Аналемматической квадранъ. Горизонтальный квадранъ съ вертикальнымъ указателемъ, отъ котораго тѣнь, совпадая съ различными точками эллипса, на плоскости квадрана начерченнаго, показываетъ часъ дня.

Cadran cylindrique par les hauteurs. Цилиндрическій квадранъ, показывающій время посредствомъ высоты солнца.

Cadran aux étoiles. Звѣздный квадранъ или Мюнстерскій нощникъ *(nocturnal de Munster)*. Квадранъ, показывающій время, помощію наблюденія звѣздъ.

Cadran de la lune или **Cadran lunaire.** Лунный квадранъ. Квадранъ, показывающій время при лунномъ свѣтѣ.

CALCUL. (Мат.) **ИСЧИСЛЕНІЕ, ВЫЧИСЛЕНІЕ, ВЫКЛАДКА.** Совокупность различныхъ дѣйствій, производимыхъ надъ величинами, которыя изображены или буквами, или числами. Въ первомъ случаѣ употребляютъ преимущественно слово: *вычисленіе*, а во второмъ — *выкладка. Calculs algébriques, алгебрическія вычисленія; calculs arithmétiques, ариѳметическія выкладки.*

Подъ *исчисленіемъ* разумѣютъ также какую нибудь отдѣльную часть Математики. Въ такомъ случаѣ прибавляютъ къ этому слову прилагательное; напримѣръ, говорятъ: *Дифференціальное, Интегральное исчисленіе, исчисленіе Вѣроятностей* и проч. Смот. DIFFÉRENTIEL, INTÉGRAL, PROBABILITÉS, и проч.

Calculs astronomiques. Астрономическія вычисленія, выкладки. Совокупность правилъ и способовъ, употребляемыхъ при опредѣленіи движенія планетъ и другихъ небесныхъ свѣтилъ. — Преимущественно же разумѣютъ подъ *астрономическими вычисленіями* опредѣленіе затмѣній, закрытія звѣздъ луною, прохожденіе планетъ чрезъ кругъ солнца, и проч. При подобныхъ выкладкахъ руководствуются логариѳмическими и другими таблицами, правилами сферической Тригонометріи и проч. Замѣтимъ еще, что Астрономы безпрестанно употребляютъ дроби *шестидесятичныя* [См. SEXAGÉSIMALES (FRACTIONS)], что весьма естественно по причинѣ принятаго раздѣленія окружности на 360 градусовъ, градуса на 60 минутъ, минуты на 60 секундъ и т. д.

CALCULATEUR. ВЫКЛАДЧИКЪ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬ, СЧЁТЧИКЪ. Занимающійся вычисленіями, преимущественно ариѳметическими. *Calculateur habile, искусный выкладчикъ.*

CALCULER. ВЫЧИСЛЯТЬ, ПРОИЗВОДИТЬ ВЫКЛАДКИ; примѣнять правила Анализа и Ариѳметики къ опредѣленію какой нибудь величины, или, что все равно, приводить формулу въ числа.

CALENDES. (Хрон.) **КАЛЕНДЫ.** *Jour des calendes, день календъ*; такъ назывался у Римлянъ первый день каждаго мѣсяца. *День нонъ (jour des nones)* падалъ на 5-ое и на 7-ое число мѣсяца, а *день идъ (jour des ides)* на 13 и 15-ое число. Когда день нонъ приходился 5-го числа, тогда иды были 13-го, а когда 7-го, то иды падали на 15-е число.

CALENDRIER. КАЛЕНДАРЬ, МѢСЯЦОСЛОВЪ. Таблица или книга, показывающая, на одинъ или на нѣсколько годовъ, порядокъ дней, недѣль, мѣсяцевъ, праздниковъ, и проч. Смот. TEMPS, ANNÉE, MOIS, DOMINICALE (LETTRE) и проч.

Calendrier perpétuel. Неисходимый, непремѣнный календарь. Calendrier rustique или populaire. Общенародный Календарь.

Calendrier Romain или Julien. Юліанскій Календарь. Календарь, введенный въ употребленіе при Юліѣ Цезарѣ. По Юліанскому Календарю, годъ полагаютъ въ 365 дней и 6 часовъ, а для избѣжанія подраздѣленія дня, считаютъ три года сряду въ 365 дней, а четвертый, именуемый *високоснымъ (bissexto)*, въ 366 дней. Юліанскій Календарь по нынѣ въ употребленіи въ Россіи.

Calendrier Gregorien. Григоріанскій Календарь. Такъ называется Юліанскій Календарь, исправленный въ Римѣ, въ 1582 году, при Папѣ Григоріи XIII. Основаніемъ Юліанскаго Календаря было предположеніе, что тропическій годъ состоитъ изъ 365 дней 6 часовъ; но такъ какъ онъ нѣсколько менѣе (троп. годъ = 365 д. 5 ч. 41′ 51″), то для избѣжанія постепенно увеличивающейся разности между началомъ тропическаго года и гражданскаго, Папа Григорій XIII приказалъ пропускать *вѣковые високосные*, за исключеніемъ одного чрезъ каждыя четыре столѣтія. И такъ, 1700, 1800, 1900 годы, которые по Юліанскому Календарю, надлежало считать *високосными*, по Григоріанскому принимаются за простые. 2000 же годъ, по обоимъ Календарямъ, *високосный*. Такимъ образомъ въ продолженіи 400 лѣтъ включаютъ, вмѣсто 100, только 97 прибавочныхъ дней.

Григоріанскій Календарь съ самаго 1582 года былъ введенъ во всѣхъ Католическихъ государствахъ; но Протестантскія приняли его только въ 1751 и 1752 годахъ. Россія и другія земли Греческаго исповѣданія сохранили Юліанскій годъ, который нынѣ начинается 12 днями позже Григоріанскаго. Съ 1900 года эта разность увеличится еще однимъ днемъ. Для избѣжанія всякаго недоразумѣнія при письменныхъ сношеніяхъ съ иностранцами, выставляютъ числа *по старому* и *по новому стилю.* Напримѣръ, пишутъ $\frac{5}{17}$ марта, что означаетъ 5-ое число марта мѣсяца по Юліанскому Календарю, а 17-е по Григоріанскому. Мы не будемъ говорить о Календаряхъ разныхъ народовъ; читатели, желающіе ознакомиться съ этимъ предметомъ, найдутъ любопытныя свѣдѣнія въ *Encyclopédie Methodique, Mathématiques*, статья: Calendrier, гдѣ помѣщено описаніе Римскаго Календаря со всѣми возможными подробностями. Также отсылаемъ къ особому трактату, подъ заглавіемъ: *Calendariographie*, соч. Литтрова и къ его theoretische und practische Astronomie 1821 г. въ 3 частяхъ. Но такъ, какъ въ книгахъ, на которыя мы ссылаемся, *непремѣнный календарь Греко-Россійской церкви* не объясненъ съ надлежащими подробностями, то помѣщаемъ здѣсь правила, относящіяся къ нему.

Элементы Греко-Россійскаго Церковнаго счисленія суть: 1) *Кругъ солнцу;* 2) *Кругъ лунѣ;* 3) *Индиктъ;* 4) *Въ руцѣ лѣто;* 5) *Основаніе*; 6) *Эпакта;* 7) *Ключъ границъ.* Для опредѣленія сихъ элементовъ приведемъ весьма простыя формулы; изобразимъ чрезъ *i данный годъ*, и условимся употреблять буквы Греческаго алфавита для такихъ количествъ, которыя могутъ обратиться въ нуль, а Латинскія буквы для величинъ никогда не уничтожающихся. На семъ основаніи, по данному *i*, вычислимъ послѣдовательно количества $\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots a, b, c \ldots\ldots$ посредствомъ одиннадцати уравненій

$$\frac{i-8}{28}=\alpha+\frac{a}{28},\quad \frac{i-2}{19}=\beta+\frac{b}{19},\quad \frac{i+3}{15}=\gamma+\frac{c}{15},$$
$$\frac{a}{4}=\delta+\frac{\varepsilon}{4},\quad \frac{a+\delta}{7}=\zeta+\frac{d}{7},\quad \frac{b+3}{20}=\eta+\frac{\vartheta}{20},$$
$$\frac{11(\eta+\vartheta)}{30}=\lambda+\frac{e}{30},\quad \frac{51-e}{30}=\mu+\frac{f}{30},\quad \frac{f+5}{30}=\nu+\frac{\pi}{30},$$
$$\frac{d+\pi}{7}=\xi+\frac{\rho}{7},\quad \frac{11-\rho}{7}=\sigma+\frac{g}{7}\text{*)},$$

въ которыхъ всѣ буквы изображаютъ цѣлыя положительныя числа. Буквы α, β, γ, δ, ζ, η, λ, μ ν, ξ и σ суть частныя, а a, b, c, ε, d, ϑ, e, f, π, ρ и g остатки получаемые чрезъ дѣленіе $i-8$ на 28, $i-2$ на 19, $i+3$ на 15 и такъ далѣе. Повторяемъ, что ни одинъ изъ остатковъ, означенныхъ Латинскими буквами, не можетъ равняться нулю; когда найдемъ для него нуль, то должно будетъ принять самый дѣлитель за остатокъ. Напримѣръ, если бы искали a для 1856-го года, то нашли бы, что $i-8=1848$; но 1848 дѣлится на-цѣло на 28, слѣдовательно $a=28$. И вообще легко замѣтить, что $a=28$ только для високоснаго года, коего число, по раздѣленіи на 4, даетъ частное вида $7\alpha+2$. Это слѣдуетъ изъ уравненія $\frac{i-8}{28}=\alpha+\frac{a}{28}$, которому можно дать видъ $\frac{i}{4}=7\alpha+2$. Что касается до частныхъ и до остатковъ изображенныхъ Греческими буквами, то они, какъ уже сказано выше, могутъ обратиться и въ нуль.

Когда, по приведеннымъ формуламъ, найдемъ величины a, b, c, d, e, f, g, π, и положимъ для краткости $\pi+g=h$, то упомянутые семь элементовъ будутъ:

1) *Кругъ солнцу* $=a$
2) *Кругъ лунѣ* $=b$
3) *Индиктъ* $=c$
4) *Въ руцѣ лѣто* $=d$
5) *Основаніе* $=e$
6) *Эпакта* $=f$
7) *Ключъ границъ* $=h$.

По симъ элементамъ Календарь Греко-Россійской церкви составляется слѣдующимъ образомъ:

Мясоястіе продолжается: въ простомъ годѣ $(31+h)$ дней; въ високосномъ г. $(32+h)$ дней.

Тріодъ начинается: въ простомъ годѣ (10 Янв. $+h$) дней. въ високосномъ годѣ (11 Янв. $+h$) дней;

Мясопустъ въ простомъ годѣ (24 Янв. $+h$) дней; въ високосномъ г. (25 Янв. $+h$) дней.

Сыропустъ въ простомъ годѣ h Февр. въ високосномъ годѣ $(h+1)$ Февр.

Евдокіи $(36-h)$ дней.

40 *Мучен*: $(44-h)$ дней.

Алексія $(52-h)$ дней.

Благовѣщеніе: $(60-h)$ дней.

Пасха Христова: (21 Марта $+h$) дней.

Преполовеніе: (14 Апр. $+h$) дней.

Вознесеніе: (29 Апр. $+h$) дней.

Пятьдесятница: (9 Мая $+h$) дней.

Петровъ мясопустъ: (16 Мая $+h$) дней.

Петрова Поста: $(43-h)$ дней.

Георгія: $(36-h)$ дней.

Іоанна Богослова: $(51-h)$ дней.

Недѣльный день, въ который придетъ день Рождества Христова: (*Вторникъ* $+d$).

Недѣльный день, въ который придетъ день Св. Апостолъ Петра и Павла: (*Пятница* $+d$).

Объяснимъ теперь эти правила примѣромъ. Положимъ что желаемъ составить Календарь для 1839-го года. Будетъ $i=1839$; слѣдовательно:

$\alpha=65$, $a=11$; $\beta=96$, $b=13$; $\gamma=122$, $c=12$;
$\delta=2$, $\varepsilon=3$; $\zeta=1$, $d=6$; $\eta=0$, $\vartheta=16$;
$\lambda=5$, $e=26$; $\mu=0$, $f=25$; $\nu=1$, $\pi=0$;
$\xi=0$, $\rho=6$; $\sigma=0$, $g=5$.

И такъ, для 1839-го года найдется:

Кругъ солнцу $=11$.
Кругъ лунѣ $=13$.
Индиктъ $=12$.
Въ руцѣ лѣто $=6$.
Основаніе $=26$.
Эпакта $=25$.
Ключъ границъ $=5$.
Мясоястіе продолжается $31+5=36$ дней.
Тріодъ начинается 10 Янв. $+5$ т. е. 15 Янв.
Мясопустъ 24 Января $+5$, т. е. 29 Января.
Сыропустъ 5 Февраля.
Евдокіи $36-5=31$ день.
40 *Мучен.* $44-5=39$ дней.
Алексія $52-5=47$ дней.
Благовѣщеніе $60-5=55$ дней.
Пасха Христова 21 Марта $+5=26$-го Марта.
Преполовеніе 14 Апрѣля $+5=19$-го Апрѣля.
Вознесеніе 29 Апр. $+5=34=4$-го Мая.
Пятьдесятница 9 Мая $+5=14$ Мая.

*) Мы заимствовали эти формулы изъ Записки Академика Шуберта, напечатанной въ 1824 году.

Петровъ Мясопустъ 16 Мая + 5 = 21 Мая.
Петрова поста 43 — 5 = 38 дней.
Георгіа 36 — 5 = 31 день.
Іоанна Богослова 51 — 5 = 46 дней.
Недѣльный день Рождества Христова вторникъ + 6, то есть понедѣльникъ.
Недѣльный день Св. Апостолъ Петра и Павла пятница + 6, то есть четвергъ.

Замѣтимъ, что если по прибавленіи ключа границъ h къ числу мѣсяца, найдемъ число превосходящее число дней того мѣсяца, то слѣдуетъ вступить въ слѣдующій мѣсяцъ. Такъ напримѣръ, для 1839 года мы нашли, что *Вознесеніе* должно быть 29 Апрѣля + 5 = 34; но такъ какъ въ Апрѣлѣ мѣсяцѣ 30 дней, то отъ числа 34 останется 4, которое уже должно считать 4-мъ числомъ Мая. — Подобное замѣчаніе имѣетъ мѣсто и въ разсужденіи недѣльныхъ дней. И такъ въ предыдущемъ примѣрѣ мы нашли, что недѣльный день *Св. Апостолъ Петра и Павла* приходится въ пятницу + 6, или въ четвергъ; и дѣйствительно, считая отъ пятницы по порядку: суббота, воскресенье и проч., находимъ шестой день *четвергъ*. Элементы нашего церковнаго счисленія, какъ то: *кругъ солнцу, кругъ лунѣ* и проч. означаются въ мѣсяцословахъ Славянскими цифрами, а *ключъ границъ* обозначается 35 буквами Славянскаго алфавита.

Замѣтимъ еще, что число дней, опредѣляемое предыдущими формулами для праздниковъ *Св. Евдокіи, 40 Мучениковъ* и проч. означаютъ посредствомъ недѣли и дня слѣдующимъ образомъ:

Для праздниковъ Св. Евдокіи, 40 Мучениковъ, Алексія и Благовѣщенія.

Число.	День и недѣля.
1 до 6	☾ до ♄ сырныя недѣли.
7	☉ сыропустъ.
8 — 14	☾ до ☉ 1 недѣля поста.
15 — 21	☾ до ☉ 2 — —
22 — 28	☾ до ☉ 3 — —
29 — 35	☾ до ☉ 4 — —
36 — 42	☾ до ☉ 5 — —
43 — 48	☾ до ♄ 6 — —
49	☉ Ваіи.
50 — 55	☾ до ♄ Великой или Страстн. недѣли.
56	День Пасхи, или въ недѣлю Пасхи.
57, 58, 59	☾ ♂ ☿ Свѣтлыя недѣли.

Для праздниковъ Св. Георгіа и Іоанна Богослова.

Число.	День и недѣля.
1 2	♀ ♄ Великія.
3	День Пасхи, или въ недѣлю Пасхи.
4 до 9	☾ до ♄ Свѣтлыя недѣли.
10 — 16	☉ до ♄ 2 недѣли по Пасхѣ.
17 — 23	☉ до ♄ 3 — — —
24 — 30	☉ до ♄ 4 — — —
31 — 37	☉ до ♄ 5 — — —
38 — 44	☉ до ♄ 6 — — —
45 — 50	☉ до ♀ 7 — — —

Въ сихъ таблицахъ употреблены извѣстныя знаки недѣльныхъ дней, именно: ☉, *воскресенье*; ☾ *понедѣльникъ*; ♂, *вторникъ*; ☿, *среда*; ♃, *четвергъ*; ♀, *пятница*; ♄, *суббота*.

Въ заключеніе приводимъ, для образца, таблицу семи элементовъ нашего Календаря отъ 1837 до 1860 года. Годы, отмѣченные звѣздочкою, означаютъ *високосные*.

Лѣто.	Кругъ солнцу.	Кругъ лунѣ.	Индиктъ.	Основаніе.	Эпакта.	Въ руцѣ лѣто.	Ключъ границъ
1837	9	11	10	4	17	4 Д	28 Щ
1838	10	12	11	15	6	5 Є	13 Л
1839	11	13	12	26	25	6 Ѕ	5 Д
1840*	12	14	13	7	14	1 А	24 Ѿ
1841	13	15	14	18	3	2 Б	9 З
1842	14	16	15	29	22	3 Г	29 Ћ
1843	15	17	1	11	10	4 Д	21 Ѵ
1844*	16	18	2	22	29	6 Ѕ	5 Д
1845	17	19	3	3	18	7 З	25 Ц
1846	18	1	4	14	7	1 А	17 П
1847	19	2	5	25	26	2 Б	2 Б
1848*	20	3	6	6	15	4 Д	21 Ѵ
1849	21	4	7	17	4	5 Є	13 Л
1850	22	5	8	28	23	6 Ѕ	33 Ю
1851	23	6	9	9	12	7 З	18 Р
1852*	24	7	10	20	1	2 Б	9 З
1853	25	8	11	1	20	3 Г	29 Ћ
1854	26	9	12	12	9	4 Д	21 Ѵ
1855	27	10	13	23	28	5 Є	6 Є
1856*	18	11	14	4	17	7 З	25 Ц
1857	1	12	15	15	6	1 А	17 П
1858	2	13	1	26	25	2 Б	2 Б
1859	3	14	2	7	14	3 Г	22 Ф
1860*	4	15	3	18	3	5 Є	13 Л

CALORIMÈTRE. (Физ.) **КАЛОРИМЕТРЪ, ТЕПЛОМѢРЪ.** Снарядъ, употребляемый для опредѣленія *удѣльнаго* тепла тѣлъ. Смот. CAPACITÉ SPÉCIFIQUE POUR LA CHALEUR.

CALORIQUE. (Физ.) **ТЕПЛОРОДЪ, ТЕПЛОТВОРЪ.** Смот. CHALEUR.

CALOTTE SPHÉRIQUE. (Геом.) **СФЕРИЧЕСКАЯ, ШАРОВАЯ ЧАШКА.** Ме́ньшая часть шаровой поверхности, разсѣченной плоскостію. Часть радіуса шара, заключающаяся между плоскостію и сферическою поверхностію, называется *высотою чашки*; легко видѣть, что поверхность сферической чашки равна *окружности большаго круга шара, помноженной на сію высоту.*

CAMME. (Мех.) **КУЛАКЪ.** *Кулаками* называются зубцы цилиндрическаго колеса, имѣющіе различные виды, смотря по цѣли, съ какою ихъ употребляютъ. Бо́льшею частію такія колеса употребляются на толчейныхъ мельницахъ.

CANALE (SURFACE). (Геом.) **ЖОЛОБОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ.** Такъ называется поверхность, образуемая шаромъ, имѣющимъ постоянный радіусъ, и коего центръ движется по какой ни есть плоской кривой, принимаемой за направляющую. Очевидно, что всѣ сѣченія жолобовой поверхности плоскостями перпендикулярными къ сей направляющей, будутъ *круги*, имѣющіе радіусы одинаковые съ радіусомъ производящаго шара.

Чтобы вывести уравненіе *жолобовыхъ поверхностей*, примемъ плоскость направляющей кривой за координатную плоскость xy. Плоскости xz и yz будутъ перпендикулярны къ сей послѣдней. Изобразимъ чрезъ r постоянный радіусъ шара. Изъ образованія разсматриваемой нами поверхности слѣдуетъ, что ея касательная плоскость будетъ вмѣстѣ касательною плоскостію и къ шаровой поверхности, почему нормальная линія, падая въ центръ шара, встрѣтитъ плоскость xy на разстояніи r отъ точки (x, y, z) жолобовой поверхности. И такъ косинусъ угла, составляемаго направленіемъ нормальной съ осью z, опредѣлится отношеніемъ $\frac{z}{r}$. Но, извѣстно, что для всякой поверхности этотъ косинусъ выражается чрезъ $\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}$; слѣдовательно получимъ $\frac{z}{r}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}$, или $\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}\right)z^2=r^2$. Вотъ уравненіе въ частныхъ диффеpенціалахъ для *жолобовыхъ поверхностей.* Смот. ENVELOPPE, SURFACE, и проч.

CANCER или **ÉCREVISSE.** (Астр.) **РАКЪ.** Четвертый знакъ зодіака. Смот. ZODIAQUE. *Tropique du cancer, тропикъ рака.*

CANEVAS D'UNE CARTE, RÉSEAU TRIGONOMÉTRIQUE. (Геод.) **ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ СѢТЬ.** Совокупность треугольниковъ, которыми покрываютъ страну при составленіи ея карты. Смот. TRIANGULATION, GÉODÉSIE.

CANON. Стар. сл. (Геом. и Алг.) **СПОСОБЪ, ФОРМУЛА.** Общее правило, посредствомъ котораго рѣшаютъ всѣ задачи, относящіяся къ извѣстному роду. Смот. FORMULE.

CANON NATUREL DES TRIANGLES. Таблица синусовъ, тангенсовъ и секансовъ, преимущественно служащая для рѣшенія треугольниковъ.

CANON ARTIFICIEL DES TRIANGLES. Таблица логариѳмовъ синусовъ, тангенсовъ и секансовъ.

CANONOTECHNIE. КАНОНОТЕХНІЯ. Способъ для составленія какихъ либо таблицъ посредвомъ разностей.

CAPABLE. (Геом.) **ВМѢЩАЮЩІЙ.** Это слово употребляется только въ слѣдующемъ реченіи: *segment de cercle capable d'un certain angle; круговой сегментъ, вмѣщающій извѣстный уголъ.* Такъ называется сегментъ, внутри котораго можно составить уголъ, имѣющій свою вершину при этомъ сегментѣ, и опирающійся на его крайнія точки. Напримѣръ, на черт. 5 (листъ III), сегментъ *ACB вмѣщаетъ* уголъ *ACB.*

CAPACITÉ, CAPACITÉ CUBIQUE. (Геом.) **ВМѢСТИТЕЛЬНОСТЬ, ЁМКОСТЬ, ОБЪЁМЪ.** Кубическое содержаніе какого ни есть тѣла, и преимущественно сосуда. Смот. VOLUME.

CAPACITÉ SPÉCIFIQUE POUR LA CHALEUR. НАГРѢВАЕМОСТЬ, УДѢЛЬНОЕ ТЕПЛО, ТЕПЛОЁМКОСТЬ. *Нагрѣваемостію* какого либо вещества называется количество теплоты, потребное для увеличенія однимъ градусомъ (по

Цельсіеву термометру) температуры единичнаго объёма того вещества. Нагрѣваемость, какъ доказано весьма точными опытами, не зависитъ отъ температуры, по крайней мѣрѣ между предѣлами довольно отдаленными термометрической шкалы. Такъ, напримѣръ, для повышенія до 1 градуса температуры куска желѣза при 0 градусовъ, надобно будетъ употребить то самое количество теплоты, которое могло бы тому же куску, нагрѣтому до 100 градусовъ, сообщить температуру въ 101 градусъ. Для различныхъ же веществъ удѣльное тепло бываетъ различное. Для опредѣленія теплоёмкости, физики придумали разные снаряды: наиболѣе употребительный изобрѣтенъ *Лапласомъ* и *Лавуазье*. Этотъ снарядъ, называемый *калориметромъ (calorimètre)* состоитъ изъ трехъ концентрическихъ коробокъ, вкладываемыхъ одна въ другую, и образующихъ такимъ образомъ три пустыя пространства $AA'A''A'''$, $BB'B''$, C (черт. 1 Листъ IV.); меньшая коробка дѣлается изъ проволочной сѣтки, а двѣ другія, изъ жести. Средняя коробка оканчивается въ нижней части трубкою, къ которой придѣланъ кранъ R; наружная коробка также снабжена трубкою и краномъ K, но съ боку. Сверхъ того, въ средней пустотѣ $BB'B''$, помѣщается внизу металлическая сѣточка DE. — Чтобы придать болѣе прочности всему снаряду, коробки скрѣпляются между собою посредствомъ брусочковъ c, c', c'', c'''. —

Для опредѣленія удѣльнаго тепла какого либо тѣла, наполняютъ сперва толченымъ льдомъ или снѣгомъ промежутки $AA'A''A'''$ и $BB'B''$, а также и крышки a и b, принадлежащія къ двумъ внутреннимъ коробкамъ; потомъ нагрѣваютъ до извѣстной температуры, напримѣръ до 100°, опредѣленный объёмъ даннаго тѣла M, и тотчасъ кладутъ это тѣло въ сѣточную коробку, которую закрываютъ крышкою a, а среднюю коробку, крышкою b. Въ такомъ состояніи оставляютъ снарядъ отъ 15 до 20 часовъ, и этого времени очень достаточно для того, чтобы температура тѣла M понизилась до 0°, и чтобы вся вода, происшедшая отъ растаявшаго льда въ пространствѣ $BB'B''$, собралась въ пустотѣ H, подъ сѣткою DE; эта сѣтка дѣлается съ тою цѣлію, чтобы мелкіе кусочки льда не могли проходить въ пустоту H.

При охлажденіи тѣла M, снѣгъ или толченый ледъ, находящійся между сѣточною и среднею коробками, будетъ таять, и единственно отъ избытка температуры тѣла M, ибо снѣгъ, заключающійся въ пространствѣ $AA'A''A'''$, не имѣющемъ никакого сообщенія съ пустотою $BB'B''$, предохраняетъ сію послѣднюю отъ дѣйствія температуры наружнаго воздуха. И такъ, выпустивъ воду посредствомъ крана R, и измѣривъ тщательно ея объёмъ, узнаемъ во сколько разъ теплоёмкость даннаго тѣла M болѣе теплоёмкости другаго вещества, напримѣръ воды; это отношеніе и называется *удѣльнымъ тепломъ*, *теплоёмкостію* или *нагрѣваемостію тѣла*.

Замѣтимъ еще, что описанный опытъ для большей точности стараются производить въ такомъ мѣстѣ, коего температура немногимъ выше 0°, дабы снѣгъ, заключающійся въ пространствѣ $AA'A''A'''$, таялъ только въ самомъ маломъ количествѣ; получаемую же воду въ этомъ пространствѣ выпускаютъ посредствомъ крана K. Читатели найдутъ подробное описаніе устроенія и употребленія калориметра Лапласа и Лавуазье въ книгѣ: *Système de Chimie antiphlogistique par Lavoisier.*

Въ заключеніе приводимъ теплоёмкости нѣкоторыхъ веществъ, опредѣленныя Лапласомъ и Лавуазье посредствомъ ихъ калориметра:

Обыкновенная вода	1.
Жесть	0,1100.
Кроунъ-глассъ	0,1929.
Ртуть	0,0290.
Негашеная известь	0,2169.
Селитреная кислота	0,6614.
Сѣрная кислота	0,3346.

Дальтонъ, *Ларошъ*, *Бераръ*, *Дюлонгъ* и *Пети*, производившіе многочисленные опыты посредствомъ калориметра, опредѣлили нагрѣваемость для многихъ веществъ; результаты ихъ опытовъ читатели найдутъ почти во всѣхъ новыхъ курсахъ Физики и Химіи.

CAPILLAIRE (ACTION). (Мех.) **ВОЛОСНЫЯ, КАПИЛЛЯРНЫЯ ДѢЙСТВІЯ.** Когда стеклянная трубка, имѣющая весьма малый діаметръ (менѣе одного центиметра), и открытая съ обоихъ концовъ, будетъ опущена въ сосудъ съ водою или ртутью, то усматриваемъ, что вода поднимается въ ней выше своего уровня, а ртуть не достигаетъ высоты стоянія сей жидкости въ сосудѣ. Въ первомъ случаѣ, вода въ трубкѣ оканчивается поверхностію *вогнутою*, а во второмъ, напротивъ того, *выпуклою*. Такія явленія и другія подобныя имъ, по видимому отступающія отъ законовъ равновѣсія жидкостей, называются *волосными* или *капиллярными*.

Дабы показать, что такого рода явленія согласны съ строгою теоріею жидкостей, замѣтимъ что силы, существующія въ природѣ, доселѣ извѣстныя намъ, могутъ быть раздѣлены на два разряда. Первыя, изъявляютъ свое дѣйствіе на разстояніяхъ чувствительныхъ, и даже весьма большихъ. Таковы напримѣръ, притяженія и отталкиванія электрическія, магнитныя и притяженіе небесныхъ тѣлъ; всѣ эти силы подчинены Нютонову закону, то есть, онѣ прямо пропорціональны массамъ и обратно квадратамъ разстояній. Ко второму разряду относятся силы, коихъ дѣйствіе чувствительно только на разстояніяхъ весьма малыхъ. Отъ такого рода силъ происходятъ *волосныя* явленія, соединенія химическія, явленія кристаллизаціи и проч. Смот. ATTRACTION.

При составленіи уравненій равновѣсія жидкостей, должно принимать въ соображеніе и силы втораго разряда, о которыхъ мы сей-часъ упомянули; явленія, происходящія отъ дѣйствія такихъ силъ, называются *волосными* или *капиллярными*, и составляютъ довольно важную теорію въ Гидростатикѣ. Мы только укажемъ на способъ, которымъ руководствовались геометры для объясненія капиллярныхъ явленій; что касается до подробностей по сему предмету, то, по свойству нашего сочиненія, онѣ не могутъ быть предложены здѣсь.

Разсмотримъ сколько угодно частицъ m, m' m'' ...., побуждаемыхъ силою тяжести и взаимными притяженіями. Отнесемъ эти частицы къ тремъ прямоугольнымъ осямъ x, y, z, и положимъ, что ось z вертикальная. Пусть будутъ соотвѣтственно x, y и z, x', y' и z', x'', y'' и z'' ... координаты точекъ m, m', m'' .... Чтобы разсматриваемая нами система была въ равновѣсіи, надобно чтобы полный моментъ не могъ получить положительной величины ни для какого возможнаго перемѣщенія (Смот. ÉQUILIBRE). И такъ, надлежитъ найти этотъ моментъ. Очевидно, что отъ силы тяжести, получимъ моментъ

$$g(m\delta z + m'\delta z' + m''\delta z'' + \dots).$$

Что касается до силъ, происходящихъ отъ взаимодѣйствія частицъ, то, для опредѣленія ихъ момента, изобразимъ для удобности знакоположеніемъ (m, m') разстояніе между двумя частицами m и m'. Взаимное дѣйствіе двухъ частицъ m и m' изобразится произведеніемъ $mm'\varphi(m, m')$, а моментъ этого дѣйствія выраженіемъ $mm'\varphi(m, m')\,\delta(m, m')$; для другихъ частицъ системы найдутся подобные члены. Введенная нами функція φ изображаетъ законъ притяженія частичнаго; этотъ законъ можетъ измѣняться съ свойствомъ разсматриваемыхъ частицъ. Такъ напримѣръ, если жидкость заключается въ сосудѣ, то дѣйствіе частицъ, составляющихъ стѣны сосуда, на смежныя съ ними частицы жидкости, изобразится функціею отличною отъ той, которая выражаетъ взаимодѣйствіе двухъ частицъ, принадлежащихъ жидкости.

И такъ полный моментъ будетъ:

$$g(m\delta z + m'\delta z' + m''\delta z'' + \dots) + mm'\varphi(m, m')\,\delta(m, m')$$
$$+ mm''\varphi(m, m'')\,\delta(m, m'') + m'm''\varphi(m', m'')\,\delta(m', m'') + \dots$$

Это выраженіе ни для какого возможнаго перемѣщенія не должно получить значенія положительнаго Если, для краткости, изобразимъ чрезъ $\psi(m, m')$ сумму $S\varphi(m, m')\,\delta(m, m')$, то предыдущій рядъ можно будетъ написать въ видѣ

$$\delta\left\{\begin{array}{l} g(mz + m'z' + m''z'' + \dots) + mm'\psi(m, m') \\ \quad + mm''\psi(m, m'') + m'm''\psi(m,'m'') + \dots \end{array}\right\}.$$

Такъ какъ это выраженіе ни въ какомъ случаѣ не должно быть положительнымъ, то оно необходимо будетъ *maximum*, но особеннаго рода, при которомъ дифференціалъ вмѣсто того, чтобы обращаться постоянно въ *нуль*, можетъ имѣть и значенія *отрицательныя*. См. MAXIMUM. И такъ, теорія волосныхъ явленій приводится такимъ образомъ къ задачѣ о разыскапіи наибольшей величины нѣкоторой функціи.

Мы не будемъ вдаваться въ дальнѣйшія изслѣдованія по сему предмету: достаточно того, что показали какимъ образомъ теорія волосныхъ явленій подчиняется анализу. Отсылаемъ читателей къ сочиненіямъ:

Mécanique céleste, par Laplace. Supplément au X^me^ livre.

Gauss: Principia generalia theoriae fluidorum in statu aequilibrii. Геттингенъ 1831.

Nouvelle Théorie de l'Action Capillaire, par *Poisson* 1831.

CAPILLARITÉ. (Мех.) **ВОЛОСНОСТЬ, КАПИЛЛЯРНОСТЬ.** Смот. предыдущую статью.

CAPITAL. КАПИТАЛЪ; стар. **ИСТИННИКЪ** *(principal)*. Смот. INTÉRÊT.

CAPRICORNE. (Астр.) **КОЗЕРОГЪ.** Десятый знакъ зодіака. Смот. ZODIAQUE. *Tropique du capricorne, тропикъ козерога.*

CAPUCIN (LE). Смот. CADRAN UNIVERSEL PAR LES HAUTEURS DU SOLEIL.

CARACTÈRE. (Анал.) **ЗНАКЪ.** Вообще въ Математикѣ подъ *знаками* разумѣютъ начертанія, или письмена, употребляемыя для сокращенія рѣчи и для упрощенія вычисленій.

Caractères numéraux или chiffres. Числительные знаки или циѳры. Знаки, употребляемые для изображенія чиселъ.

Caractères communs или caractères arabes. Арабскія циѳры, которыя нынѣ вошли почти во всеобщее употребленіе. Арабскія циѳры изображаются посредствомъ слѣдующихъ десяти знаковъ: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Caractères romains. Римскія циѳры, изображаются посредствомъ семи прописныхъ буквъ Латинскаго алѳавита, а именно: *I, V, X, L, C, D, M.*

I, изображаетъ *единицу; V, пять; X, десять; L, пятьдесятъ; C, сто; D, пять сотъ; M, тысячу.* Посредствомъ этихъ буквъ, числа изображаются слѣдующимъ образомъ: 1 = *I*, 2 = *II*, 3 = *III*, 4 = *IV*, 5 = *V*, 6 = *VI*, 7 = *VII*, 8 = *VIII*, 9 = *IX*, 10 = *X*, 11 = *XI*, 12 = *XII*, и проч. 20 = *XX*, 30 = *XXX*, 40 = *XL*, 50 = *L*, и проч. 100 = *C*, 200 = *CC*, ... 1000 = *M*. Сверхъ сихъ буквъ, употребляли иногда нѣкоторые сократительные знаки.

Caractères ou chiffres grecs, hébraiques. Греческія, Еврейскія циѳры. Буквы Греческаго, Еврейскаго алѳавита, имѣющія также условное численное значеніе.

Славянскія цифры. Письмена Славянскаго алѳавита употребляются для счисленія слѣдующимъ образомъ: *единица* изображается чрезъ а҃, *два*, в҃; *три*, г҃; *четыре*, д҃; *пять*, є҃; *шесть*, ѕ҃; *семь*, з҃; *восемь*, и҃; *девять*, ѳ҃; *десять*, і҃; *одинадцать*, а҃і; и проч. *дзадцить*, к҃; *двадцать одинъ*, к҃а;..... *тридцать*, л҃; *тридцать одинъ*, л҃а;..... *сорокъ*, м҃; *пятьдесятъ*, н҃; *шестьдесятъ*, ѯ҃; *семьдесятъ*, ѻ҃; *восемьдесятъ*, п҃; *девяносто*, ч҃; *сто*, р҃; *сто одинъ*, р҃а ....; *сто одинадцать*, р҃аі; *сто двадцать*, р҃к; *сто двадцать одинъ*, р҃ка;.... *двѣсти* с҃; *триста*, т҃; *четыреста*, у҃; *пять сотъ*, ф҃; *шесть сотъ*, х҃; *семь сотъ*, ѱ҃; *восемь сотъ*, ѿ҃; *девять сотъ*, ц҃; *тысяча*, ҂а; *двѣ тысячи*, ҂в; *три тысячи*, ҂г и проч. Иногда эти письмена пишутся и безъ титловъ.

Caractères français или chiffres de compte, de finance. Финансовыя циѳры. Римскія циѳры, употребляемыя Французами въ Контрольной части, также казначеями, пріёмщиками и проч. Вмѣсто прописныхъ Латинскихъ буквъ, пишутъ строчныя, именно: *i* и *j*, *v*, *x*, *l*, *c*, *d*, *m*. Напримѣръ, 18 пишется слѣдующимъ образомъ: *xviij*.

Въ Анализѣ, первыми буквами алѳавита *a*, *b*, *c*.... изображаютъ обыкновенно данныя или постоянныя величины. И такъ, эти буквы суть *знаки* количествъ *извѣстныхъ* или *неизмѣняемыхъ*. Послѣднія, то есть *x*, *y*, *z* и проч. присвоены величинамъ неизвѣстнымъ или перемѣннымъ. Буквами *l*, *m*, *n*...... часто означаютъ показателей; напримѣръ, пишутъ: x^l, y^m, z^n....

$+$ *плюсъ, съ (plus)*. Знакъ положительнаго количества. См. POSITIF. — *минусъ, безъ* (*moins*). Знакъ отрицательнаго количества. Смот. NÉGATIF. $=$ *знакъ равенства (signe de l'égalité)*. Этотъ знакъ, поставленный между двумя количествами, означаетъ, что они равны между собою. Напримѣръ $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$, $7 - 3 = 9 - 5$, $x^3 - 3x + 1 = 0$. — Прежніе алгебристы означали *равенство* знакомъ $\propto$.

Знаки $\times$, . изображаютъ умноженіе; $a \times b$ или $a.b$ значитъ, что *a* умножено на *b*. $\div$, : *знаки дѣленія*. Напримѣръ $a \div b$, $a:b$, изображаетъ частное, получаемое чрезъ раздѣленіе величины *a* на *b*, то есть, дробь $\frac{a}{b}$.

$>$ и $<$ *знаки неравенства*; $a > b$ означаетъ, что *a* болѣе *b*, а $c < d$ значитъ, что *c* менѣе *d*. Прежде употребляли въ томъ же значеніи знаки] и [.

Знакомъ $\backsim$, поставленнымъ между двумя количествами, изображали неизвѣстную разность между ними. — Также иногда выражаютъ этимъ знакомъ *подобіе* двухъ геометрическихъ ѳигуръ.

∞ *знакъ безконечности*. Смот. INFINI.

$\sqrt{}$ *коренной знакъ, радикалъ (radical).* Въ отверстіи пишутъ *степень* извлекаемаго корня въ такомъ видѣ: $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$ ..... и проч. При извлеченіи *квадратнаго* корня, пишутъ просто $\sqrt{a}$, безъ показателя 2. Корни изображаются также дробными показателями; вмѣсто $\sqrt{a+b}$, пишутъ $(a+b)^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{a+b}$ изображаютъ чрезъ $(a+b)^{\frac{1}{3}}$, и проч.

: *знакъ ариѳметической пропорціи,* которую пишутъ слѣдующимъ образомъ: 8.3:7.2.

::, = *знаки геометрической пропорціи,* изображаемой такимъ образомъ: $a.b::c.d$, или $a:b::c:d$, или еще $a:b=c:d$. Иные писали также $a|b||c|d$.

≡ *знакъ равноостаточности,* введенный математикомъ Гауссомъ. Смот. CONGRU.

Восклицательный знакъ (!), поставленный послѣ цѣлаго числа, изображаетъ произведеніе всѣхъ цѣлыхъ чиселъ до даннаго, включительно. И такъ 5! изображаетъ произведеніе 1.2.3.4.5 = 120.

Въ Диѳференціальномъ Исчисленіи употребляютъ знакъ d для изображенія *дифференціала,* Интегралъ изображается знакомъ $\int$.

Въ Исчисленіи Разностей обозначаютъ *разность* Греческою буквою Δ, а *сумму,* или *интегралъ въ разностяхъ,* буквою Σ.

Варіацію означаютъ буквою δ.

Англичане изображаютъ часто диѳѳеренціалъ перемѣнной x знакомъ $\dot{x}$: интегралъ $\int y dx$ чрезъ $Fl. yx$. Смот. FLUXION и FLUENTE.

Лагранжъ изображалъ *производныя* перваго, втораго, третьяго ...... порядка ѳункціи $f(x)$, слѣдующимъ образомъ: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$..... Это знакоположеніе и нынѣ употребляется всѣми. Смот. DÉRIVÉE.

По введенному Г-мъ *Фурье* знакоположенію, интегралъ $\int F(x)dx$, взятый между предѣлами a и b, изображается чрезъ $\int_a^b F(x)dx$, и произносится такъ: *интегралъ отъ a до b функціи $F(x)$, помноженной на dx.*

Въ Геометріи знакъ $\|$ или $\#$ означаетъ, что двѣ линіи, или плоскости *параллельны* между собою.

Знакомъ $\perp$ выражаютъ *равенство сторонъ* въ какой нибудь ѳигурѣ.

$\angle$ знакъ *угла.*

Кругъ отмѣчаютъ знакомъ ○.

∟ изображаетъ *прямой уголъ* а также и *перпендикуляръ.*

$\veebar$ означаетъ *равенство угловъ.*

Знакъ △ изображаетъ *треугольникъ.*

Знакъ ◺ *прямоугольный треугольникъ.*

Знакъ □ присвоенъ *квадрату* (геометрической ѳигурѣ), а также и *квадратному числу.*

▭ означаетъ *прямоугольникъ.*

▱ *Параллелограммъ.*

▲ *Пирамиду.*

■ *Кубъ.*

▬ *Прямоугольный параллелопипедъ.*

▰ *Параллелопипедъ.*

Знаки $^{o}, ^{I}, ^{II}, ^{III}, ^{IV}$.... означаютъ по порядку *градусы, минуты, секунды, терціи, кварты*.... Напримѣръ: $20^{\circ}, 7', 23'', 4'''$ читается: *двадцать градусовъ семь минутъ двадцатъ три секунды четыре терціи.*

Исчислить всѣ знаки, бывшіе въ употребленіи у математиковъ въ разныя времена, почти невозможно. Здѣсь ограничились мы главными изъ нихъ; даже, изъ числа приведенныхъ нами, многіе уже рѣдко употребляются, въ особенности же геометрическіе.

CARACTÈRE или **CRITÈRE. ПРИЗНАКЪ.** *Caractères de la divisibilité des nombres; признаки дѣлимости чиселъ.*

CARACTÉRISTIQUE. ЗНАКЪ, ХАРАКТЕРИСТИКА. Смот. CARACTÈRE.

CARACTÉRISTIQUE. (Алг.) **ХАРАКТЕРИСТИКА, ЦИФРОУКАЗАТЕЛЬ.** Такъ называется цѣлое число, входящее въ логариѳмъ. Напримѣръ, *характеристика* обыкновеннаго логариѳма отъ 5432 есть 3, ибо $Log(5432) = 3,7349598$.... Характеристика измѣняется вообще съ системою логариѳмовъ, и можетъ быть какъ положительнымъ такъ и отрицательнымъ числомъ, а также и нулемъ. Смот. LOGARITHME.

CARACTÉRISTIQUE D'UNE SURFACE. (Геом.) **ХАРАКТЕРИСТИКА ПОВЕРХНОСТИ.** Когда поверхность, постояннаго или перемѣннаго вида, движется по какому либо закону, то предѣлъ пространства, занимаемаго ею во всѣхъ ея положеніяхъ, называется *обертывающею поверхностію (surface enveloppe).* Очевидно, что обертывающая поверхность будетъ геометрическое мѣсто кривыхъ послѣдовательныхъ пересѣченій движущейся поверхности. *Монжъ* назвалъ каждую изъ сихъ кривыхъ *характеристикою* обертывающей поверхности: такъ, напримѣръ, характеристика поверхностей вращенія есть *кругъ*. Дѣйствительно, пусть будутъ x, y, z координаты движущагося шара, и положимъ что его центръ движется по оси x. Если изобразимъ чрезъ α абсциссу центра при какомъ ни есть положеніи шара, а чрезъ $\varphi(\alpha)$ перемѣнный радіусъ сего послѣдняго, то получимъ

(1) $$(x-\alpha)^2+y^2+z^2=[\varphi(\alpha)]^2.$$

Измѣнивъ α въ $\alpha+d\alpha$ найдется уравненіе шара, занимающаго положеніе смежное съ предшествующимъ; очевидно будетъ

$$(x'-\alpha-d\alpha)^2+y'^2+z'^2=[\varphi(\alpha)]^2+d.[\varphi(\alpha)]^2.$$

Для точекъ пересѣченія обоихъ шаровъ въ занимаемыхъ ими двухъ положеніяхъ, должно быть $x'=x$, $y'=y$, $z'=z$; слѣдовательно

(2) $$x-\alpha+\varphi(\alpha)\,\varphi'(\alpha)=0.$$

Но это уравненіе принадлежитъ плоскости перпендикулярной къ оси x; пересѣченіе этой плоскости съ шаровою поверхностію, то есть, *характеристика* поверхности вращенія очевидно будетъ *кругъ*. Уравненіе обертывающей поверхности найдется чрезъ исключеніе количества α между (1) и (2). Изъ уравн. (1) выводимъ

$$y^2+z^2=[\varphi(\alpha)]^2-(x-\alpha)^2;$$

но, въ слѣдствіе уравн. (2), α есть нѣкоторая функція перемѣнной x, почему

$$y^2+z^2=f(x),$$

а это уравненіе, какъ извѣстно, принадлежитъ поверхностямъ вращенія.

Замѣтимъ, что характеристику можно принимать за *производящую* обертывающей поверхности. Для дальнѣйшихъ подробностей отсылаемъ къ статьямъ: SURFACE, FAMILLE DE SURFACES, GÉNÉRATION DES SURFACES, ARÊTE DE REBROUSSEMENT и проч.

TRIANGLE CARACTÉRISTIQUE или **DIFFÉRENTIEL.** (Диф. Исч.) **ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЙ, ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИКЪ.** Безконечно малый прямоугольный треугольникъ, коего ипотенуза есть элементъ или дифференціалъ кривой линіи, а катеты, дифференціалы координатъ. На черт. 5 (листъ III) $mm'q$ есть *дифференціальный треугольникъ*; ипотенуза его равна $mm'=ds$, одинъ изъ катетовъ $mq=dx$, а другой $m'q=dy$.

CARACTÉRISTIQUE. ОТЛИЧИТЕЛЬНЫЙ. Свойственный одному разсматриваемому предмету. *Équation, propriété caractéristique*; *отличительное уравненіе, свойство*. Напримѣръ, изобразивъ чрезъ x и y прямоугольныя координаты плоской кривой, $x^2+y^2=r^2$, $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ будутъ соотвѣтственно *отличительными уравненіями* круга и эллипса, ибо каждое изъ нихъ, при допущенныхъ условіяхъ, выражаетъ отличительное свойство той кривой, которую опредѣляетъ.

CARDAN (RÈGLE DE) или *règle de Scipion Ferreo.* (Алг.) **КАРДАНОВО ПРАВИЛО;** *правило Сципіона Феррео.* Такъ называется правило для рѣшенія уравненій третей степени, открытое Италіянцемъ *Сципіономъ Феррео.* Послѣ Феррео, *Тарталлеа* или *Тартаглія* дополнилъ это правило, распространивъ его на всѣ случаи, представляющіеся при рѣшеніи уравненій третей степени. *Карданъ*, современникъ Тарталлеа, жившій въ XVI вѣкѣ, изложилъ упомянутое рѣшеніе въ сочиненіи своемъ *de arte magna* *), и поэтому многіе приписываютъ ему открытіе, неотъемлемо принадлежащее Феррео и Тарталлеа. Впрочемъ, должно отдать справедливость Кардану въ томъ отношеніи, что онъ первый замѣтилъ *неприводимый случай*, о которомъ будетъ упомянуто ниже.

Предположивъ, что полное уравненіе третей степени освобождено отъ втораго члена, будетъ

(1) $$x^3+px+q=0.$$

Полагая

$$x=u+v,$$

найдемъ

$$x^3=u^3+3u^2v+3uv^2+v^3=u^3+3uv(u+v)+v^3$$
$$=u^3+v^3+3uvx,$$

или $$x^3-3uv.x-u^3-v^3=0.$$

Чтобы всѣ три корня этого уравненія были одинаковы съ корнями уравн. (1), должно быть

(2) $$\begin{cases} -3uv=p \text{ или } u^3v^3=-\dfrac{p^3}{27} \\ -(u^3+v^3)=q \text{ или } u^3+v^3=-q. \end{cases}$$

Для опредѣленія u и v изъ сихъ уравненій, положимъ

(3) $$u^3=z_1,\quad v^3=z_2.$$

Такъ какъ по уравненіямъ (2) сумма z_1+z_2 и произведеніе z_1z_2 намъ извѣстны, то можемъ составить уравненіе 2-й степени, котораго кор-

*) Эта книга напечатана въ 1545 году; она содержитъ въ себѣ извѣстныя въ то время правила Алгебры.

ни будутъ z_1 и z_2. Очевидно, что для опредѣленія ихъ получимъ уравненіе

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0,$$

которое называютъ *разрѣшающимъ* (*la réduite, la resolvante*). Корни его будутъ

$$z_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$z_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

и, въ слѣдствіе уравн. (3), найдемъ

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \cdot \sqrt[3]{1}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \cdot \sqrt[3]{1}.$$

Изобразимъ чрезъ α одинъ изъ мнимыхъ корней $\sqrt[3]{1}$; другой будетъ α^2; если сверхъ того положимъ для краткости

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = U$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = V,$$

то найдемъ для u слѣдующія три величины:

$$U, \quad \alpha U, \quad \alpha^2 U.$$

Чтобы найти значенія v, соотвѣтствующія симъ величинамъ u, замѣтимъ, что произведеніе $UV = -\frac{p}{3}$, а равнымъ образомъ, въ силу перваго изъ урав. (2), должно быть и вообще $uv = -\frac{p}{3}$. Помноживъ на $\alpha^3 = 1$ предпослѣднее уравненіе, найдемъ $\alpha^3 UV = -\frac{p}{3}$, доставляющее слѣдующія три соединенія: $UV = (\alpha U)(\alpha^2 V) = (\alpha^2 U)(\alpha V)$. Отсюда заключаемъ, что значенія v, соотвѣтствующія приведеннымъ величинамъ u, будутъ

$$V, \quad \alpha^2 V, \quad \alpha V.$$

И такъ, изобразивъ чрезъ x_1, x_2, x_3 три корня предложеннаго уравненія, найдемъ

$$x_1 = U + V$$
$$x_2 = \alpha U + \alpha^2 V$$
$$x_3 = \alpha^2 U + \alpha V$$

или, по подстановленіи на мѣсто U, V ихъ величинъ,

$$(4)\begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)} \\ x_2 = \alpha\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)} + \alpha^2\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)} \\ x_3 = \alpha^2\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)} + \alpha\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)} \end{cases}$$

Здѣсь $\alpha = -\frac{1 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2}$, $\alpha^2 = -\frac{1 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2}$.

Смот. BINOMES (ÉQUATIONS).

Выраженіе для x_1 въ уравн. (4) собственно называется *Кардановою формулою*.

Для примѣра, возьмемъ уравненіе

$$x^3 - 6x - 9 = 0;$$

здѣсь $p = -6$, $q = -9$; слѣдовательно

$$x_1 = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 3$$
$$x_2 = \alpha\sqrt[3]{8} + \alpha^2\sqrt[3]{1} = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{-1}$$
$$x_3 = \alpha^2\sqrt[3]{8} + \alpha\sqrt[3]{1} = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{-1}.$$

Когда величина $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, находящаяся подъ квадратнымъ корнемъ, будетъ положительная, то легко видѣть изъ формулъ (4), что одинъ корень предложеннаго уравненія, именно x_1, будетъ *вещественный*, а остальные два, x_2 и x_3, *мнимые*. Когда $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$, то усматриваемъ изъ тѣхъ же формулъ, что всѣ три корня *вещественные*, и сверхъ того $x_2 = x_3 = (\alpha + \alpha^2)\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$, ибо $\alpha + \alpha^2 = -1$. Наконецъ, когда при величинѣ p отрицательной, будетъ $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, то всѣ три корня x_1, x_2, x_3, *вещественные* и *неравные*. Всѣ эти обстоятельства обнаруживаются, когда примемъ въ соображеніе, что при $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$ имѣемъ

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = a \pm b,$$

гдѣ a и b вещественныя величины. Когда $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$, то

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = a$$

разумѣя подъ a также количество вещественное. Наконецъ, если $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, то

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = a \pm b\sqrt{-1}.$$

Такъ какъ алгебристы обратили особенное вниманіе на послѣдній случай, то войдемъ по этому предмету въ нѣкоторыя подробности.

Мы предполагаемъ коэффиціентъ у x отрицательнымъ; слѣдовательно получимъ уравненіе вида

$$(5) \qquad x^3 - px + q = 0,$$

гдѣ $p>0$, и сверхъ того $\frac{p^3}{27}>\frac{q^2}{4}$. Въ слѣдствіе первой изъ формулъ (4) одинъ корень уравн. (5) выразится чрезъ

$$x_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}},$$

и, полагая для краткости

$$-\frac{q}{2}=A,\ \sqrt{\frac{p^3}{27}-\frac{q^2}{4}}=B,$$

найдется

$$x_1=\sqrt[3]{A+B\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{A-B\sqrt{-1}}.$$

Несмотря на мнимый видъ этого послѣдняго выраженія, легко убѣдиться чрезъ разложеніе въ рядъ каждаго радикала третей степени (или инымъ способомъ), что оно изображаетъ количество вещественное. Для нахожденія этой величины, алгебристы, со времени Кардана, пытались извлечь обозначенные въ величинѣ x_1 кубичные корни; но всѣ ихъ усилія остались безуспѣшны. По сей-то причинѣ этотъ случай и названъ *неразрѣшимымъ* или *неприводимымъ* (*cas irréductible*).

Хотя доселѣ невозможность выразить въ вещественномъ видѣ корни уравн. (5) и не доказана, но весьма вѣроятно, что сіи корни, по свойству опредѣляющаго ихъ уравненія, не могутъ быть выражены иначе, какъ посредствомъ мнимыхъ формулъ. Несмотря на то, что корни уравненія третей степени, въ *неразрѣшимомъ случаѣ*, не могутъ быть выражены *алгебрически* въ вещественномъ видѣ, можно однакожъ, посредствомъ тригонометрическихъ формулъ, найти ихъ значенія. Дѣйствительно, вспомнимъ что вообще

$$\cos^3\varphi=\frac{1}{4}\cos 3\varphi+\frac{3}{4}\cos\varphi,$$

откуда

$$\cos^3\varphi-\frac{3}{4}\cos\varphi-\frac{1}{4}\cos 3\varphi=0,$$

и, помноживъ на неопредѣленную величину ϱ^3, получимъ

$$(\varrho\cos\varphi)^3-\frac{3\varrho^2}{4}(\varrho\cos\varphi)-\frac{\varrho^3}{4}\cos 3\varphi=0.$$

Если теперь сравнимъ почленно это уравненіе съ предложеннымъ

$$x^3-px-q=0,$$

то найдемъ

$$x=\varrho\cos\varphi,\ p=\frac{3\varrho^2}{4},\ q=\frac{\varrho^3}{4}\cos 3\varphi,$$

откуда выведемъ

$$\varrho=2\sqrt{\frac{p}{3}},\ \cos 3\varphi=\frac{4q}{\varrho^3}=\frac{3q}{2p\sqrt{\frac{p}{3}}}.$$

Легко видѣть, что величина $\frac{3q}{2p\sqrt{\frac{p}{3}}}$, равная $\cos 3\varphi$, менѣе единицы; и въ самомъ дѣлѣ, возвышая въ квадратъ получаемъ выраженіе $\frac{27q^2}{4p^3}$, которое, въ слѣдствіе условія $\frac{p^3}{27}>\frac{q^2}{4}$, будетъ <1. Но изъ уравненія

$$\cos 3\varphi=\frac{3q}{2p\sqrt{\frac{p}{3}}},$$

выводимъ три значенія для φ, именно:

$$\varphi_1=\frac{\vartheta}{3}$$

$$\varphi_2=\frac{2\pi+\vartheta}{3}$$

$$\varphi_3=\frac{2\pi-\vartheta}{3},$$

когда для краткости примемъ

$$\vartheta=\operatorname{arc}\cos\frac{3q}{2p\sqrt{\frac{p}{3}}},$$

разумѣя подъ ϑ наименьшую положительную дугу, удовлетворяющую послѣднему уравненію.

И такъ, изобразивъ чрезъ x_1, x_2, x_3 корни предложеннаго уравненія, найдемъ, по причинѣ $x=\varrho\cos\varphi$,

$$x_1=2\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\cos\frac{\vartheta}{3}$$

$$x_2=2\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\cos\left(\frac{2\pi+\vartheta}{3}\right)$$

$$x_3=2\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\cos\left(\frac{2\pi-\vartheta}{3}\right).$$

Возьмемъ напримѣръ уравненіе

$$x^3-3x+\sqrt{2}=0;$$

найдемъ $p=3$, $q=-\sqrt{2}$; слѣдовательно $\varrho=2$, $\cos 3\varphi=-\sqrt{\frac{1}{2}}$, и $\vartheta=\operatorname{arc}(\cos=-\sqrt{\frac{1}{2}})=\frac{3}{4}\pi$. Подставляя эти величины въ предыдущія формулы, получимъ

$$x_1=2\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$$

$$x_2=2\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{\tfrac{1}{2}}(\sqrt{3}+1)$$

$$x_3=2\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{\tfrac{1}{2}}(\sqrt{3}-1).$$

CARDINAUX (POINTS). (Астр.) **ЧЕТЫРЕ СТРАНЫ СВѢТА,** то есть, *сѣверъ, югъ, востокъ* и *западъ.*

CARNOT (THÉORÊME DE). (Мех.) **ТЕОРЕМА КАРНО.** Теорема, найденная Французскимъ математикомъ *Карно,* и относящаяся къ потерѣ нѣкоторой части живой силы системою тѣлъ, когда они подвергнутся какой либо быстрой перемѣнѣ, напримѣръ, взаимному соударенію. Карно доказалъ, что *сумма живыхъ силъ всѣхъ точекъ системы, до удара, равна суммѣ живыхъ силъ, относящихся къ скоростямъ, потерянны мъ всѣми точками системы.* И такъ, если изобразимъ чрезъ m какую ни есть массу разсматриваемой системы, чрезъ v и V ея скорости до удара и послѣ удара, то аналитическое выраженіе теоремы Карно будетъ

$$\Sigma mv^2 - \Sigma mV^2 = \Sigma mu^2,$$

разумѣя подъ знакомъ Σ сумму произведеній массы на квадратъ скорости относительно всѣхъ точекъ системы, такъ что $\Sigma mv^2 = mv^2 + m'v'^2 + m''v''^2 + \ldots$; и проч. —

Новѣйшіе геометры сомнѣваются въ справедливости какъ самой теоремы, такъ и доказательства предложеннаго Карно. Смот. FORCE VIVE, CHOC.

CARQUOIS. КОЛЧАНЪ. Родъ солнечныхъ часовъ, изобрѣтенныхъ *Аполлоніемъ.*

CARRABLE. (Геом.) **СПЛОЩАДИМЫЙ.** *Courbes carrables; сплощадимыя кривыя.* Такъ называли прежніе авторы тѣ кривыя линіи, коихъ площади могутъ быть выражены посредствомъ функцій алгебрическихъ, логариѳмическихъ и круговыхъ, напримѣръ, *параболу, иперболу, эллипсъ* и проч. Это опредѣленіе не можетъ быть ничѣмъ оправдано, почему, кажется, лучше называть *сплощадимою,* такую *кривую,* коей площадь выражается *алгебрически,* а тѣ кривыя, коихъ площади изображаются какими бы то ни было трансцендентными функціями, называть *несплощадимыми* (*non-carrables*). — Въ томъ же смыслѣ относительно *спрямленія* кривыхъ линій употреблялось слово RECTIFIABLE (Смот.).

CARRÉ или **QUARRÉ.** (Геом.) **КВАДРАТЪ.** Четыреугольная фигура, имѣющая всѣ стороны равныя между собою, а углы прямые. *Квадратъ* служитъ мѣрою площадей плоскихъ фигуръ, а также и кривыхъ поверхностей. И такъ, найти какую либо площадь значитъ, сыскать сколько разъ заключается въ ней площадь опредѣленнаго квадрата, принимаемаго за единицу. Смот. FIGURE, MESURE, QUADRATURE, AIRE.

CARRÉ GÉOMÉTRIQUE. ГЕОМЕТРИЧЕСКІЙ КВАДРАТНЫЙ СТОЛИКЪ, КВАДРАТНАЯ МЕНСУЛА. Приборъ, въ родѣ обыкновенной менсулы, который употребляли для съёмки плановъ. Смот. PLANCHETTE.

CARRÉ (TRAIT). (Геом.) **ПРЯМОУГОЛЬНЫЯ ЛИНІИ.** Такъ называются въ какихъ либо чертежахъ, напримѣръ въ эпюрахъ Начертательной Геометріи, двѣ линіи, взаимно перпендикулярныя, и раздѣляющія листъ бумаги на четыре прямоугольника, почти равные между собою. Одна изъ этихъ линій вообще изображаетъ пересѣченіе вертикальной плоскости съ горизонтальною, а другая, слѣдъ плоскости, перпендикулярной въ одно время къ сказаннымъ двумъ.

CARRÉ или **NOMBRE CARRÉ.** (Ариѳ. и Алг.) **КВАДРАТЪ, КВАДРАТНОЕ ЧИСЛО.** Произведеніе двухъ равныхъ множителей; напримѣръ $9 = 3 \times 3$, $a^2 = a \times a$, $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)(a+b)$ и проч. *Elever au carré; возвысить въ квадратъ.*

Квадраты *чётныхъ* чиселъ дѣлятся на-цѣло на 4, ибо $(2k)^2 = 4k^2$; что касается до квадрата *нечётнаго* числа, то легко видѣть, что отнявъ единицу отъ того квадрата, получимъ число, дѣлящееся на 8. Дѣйствительно $(2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k+1)$; но одинъ изъ двухъ множителей k или $k+1$ будетъ необходимо чётное число; слѣдовательно $4k(k+1)$ будетъ дѣлиться на 8.

Разсматривая цѣлыя числа вида $3k+1$ и $3k+2$, замѣчаемъ, что

$$(3k+1)^2 - 1 = 3k(3k+2),\ (3k+2)^2 - 1 = 3(k+1)(3k+1);$$

слѣдовательно, квадраты чиселъ обоихъ видовъ $3k+1$ и $3k+2$, по отнятіи единицы, дѣлятся на 3. Легко изъ этого усмотрѣть, что цѣлыя числа вида $3K+2$ никогда не могутъ быть точными квадратами.

Racine carrée. Квадратный корень. Квадратнымъ корнемъ изъ какого ни есть числа именуется такая величина, которая будучи умножена сама на себя, производитъ данное число. И такъ, 3 есть *квадратный корень* изъ 9, ибо $3 \times 3 = 9$; $a+b$ изображаетъ квадратный корень изъ $a^2 + 2ab + b^2$, ибо $(a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$. *Extraire la racine carrée; извлечь квадратный корень.* Дѣйствіе извлеченія квадратнаго корня обозначается знакомъ $\sqrt{\ }$; и такъ $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b$. Смот. EXTRACTION.

CARRÉ-CARRÉ. БИКВАДРАТЪ, ЧЕТВЕРТАЯ СТЕПЕНЬ. *Carré-cube, пятая степень. Carré-carré-cube, седьмая степень. Carré-cube-cube, восьмая степень. Carré du cube, шестая степень. Carré-carré-carré, восьмая степень. Carré du sursolide, десятая степень.*

CARRÉE (PARENTHÈSE). КВАДРАТНАЯ СКОБКА. Скобки вида [ ], употребляемыя въ формулахъ, нѣсколько сложныхъ. Смот. PARENTHÈSE.

CARRÉS (ÉQUATIONS AUX — DES DIFFÉRENCES). (Алг.) **УРАВНЕНІЕ ВЪ КВАДРАТАХЪ РАЗНОСТЕЙ.** Такъ называется уравненіе, имѣющее корнями своими квадраты разностей между всѣми корнями предложеннаго уравненія. Пусть будетъ $f(x)=0$ предложенное уравненіе, m его степень, и a какой ни есть его корень; полагая $x=a+z$, найдется:

$$f(a+z)=f(a)+f'(a)z+\frac{f''(a)}{1\cdot 2}z^2+\ldots\ldots+\frac{f^{(m)}(a)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}z^m=0;$$

но $f(a)=0$, слѣдовательно

$$f'(a)+\frac{f''(a)}{1\cdot 2}z+\ldots\ldots+\frac{f^{(m)}(a)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}z^{m-1}=0;$$

исключая изъ сихъ двухъ уравненій неопредѣленный корень a, получимъ уравненіе въ z-ахъ, которое изобразимъ чрезъ $F(z)=0$.

Легко видѣть что это уравненіе, называемое *уравненіемъ въ разностяхъ корней (équation aux différences des racines)*, по причинѣ $z=x-a$, будетъ $m(m-1)$-ой степени; и дѣйствительно, извѣстно, что m количествъ (въ нашемъ случаѣ m корней уравненія $f(x)=0$), совокупляемыя подва, даютъ $m(m-1)$ соединеній. Теперь замѣтимъ, что уравненіе $F(z)=0$ будетъ такого свойства, что каждому его корню z, соотвѣтствуетъ другой $-z$, ибо, изобразивъ чрезъ a и b два какіе ни есть корня уравненія $f(x)=0$, найдутся двѣ разности $a-b$ и $b-a=-(a-b)$, которыя обѣ удовлетворяютъ уравненію $F(z)=0$. И такъ, $F(z)$ состоитъ изъ множителей вида $[z-(a-b)][z+(a-b)]=z^2-(a-b)^2$, и слѣдовательно заключаетъ въ себѣ только *чётныя* степени неизвѣстной z, почему

$$F(z)=z^{m(m-1)}+Az^{m(m-1)-2}+Bz^{m(m-1)-4}+\ldots\ldots+Hz^2+K=0,$$

гдѣ A, B,....H, K суть раціональныя функціи коэффиціентовъ уравненія $f(x)=0$. Полагая $z^2=y$, найдемъ уравненіе

$$y^{\frac{m(m-1)}{2}}+Ay^{\frac{m(m-1)}{2}-1}+By^{\frac{m(m-1)}{2}-2}+\ldots\ldots+Hy+K=0,$$

называемое *уравненіемъ въ квадратахъ разностей.*

Напримѣръ, пусть будетъ

$$x^3-7x+7=0;$$

полагая $x=a+z$ найдется

$$a^3+3a^2z+3az^2+z^3-7a-7z+7=0.$$

Но, по предположенію, a есть корень даннаго уравненія; почему

$$a^3-7a+7=0,$$

въ слѣдствіе чего

$$3a^2+3az+z^2-7=0.$$

Исключая a изъ двухъ послѣднихъ уравненій, получимъ

$$z^6-42z^4+441z^2-49=0.$$

Вотъ уравненіе въ разностяхъ корней; чтобы получить уравненіе въ *квадратахъ разностей*, стоитъ только предположить $z^2=y$, и найдемъ

$$y^3-42y^2+441y-49=0.$$

Варингъ (Varing) первый разсматривалъ уравненіе въ квадратахъ разностей; впослѣдствіи *Лагранжъ* показалъ употребленіе его для отдѣленія корней въ данномъ уравненіи. Вотъ способъ Лагранжа въ короткихъ словахъ.

Изобразимъ чрезъ $a, b\ldots$ вещественные корни уравненія $f(x)=0$, и чрезъ $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, $\alpha'\pm\beta'\sqrt{-1},\ldots$ его мнимые корни. Корни уравненія въ квадратахъ разностей необходимо будутъ одного изъ слѣдующихъ видовъ:

1°. $(a-b)^2$ для двухъ вещественныхъ корней.

2°. $(a-\alpha\pm\beta\sqrt{-1})^2$ для одного вещественнаго и одного мнимаго корня.

3°. $[(\alpha-\alpha')\pm(\beta-\beta')\sqrt{-1}]^2$ для двухъ мнимыхъ несопряженныхъ корней.

4°. $(2\beta\sqrt{-1})^2=-4\beta^2$ для двухъ мнимыхъ сопряженныхъ корней.

Первый изъ сихъ видовъ соотвѣтствуетъ вещественнымъ положительнымъ корнямъ уравненія въ квадратахъ разностей; второй и третій, мнимымъ, развѣ только $a=\alpha$ или $\alpha=\alpha'=\ldots$; въ такомъ случаѣ уравненіе въ квадратахъ разностей будетъ имѣть равные корни. Наконецъ, четвертый видъ соотвѣтствуетъ вещественнымъ отрицательнымъ корнямъ. И такъ, если не будемъ принимать въ расчетъ равныхъ корней уравненія въ квадратахъ разностей, то усмотримъ, что *оно будетъ имѣть столько отрицательныхъ корней, сколько предложенное уравненіе* $f(x) = 0$ *имѣетъ различныхъ паръ мнимыхъ корней.* Если найдемъ наименьшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія въ квадратахъ разностей, то корень квадратный изъ сказаннаго предѣла будетъ менѣе наименьшей разности корней предложеннаго уравненія. Изобразимъ чрезъ ε этотъ квадратный корень, и составимъ рядъ чиселъ ε, 2ε, 3ε, $4\varepsilon\ldots$; подставляя послѣдовательно сіи послѣднія въ данное уравненіе, узнаемъ, по знакамъ получаемыхъ выводовъ, между какими предѣлами заключается каждый положительный его корень. Чтобы получить числа, между которыми заключаются отрицательные корни предложеннаго уравненія $f(x) = 0$, очевидно стоитъ только измѣнить x въ $-x$, и, съ уравненіемъ $f(-x) = 0$, поступать точно такъ, какъ было показано выше. Предѣлы положительныхъ корней уравненія $f(-x) = 0$, будутъ предѣлами отрицательныхъ корней предложеннаго уравненія $f(x) = 0$.

Это правило въ теоретическомъ отношеніи удовлетворительно; но въ приложеніяхъ, по причинѣ сложныхъ выкладокъ, неизбѣжныхъ при составленіи уравненія въ квадратахъ разностей, оно почти не можетъ быть употребляемо. Нынѣ имѣемъ другіе способы, несравненно удобнѣйшіе, для отдѣленія корней. См. STURM (THÉORÈME DE), FOURIER (MÉTHODE DE).

CARRÉS (MÉTHODE DES MOINDRES). (Исч. Вѣр.) **СПОСОБЪ НАИМЕНЬШИХЪ КВАДРАТОВЪ.** Этотъ способъ, изобрѣтенный *Лежандромъ*, по обширнымъ приложеніямъ своимъ, весьма важенъ въ наукахъ, основанныхъ на наблюденіи. Онъ преимущественно употребляется въ томъ случаѣ, когда, по приближеннымъ значеніямъ элементовъ, имѣемъ въ виду опредѣлить величины сихъ послѣднихъ еще съ бо̀льшею точностію посредствомъ наблюденій. Для этого, составляютъ такъ называемыя *условныя уравненія (équations de condition)*, замѣняя каждую величину элемента, выведенную изъ наблюденія, этою самою величиною увеличенною количествомъ весьма малымъ, которое изображаетъ *погрѣшность наблюденія.* Условное уравненіе, относящееся къ каждому наблюденію, опредѣлитъ погрѣшность наблюденія въ функціи искомыхъ элементовъ; послѣ того, вмѣсто каждаго изъ элементовъ, подставляютъ приближенную его величину, сложенную съ поправкою, которая будетъ вообще количество весьма малое; далѣе, можно будетъ предположить, мало удаляясь отъ истины, что погрѣшность каждаго наблюденія изображается линейною функціею поправокъ элементовъ. Допуская опредѣленныя значенія для сихъ поправокъ, найдутся опредѣленныя же величины для погрѣшностей наблюденія. Но въ Анализѣ Вѣроятностей доказываютъ, что *самыя выгодныя поправки суть тѣ, которыя обращаютъ* въ наименьшую величину *сумму квадратовъ погрѣшностей.* Для доказательства сего предложенія отсылаемъ читателей къ сочиненію Лапласа: *Théorie analytique des Probabilités.*

Дабы пояснить сказанное нами о способѣ наименьшихъ квадратовъ, мы приведемъ здѣсь приложеніе его къ опредѣленію одного элемента. — Положимъ, что требуется опредѣлить какую нибудь величину α. Приближенное значеніе этой величины намъ извѣстно, но мы желаемъ опредѣлить элементъ α точнѣе посредствомъ многочисленныхъ наблюденій. Изобразимъ приближенное значеніе количества α чрезъ a, и чрезъ $a+x$ точную его величину. Предположимъ, что не имѣемъ возможности измѣрить непосредственно элементъ α, но можемъ опредѣлить другія величины $F_1(\alpha)$, $F_2(\alpha)$, $F_3(\alpha),\ldots$, зависящія извѣстнымъ образомъ отъ α. Пусть будутъ соотвѣтственно A_1, A_2, $A_3,\ldots$ величины функцій $F_1(\alpha)$, $F_2(\alpha)$, $F_3(\alpha),\ldots$, найденныя посредствомъ наблюденій. Если бы сіи наблюденія были совершенно точны, то имѣли бы $F_1(\alpha) = A_1$, $F_2(\alpha) = A_2$, $F_3(\alpha) = A_3,\ldots$; но такъ какъ это въ строгомъ смыслѣ невозможно, то предыдущія равенства надобно будетъ замѣнить уравненіями

$$\begin{gathered}F_1(\alpha) = A_1 + \varepsilon_1\\ F_2(\alpha) = A_2 + \varepsilon_2\\ F_3(\alpha) = A_3 + \varepsilon_3\\ \cdots\cdots\end{gathered}$$

гдѣ ε_1, ε_2, $\varepsilon_3\ldots$ изображаютъ неизвѣстныя погрѣшности, происходящія отъ несовершенства наблюденій. Подставляя въ послѣднія уравненія вмѣсто α равную ей величину $a+x$, и наблюдая, что по причинѣ x весьма малаго, $F(a+x)$ можно замѣнить суммою $F(a) + F'(a)x$, получимъ

$$\begin{gathered}F_1(a) + F_1'(a)x = A_1 + \varepsilon_1\\ F_2(a) + F_2'(a)x = A_2 + \varepsilon_2\\ F_3(a) + F_3'(a)x = A_3 + \varepsilon_3\\ \cdots\cdots\end{gathered}$$

Предполагая же для краткости

$$F_1(a)-A_1=\lambda_1 \quad F_1'(a)=\mu_1$$
$$F_2(a)-A_2=\lambda_2 \quad F_2'(a)=\mu_2$$
$$F_3(a)-A_3=\lambda_3 \quad F_3'(a)=\mu_3$$
$$\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots$$

найдемъ

$$\varepsilon_1=\lambda_1+\mu_1 x$$
$$\varepsilon_2=\lambda_2+\mu_2 x$$
$$\varepsilon_3=\lambda_3+\mu_3 x$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Дѣлая различныя предположенія относительно погрѣшностей $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ которыя могутъ произойти отъ несовершенства наблюденій, найдемъ также и различныя поправки x. Но мы сказали выше, что посредствомъ Исчисленія Вѣроятностей доказываютъ, что величина x, которую надлежитъ предпочесть всѣмъ другимъ, обращаетъ въ *наименьшую величину* сумму квадратовъ погрѣшностей, то есть сумму

$$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\ldots=(\lambda_1+\mu_1 x)^2+(\lambda_2+\mu_2 x)^2 + (\lambda_3+\mu_3 x)^2+\ldots$$

По правиламъ Дифференціальнаго Исчисленія находимъ, что послѣднее выраженіе получитъ наименьшее значеніе, уравнивъ нулю его производную; слѣдовательно

$$\mu_1(\lambda_1+\mu_1 x)+\mu_2(\lambda_2+\mu_2 x)+\mu_3(\lambda_3+\mu_3 x)+\ldots=0,$$

откуда

$$x=-\frac{\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3+\ldots}{\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2+\ldots}.$$

Вотъ поправка, которую должно предпочесть всякой другой. И такъ, для отысканія поправки одного или многихъ элементовъ, получаемыхъ посредствомъ наблюденій, надобно будетъ приписать поправкамъ такія величины, которыя бы обращали сумму квадратовъ погрѣшностей въ *наименьшую*.— Для сличенія, отсылаемъ читателей къ статьѣ: AVANTAGEUX (RÉSULTATS LES PLUS).

CARRÉ MAGIQUE. (Теор. Чис.) **ВОЛШЕБНЫЙ, МАГИЧЕСКІЙ КВАДРАТЪ.** Раздѣливъ квадратную фигуру на квадратики или клетки, и написавъ въ сихъ послѣднихъ натуральныя числа 1, 2, 3, 4.... по порядку, получится такъ называемый *натуральный* или *естественный квадратъ*; таковъ, например, слѣдующій:

A	c	c'	c''	B
a	1	2	3	b
a'	4	5	6	b'
a''	7	8	9	b''
C	d	d'	d''	D

Но если въ клеткахъ расположимъ тѣ же числа такъ, что бы суммы, получаемыя чрезъ сложеніе чиселъ въ каждомъ изъ горизонтальныхъ рядовъ ab, $a'b'$, $a''b''$,.... вертикальныхъ cd, $c'd'$, $c''d''$,.... и по двумъ діагоналямъ AD, BC, были равны между собою, то въ такомъ случаѣ квадратъ принимаетъ названіе *волшебнаго*. Вотъ примѣры:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

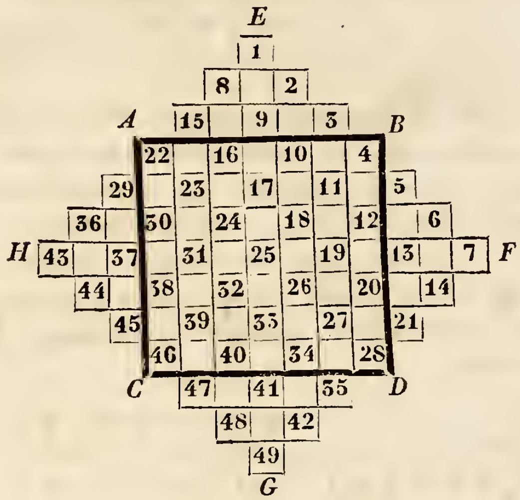
1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

16	14	8	2	25
3	22	20	11	9
15	6	4	23	17
24	18	12	10	1
7	5	21	19	13

Въ первомъ квадратѣ сумма каждаго изъ горизонтальныхъ, вертикальныхъ и діагональныхъ рядовъ равна 15, во второмъ 34, а въ третьемъ 65.

Въ вѣка суевѣрія, такому искусственному расположенію чиселъ приписывали различныя волшебныя свойства, и часто употребляли на талисманахъ. Вотъ, безъ сомнѣнія, причина, по которой такого рода квадраты названы *волшебными*. Волшебные квадраты раздѣляются на *нечётные* и *чётные*. Мы ограничимся краткимъ изложеніемъ способа для составленія каждаго изъ сихъ двухъ родовъ квадратовъ. Начнемъ съ нечётныхъ, для которыхъ построеніе проще нежели для чётныхъ.

Составленіе нечетныхъ волшебныхъ квадратовъ. *Башетъ-де-Мезиріакъ* въ своихъ *Problêmes plaisans et délectables*, напечатанныхъ въ 1624 году, предлагаетъ слѣдующій способъ, который приложимъ къ квадрату отъ 7, то есть къ 49. — Составимъ квадратъ *ABCD*



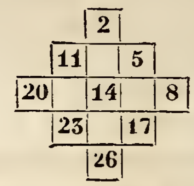
и разложимъ его на 49 квадратиковъ или клетокъ. На каждомъ изъ четырехъ боковъ квадрата строимъ уступчатые треугольники *ABE, BDF, DCG, CAH*, и получаемъ такимъ образомъ новый, уступчатый квадратъ *EFGH*; въ этомъ квадратѣ пишемъ въ рядахъ, параллельныхъ діагонали *AD*, числа 1, 2, 3, 4,.... до 49 по порядку, такъ какъ явствуетъ изъ нашего чертежа. Потомъ, опускаемъ фигуру *ABE* до *CD*; цифры 1, 8, 2, 15, 9, 3 займутъ пустыя клетки въ нижней части квадрата *ABCD*. Фигуру *CDG* подымаемъ такъ, чтобы *CD* совпадала съ *AB*, и числа 47, 41, 35, 48, 42, 49 займутъ опять пустыя клетки первоначальнаго квадрата. Дѣлаемъ то же самое съ фигурою *BDF*, то есть, не переворачивая ея, переносимъ такъ, чтобы линія *BD* совпадала съ *AC*, а фигуру *ACH* двигаемъ до совпаденія стороны *AC* съ *BD*; такимъ образомъ всѣ пустыя клетки квадрата *ABCD* наполнятся цифрами, находящимися въ уступчатыхъ треугольникахъ, и мы получимъ слѣдующій волшебный квадратъ:

A *B*

22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

C *D*

Башетъ присовокупляетъ къ этому, что вмѣсто ряда натуральныхъ чиселъ 1, 2, 3,.... можно брать какую угодно ариѳметическую прогрессію. Напримѣръ положимъ, что желаемъ составить волшебный квадратъ изъ девяти чиселъ 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26; по его правилу найдемъ тотчасъ



11	26	5
8	14	20
23	2	17

Можно замѣтить, что для каждаго квадратнаго числа членовъ ариѳметической прогрессіи существуетъ множество различныхъ волшебныхъ квадратовъ. Напримѣръ, изъ чиселъ 1, 2, 3,.... до 25 составляются между прочими слѣдующіе волшебные квадраты:

1	20	23	16	5
4	18	9	12	22
15	7	13	19	11
24	14	17	8	2
21	6	3	10	25

11	24	17	10	3
4	12	25	18	6
7	5	13	21	19
20	8	1	14	22
23	16	9	2	15

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Составленіе четныхъ волшебныхъ квадратовъ. Во первыхъ замѣтимъ, что чётный волшебный квадратъ изъ четырехъ чиселъ 1, 2, 3, 4 невозможенъ; простѣйшій послѣ $2^2 = 4$ будетъ $4^2 = 16$, который допускаетъ множество видовъ; и такъ какъ волшебный квадратъ изъ 16 чиселъ служитъ основаніемъ дальнѣйшимъ чётнымъ волшебнымъ квадратамъ, то сперва покажемъ одинъ изъ способовъ, служащихъ для его составленія. — Въ квадратѣ *ABCD*

A *B*

1			4
	6	7	
	10	11	
13			16

C *D*

A *B*

	15	14	
12			9
8			5
	3	2	

C *D*

наполняемъ сперва діагональныя клетки, считая по порядку 1, 2, 3,... до 16 отъ угла *A*, и пропуская числа 2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15, не находящіяся на діагоналяхъ. Чтобы наполнить остальные квадратики, начинаемъ съ угла *D*, и считаемъ отъ правой руки къ лѣвой 1, 2, 3, 4, 5,... пропуская тѣ числа, которыя уже были написаны. Совмѣщая эти два квадрата, получится слѣдующій волшебный квадратъ для 16:

(A)

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Этотъ квадратъ, какъ уже сказано выше, служитъ для построенія другихъ чётныхъ. Очевидно, что вмѣсто чиселъ 1, 2, 3,.... до 16, можно взять 16 чиселъ сряду изъ какой угодно ариѳметической прогрессіи, и составить изъ нихъ, по предложенному сей-часъ правилу, волшебный квадратъ. Напримѣръ, еслибы имѣли слѣдующія 16 чиселъ: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, то поставивъ въ квадратѣ (*A*) 11 вмѣсто 1, 12 вмѣсто 2, 13 вмѣсто 3,..... 26 вмѣсто 16, нашли бы:

(B)

11	25	24	14
22	16	17	19
18	20	21	15
23	13	12	26

въ которомъ сумма каждаго горизонтальнаго, вертикальнаго и діагональнаго ряда равна 74. Положимъ теперь что желаемъ построить волшебный квадратъ для 36. Для этого, составляемъ волшебный квадратъ изъ шестнадцати среднихъ чиселъ въ ряду 1, 2, 3,...... до 36. Первое изъ этихъ среднихъ чиселъ очевидно получится раздѣливъ разность 36 — 16 на 2, и придавъ къ частному единицу. Такимъ образомъ найдутся слѣдующія шестнадцать среднихъ чиселъ: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, которыя уже были сей-часъ расположены въ волшебномъ порядкѣ. Крайнія 20 чиселъ располагаемъ въ двухъ рядахъ

(1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
(2) 36, 35, 34, 33, 32, 31, 30, 29, 28, 27

такъ, чтобы сумма двухъ соотвѣтствующихъ чиселъ равнялась 37. — Теперь заключаемъ квадратъ (*B*) въ рамку *abcd*

a *b*

1	35	34	30	5	6
33	11	25	24	14	4
8	22	16	17	19	29
9	18	20	21	15	28
27	23	13	12	26	10
31	2	3	7	32	36

c *d*

Съ небольшимъ вниманіемъ замѣчаемъ, какимъ образомъ должны быть расположены цифры въ клеткахъ, составляющихъ рамку *abcd*. Пишемъ 1 и 6 по угламъ *a* и *b* и соотвѣтствующія имъ числа 36 и 31 въ противуположныхъ углахъ *d* и *c*, дабы суммы по двумъ діагоналямъ рамки были одинаковы, именно 37. Такъ какъ теперь имѣемъ уже внизу два большія числа изъ ряда (2), то пишемъ вверху два ближайшія большія числа 35 и 34, а внизу соотвѣтствующія имъ 2 и 3. Потомъ ставимъ внизу большое число 32, а вверху 5 и 30, внизу же 7; такимъ образомъ горизонтальные ряды *ab* и *cd* наполнены, и сумма каждаго изъ нихъ равна 111. Боковыя клетки рамки наполняются уже самымъ простымъ образомъ: остающіяся числа въ (1) и (2) рядахъ размѣщаютъ такъ, чтобы съ лѣвой стороны было столько большихъ, сколько и малыхъ, то есть, въ настоящемъ случаѣ по-три. То же самое должно разумѣть и о боковыхъ клеткахъ съ правой стороны. При этомъ должно наблюдать: чтобы противъ каждаго числа стояло соотвѣтствующее ему, напримѣръ, 33 противъ 4, число 29 противъ 8, и такъ далѣе, и чтобы сумма каждаго боковаго ряда равнялась 111. Всѣ эти условія выполнены въ приведенномъ сей-часъ квадратѣ. Руководствуясь показанными правилами, легко построить магическій квадратъ для 64, основываясь уже на найденномъ квадратѣ 36. Потомъ для квадрата 100, и такъ далѣе. Приведенный способъ придуманъ *де ла Гиромъ*. Когда вмѣсто ариѳметической прогрессіи примемъ геометрическую, и будемъ числа сей послѣдней распредѣлять въ квадратѣ, по изложеннымъ сей-часъ правиламъ, то получимъ такъ называемые *геометрическіе волшебные квадраты (carrés magiques géométriques)*; свойство ихъ будетъ такое, что произведенія получаемыя чрезъ перемноженіе всѣхъ чиселъ, составляющихъ каждый горизонтальный, вертикальный и діагональный рядъ, будутъ равны между собою. Положимъ, что даны 9 членовъ геометрической прогрессіи 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, и желаемъ составить изъ нихъ геометрическій волшебный квадратъ. Такъ какъ 9 число нечётное, то употребляемъ предложенное для этого случая построеніе:

		3		
	81		9	
2187		243		27
	6561		729	
		19683		

отъ котораго переходимъ къ квадрату

81	19683	9
27	243	2187
6561	3	729

Для чётнаго геометрическаго волшебнаго квадрата, возьмемъ 16 чиселъ сряду, напримѣръ, изъ геометрической прогрессіи 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768; по объясненнымъ правиламъ находимъ сперва

1			8
	32	64	
	512	1024	
4096			32768

а потомъ

1	16384	8192	8
2048	32	64	256
128	512	1024	16
4096	4	2	32768

Есть еще волшебные квадраты въ *гармонической пропорціи*. Смот. HARMONIQUE. Говоря о волшебныхъ квадратахъ, мы должны упомянуть, что математикъ *Созёръ (Sauveur)* разсматривалъ также и *волшебные кубы*. Подъ этимъ названіемъ онъ разумѣлъ кубъ, состоящій изъ кубическихъ клетокъ, которыя наполнялъ числами такимъ образомъ, что суммы всѣхъ чиселъ, заключающихся въ каждомъ изъ слоевъ, параллельныхъ тремъ основаніямъ куба, были равны между собою, а также и каждой изъ суммъ, получаемыхъ чрезъ сложеніе чиселъ принадлежащихъ шести слоямъ или плоскостямъ, проходящимъ чрезъ двѣ діагонали противуположныхъ основаній. *Геометрическій волшебный кубъ* тоже самое въ отношеніи ариѳметическаго куба, что *геометрическій* волшебный квадратъ въ разсужденіи ариѳметическаго. Читатели, желающіе ознакомиться съ симъ предметомъ, найдутъ всѣ надлежащія подробности въ *Mémoires de l'Académie Royale des sciences*, за 1710 годъ, въ статьѣ подъ заглавіемъ: Construction générale des quarrés magiques; par M. *Sauveur*. — *Эмануилъ Москопулъ (Moscopule)*, Греческій писатель, жившій въ XIV или XV вѣкѣ, сколько извѣстно, первый писалъ о *волшебныхъ квадратахъ*. Его сочиненіе, въ рукописи, находится въ Парижской Королевской Библіотекѣ. Въ книгѣ *Агриппы*, жившаго въ XVI вѣкѣ, и котораго современники подозрѣвали въ магіи, находимъ семь волшебныхъ квадратовъ для чиселъ отъ 3 до 9. Эти числа были предпочтены другимъ потому, что, по системѣ Агриппы, ихъ квадраты суть планетные. Квадратъ 3-хъ принадлежалъ Сатурну; 4-хъ, Юпитеру; 5-ти, Марсу; 6-ти, Солнцу; 7-ми, Венерѣ; 8-ми, Меркурію; и наконецъ, квадратъ 9-ти, Лунѣ. *Башетъ-де-Мезиріакъ*, имѣя только въ виду планетные квадраты Агриппы, ибо рукопись Москопула не была ему извѣстна, занялся изслѣдованіемъ волшебныхъ квадратовъ, и нашелъ способъ для составленія нечётныхъ волшебныхъ квадратовъ; но для чётныхъ, онъ не могъ придумать ничего удовлетворительнаго. Послѣ Башета, *Френиклъ* (*Frenicle*), извѣстный своею особенною проницательностію въ разысканіяхъ о свойствѣ чиселъ, предпринялъ новыя изслѣдованія по предмету волшебныхъ квадратовъ, и усовершенствовалъ ихъ теорію. При составленіи волшебныхъ квадратовъ, сверхъ обыкновенныхъ условій, онъ вводилъ еще новыя требованія, которыя дѣлали задачу болѣе затруднительною. Его трактатъ о волшебныхъ квадратахъ былъ изданъ уже послѣ его смерти *де ла Гиромъ*, въ 1693 году. Въ 1703 году Брюссельскій Каноникъ *Пуаньаръ (Poignard)* издалъ книгу о волшебныхъ квадратахъ, названныхъ имъ *carrés sublimes*. Въ этомъ сочиненіи заключаются очень остроумные пріёмы для построенія волшебныхъ квадратовъ изъ чиселъ составляющихъ прогрессіи ариѳметическія, геометрическія и гармоническія.

Де ла Гиръ (de la Hire) въ *Mémoires de l'Académie Royale des sciences* за 1705 годъ, предложилъ общій способъ для составленія нечётныхъ и чётныхъ квадратовъ; онъ основываетъ построеніе тѣхъ и другихъ на разложеніи предложеннаго квадрата на два другіе, которые называетъ *первоначальными (primitifs)*. *Г-нъ Совёръ (Sauveur)* занимался также этимъ предметомъ; изслѣдованія его помѣщены въ *Mémoires de l'Académie Royale des sciences*, 1710 года, въ статьѣ подъ заглавіемъ: *Construction générale des quarrés magiques*. Наконецъ, въ 1750 году, математикъ *д'Онсъ-анъ-Брэ (d'Onsen-Bray)* предложилъ новый способъ для составленія чётныхъ волшебныхъ квадратовъ, а послѣ него *Ралье-дез-Урмъ (Ralier-des-Ourmes)* усовершенствовалъ еще и обобщилъ прежніе способы. — Въ новѣйшее время аналисты оставили этотъ предметъ безъ вниманія, и, сколько намъ извѣстно, не сдѣлано никакихъ новыхъ попытокъ для усовершенствованія этой теоріи, довольно трудной, и вмѣстѣ съ тѣмъ доселѣ совершенно безполезной.

CARRER, или, употребительнѣе, **ÉLEVER AU CARRÉ.** (Ариѳ. и Алг.) **ВОЗВЫСИТЬ ВЪ КВАДРАТЪ.** Возвысить въ квадратъ какое нибудь число или количество значитъ, помножить то число или количество само на себя. Напримѣръ, для возвышенія 3 въ квадратъ, умножаемъ 3 на 3, и получаемъ число 9, изображающее квадратъ 3-хъ. Квадратъ двучленнаго количества $a+b$ будетъ:

$$(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2,$$

то есть: *квадратъ двучленнаго количества равенъ квадрату первой части, плюсъ удвоенному произведенію первой на вторую, и плюсъ квадрату второй части.*

CARRER. (Геом.) **ОПРЕДѢЛИТЬ, НАЙТИ ПЛОЩАДЬ, СПЛОЩАДИТЬ.** *Carrer un triangle, найти площадь треугольника; carrer une portion de la cycloïde, найти площадь части циклоиды.* Смот. AIRE.

CARTE. (Мат. Геогр.) **КАРТА.** Чертежъ, составленный по извѣстнымъ правиламъ проэктированія, изображающій земную поверхность, или нѣкоторую ея часть, съ означеніемъ морей, острововъ, государствъ, городовъ, озеръ, рѣкъ, горъ и проч.

Изобрѣтеніе географическихъ картъ относятъ къ VI столѣтію до Р. Х., и приписываютъ *Анаксимандру*, преемнику *Ѳалеса*, основавшаго въ Греціи Іонійскую Школу. *Страбонъ* повѣствуетъ, что Анаксимандръ представилъ своимъ соотечественникамъ чертежъ странъ и морей, посѣщаемыхъ Греческими путешественниками. Вотъ, по мнѣнію бо̀льшей части авторовъ, происхожденіе *географическихъ картъ*.

Cartes universelles или mappemondes. Всеобщія карты или полушарія. Карты, на коихъ изображена вся поверхность земли.

Cartes particulières или cartes spéciales. Частныя, спеціальныя карты, изображающія цѣлое Государство или только нѣкоторую его часть.— Эти двухъ родовъ карты называются *Географическими*, для отличенія ихъ отъ *Гидрографическихъ* или *Морскихъ картъ*, на которыхъ изображаютъ моря, острова, берега, мели, подводные камни, маяки, и проч.

Cartes de Mercator. Меркаторскія карты. Смот. RÉDUITES (CARTES).

Carte itinéraire. Путевая, дорожная, почтовая карта. Cartes célestes; Небесныя карты. Carte militaire; Военная карта.

CARTÉSIANISME. КАРТЕЗІАНИЗМЪ. Система Физики, предложенная *Декартомъ*, и извѣстная подъ наименованіемъ *системы вихрей*. Смот. TOURBILLONS (SYSTÈME DES).

CARTÉSIENS. КАРТЕЗІАНЫ. Послѣдователи ученію *Декарта*. Смот. выше.

CAS IRRÉDUCTIBLE DU TROISIÈME DEGRÉ или просто, **CAS IRRÉDUCTIBLE.** (Алг.) **НЕПРИВОДИМЫЙ, НЕРАЗРѢШИМЫЙ СЛУЧАЙ.** Смот. CARDAN (RÈGLE DE).

CAS. (Исч. Вѣр.) **СЛУЧАЙ.** *Cas favorables, благопріятные случаи; cas défavorables, неблагопріятные случаи.* Смот. PROBABILITÉS, CHANCE.

CASCADES (MÉTHODE DES). СПОСОБЪ КАСКАДЪ, УСТУПОВЪ. Такъ назвалъ Французскій математикъ *Ролль* придуманный имъ способъ для рѣшенія численныхъ алгебрическихъ уравненій. Такъ какъ способъ каскадъ примѣчателенъ самъ по себѣ, въ особенности когда примемъ въ соображеніе несовершенство алгебрическаго анализа того времени, къ которому относится его открытіе, и какъ съ другой стороны, ни одинъ авторъ, сколько намъ извѣстно, не писалъ объ немъ удовлетворительнымъ образомъ, то мы думаемъ, что наши читатели не сочтутъ излишними тѣ подробности, въ которыя мы войдемъ по сему предмету. При такомъ изложеніи, мы будемъ по возможности придерживаться самого автора, сохраняя даже и нѣкоторыя изъ наименованій, употребленныхъ имъ *).

Прежде всего Ролль приготовляетъ предложенное уравненіе такъ, чтобы коэффиціентъ у высшей степени неизвѣстной, равнялся *единицѣ*, и чтобы коэффиціенты того уравненія, расположеннаго по нисходящимъ степенямъ неизвѣстной, были попеременно положительные и отрицательные.

Напримѣръ, если бы имѣли уравненіе

$$2x^3 - 3x^2 - 5x + 10 = 0,$$

то помноживъ его на $2^2 = 4$, и положивъ $2x = y$, получили бы

$$y^3 - 3y^2 - 10y + 40 = 0.$$

Теперь, для преобразованія даннаго уравненія въ такое, въ которомъ бы коэффиціенты были попеременно положительные и отрицательные, стоитъ только взять положительнымъ образомъ наибольшій изъ отрицательныхъ коэффиціентовъ, и придать къ нему единицу; потомъ положить неизвѣстную даннаго уравненія, равною найденному числу, безъ новой неизвѣстной. И такъ, въ настоящемъ случаѣ, въ которомъ наибольшій отрицательный коэффиціентъ есть 10, получимъ

$$y = 11 - z.$$

Подстановленіе этой величины y въ предыдущее уравненіе обратитъ его въ слѣдующее:

$$z^3 - 30z^2 + 287z - 898 = 0,$$

въ которомъ дѣйствительно знаки передъ коэффиціентами удовлетворяютъ требуемому условію.

Очевидно, что послѣ такого преобразованія, уравненіе не можетъ имѣть корней отрицательныхъ; они только могутъ быть или положительные, или мнимые.

Теперь условимся въ нѣкоторыхъ наименованіяхъ, употребляемыхъ Роллемъ.

*) Способъ, о которомъ идетъ рѣчь, изложенъ со всѣми возможными подробностями въ сочиненіи Ролля: *Traité d'Algèbre, ou principes généraux pour résoudre les questions de Mathématique. Par M. Rolle, de l'Académie Royale des Sciences, et Professeur en Mathématiques. Paris* 1690.

Онъ называетъ нуль *малою ипотезою (petite hypothèse)*; *большая ипотеза (grande hypothèse)* получается, придавъ единицу къ наибольшему изъ отрицательныхъ коэффиціентовъ предложеннаго уравненія, взятому съ положительнымъ знакомъ; и такъ, *большая ипотеза* предыдущаго уравненія есть 899. Если коэффиціентъ у высшей степени неизвѣстной не единица, а другое число, напримѣръ a, то большая ипотеза получится, раздѣливъ наибольшій изъ отрицательныхъ коэффиціентовъ, взятый положительнымъ образомъ, на a, и придавъ къ частному единицу, или, если покажется удобнѣе, число большее единицы. Замѣтимъ, что *малая* и *большая ипотезы* не иное что, какъ предѣлы положительныхъ корней даннаго уравненія.

Средними ипотезами (hypothèses moyennes) уравненія называются числа такого свойства, что между каждыми двумя смежными изъ нихъ заключается только одинъ корень предложеннаго уравненія. И такъ, если, сверхъ двухъ крайнихъ ипотезъ, будутъ извѣстны и всѣ среднія, то, выражаясь по нашему, корни уравненія будутъ отдѣлены.

Наименьшая изъ всѣхъ ипотезъ, то есть *нуль*, называется *первою ипотезою*, ближайшая — *второю*; непосредственно слѣдующая за второю — *третью*, и такъ далѣе, до большой ипотезы.

Недостаточными корнями (*racines défaillantes*) Ролль называетъ мнимые и равные вещественные корни; въ послѣднемъ случаѣ, онъ принимаетъ всѣ равные корни за одинъ, и называетъ ихъ *недостаточными корнями перваго рода*, а мнимые корни называетъ *недостаточными втораго рода* (*racines défaillantes de première et de seconde espèce*).

Возьмемъ теперь уравненіе

$$(1)\quad x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - \ldots \pm gx^2 \mp hx \pm i = 0;$$

помножимъ каждый членъ на показателя неизвѣстной x, потомъ раздѣлимъ всѣ члены на x, и уравнивъ нулю происшедшее отъ сихъ дѣйствій выраженіе, получимъ

$$(2)\quad mx^{m-1} - (m-1)ax^{m-2} + (m-2)bx^{m-3} - \ldots \pm 2gx \mp h = 0.$$

Производя надъ этимъ уравненіемъ тѣ же дѣйствія, и раздѣляя еще на 2, получимъ

$$(3)\quad \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2} - \frac{(m-1)(m-2)}{2}ax^{m-3} + \frac{(m-2)(m-3)}{2}bx^{m-4} - \ldots \pm g = 0.$$

Повторяя тѣ же самыя дѣйствія, и раздѣляя на 3, найдемъ

$$(4)\ \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3}ax^{m-4}+\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3}bx^{m-5}-\ldots=0,$$

и такъ далѣе, пока не дойдемъ до линейнаго выраженія относительно x.

Уравненія (1), (2), (3), (4).... называются *каскадами.* Уравненіе первой степени именуется *первою каскадою*, второй степени — *второю каскадою*, третей степени — *третею каскадою*, и такъ далѣе. Напримѣръ уравненіе

$$x^4-24x^3+198x^2-648x+473=0$$

доставляетъ слѣдующія каскады, которыя располагаются такимъ образомъ:

Первая каскада .... $4x-12=0$
Вторая каскада .... $6x^2-72x+198=0$
Третья каскада .... $4x^3-72x^2+396x-648=0$
Четверт. каскада $x^4-24x^3+198x^2-648x+473=0$.

Замѣтимъ мимоходомъ, что если изобразимъ предложенное уравненіе чрезъ $f(x)=0$, и предположимъ что оно степени m, то, употребляя знакоположеніе производныхъ функцій, послѣдовательныя каскады предложеннаго уравненія будутъ

1-ая каскада........ $\frac{f^{(m-1)}(x)}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdot(m-1)}=0$
2-ая каскада........ $\frac{f^{(m-2)}(x)}{1\cdot2.3\cdots(m-2)}=0$
3-ья каскада........ $\frac{f^{(m-3)}(x)}{1\cdot2\cdot3\cdots(m-3)}=0$
....
$(m-2)$-ая каскада............ $\frac{f''(x)}{1.2}=0$
$(m-1)$-ая каскада............ $\frac{f'(x)}{1}=0$
m-ая каскада............ $f(x)=0$.

Условившись въ сихъ наименованіяхъ, приведемъ изъ Алгебры Ролля самое употребленіе каскадъ для рѣшенія уравненій:

„Корни каждой каскады принимаются за сред„нія ипотезы слѣдующей каскады.

„Когда всѣ ипотезы одной каскады будутъ „извѣстны, то беремъ первую ипотезу со вто„рою; вторую съ третею, третью съ чет„вертою, и такъ далѣе; каждое дѣйствіе такого „рода будетъ служить для опредѣленія корней „слѣдующихъ каскадъ.

„*Примѣръ.* Если бы имѣли уравненіе y^3-57y^2 „$+936y-3780=0$ *), то получили бы слѣдую„щія три каскады:

$$3y-57=0$$
$$3y^2-114y+936=0$$
$$y^3-57y^2+936y-3780=0.$$

„Изъ первой каскады выводимъ $y=19$. И „такъ, 19 есть средняя ипотеза слѣдующей ка„скады: крайнія ея ипотезы суть: 0 и 39. И „такъ 0, 19, 39 суть ипотезы каскады $3y^2-114y$ „$936=0$.

„Посредствомъ двухъ первыхъ ипотезъ 0 и „19 найдемъ, что 12 есть одинъ изъ корней вто„рой каскады; когда возьмемъ двѣ ипотезы 19 и „39, то усмотримъ, что другой ея корень ра„венъ 26; и такъ 12 и 26 суть корни второй ка„скады. Такъ какъ сіи послѣдніе могутъ быть „принимаемы за среднія ипотезы третей кас„кады, для которой крайнія ипотезы будутъ „0 и 3781, то, для этой третей каскады, сово„купность ипотезъ будетъ 0, 12, 26, 3781. Что„бы найти ея корни, расматриваемъ пары ипо„тезъ 0, 12; 12, 26; 26, 3781. Первая пара до„ставляетъ корень 6, вторая даетъ 21, а третья, „30. И такъ 6, 21 и 30 суть корни третей „каскады, или, что всё равно, предложеннаго у„равненія.

„Когда каскада имѣетъ *дѣйствительные кор„ни* (*racines effectives* **), то ипотезы этой каскады доставляютъ попеременно + и —.

„Если совокупность дѣйствительныхъ корней „будетъ число чётное, то первая средняя ипо„теза доставитъ —, вторая +, третья —, „четвертая +, и такъ далѣе до послѣдней сред„ней ипотезы, доставляющей знакъ —.

„Но ежели совокупность дѣйствительныхъ „корней выражается числомъ нечётнымъ, то „первая средняя ипотеза доставляетъ +, вто„рая —, третья +, четвертая —, и такъ да„лѣе до послѣдней средней ипотезы, которая „должна доставить знакъ —.

---

*) Ролль въ уравненіяхъ вмѣсто знака равенства =, употреблялъ слѣдующій: ∞; вмѣсто 0 (нуля) онъ писалъ θ.

**) Подъ наименованіемъ *racines effectives* Ролль разумѣлъ *корни вещественные неравные*, и, сверхъ того, *положительные*. И такъ, уравненіе x^3-4x^2+5x-2 имѣетъ въ этомъ смыслѣ только *два корня дѣйствительныхъ*, именно 1 и 2.

*

„Если расположимъ знаки по два въ такомъ „порядкѣ:

Для чётныхъ степеней: $- + \mid - + \mid -$ и проч.

Для нечётныхъ степеней: $+ - \mid + - \mid +$ и проч.

„то должно будетъ замѣтить, что если двѣ „ипотезы, которыя должны бы привести къ „одной изъ этихъ паръ знаковъ, таковы, что та „или другая не доставляетъ + или —, противно сказанному, то каскада, для которой это „случится, будетъ имѣть *недостаточные корни* „*(racines défaillantes)*. Сіи послѣдніе бываютъ двухъ родовъ.

Недостаточные корни перваго рода.

„Если случится, что ипотезы доставляютъ „0 вмѣсто + или —, то каждая изъ сихъ ипо„тезъ будетъ корнемъ той каскады, въ которую „производится подстановленіе; въ такомъ слу„чаѣ эта каскада будетъ имѣть столько недо„статочныхъ корней перваго рода, сколько бу„детъ различныхъ ипотезъ, обращающихъ ее въ „0. И такъ, безполезно будетъ сравнивать та„кую ипотезу съ слѣдующею; очевидно также, „что для слѣдующей каскады число ипотезъ у„меньшится.

„*Примѣръ.* Пусть будетъ уравненіе $z^3 - 15z^2$ „$+ 72z - 108 = 0$; найдутся слѣдующія каскады:

$$z - 5 = 0$$
$$z^2 - 10z + 24 = 0$$
$$z^3 - 15z^2 + 72z - 108 = 0.$$

„Первая изъ нихъ доставляетъ $z = 5$; и такъ, „получимъ для ипотезъ второй каскады 0, 5, 11. „Посредствомъ 0 и 5 находимъ $z = 4$, а посред„ствомъ 5 и 11, $z = 6$ для корней второй каскады. „Слѣдовательно, ипотезы 3-й каскады будутъ 0, „4, 6, 109. Употребляя ипотезы 0 и 4, нахо„димъ корень $z = 3$; но когда станемъ разсматри„вать ипотезы 4 и 6, то увидимъ, что 6 есть „корень 3-ей каскады; и такъ, ипотезы 4 и 109 „дѣлаются излишними, потому что онѣ смежны „съ 6. Отсюда заключаемъ, что предложенное „уравненіе имѣетъ только два корня 3 и 6; третій „же корень недостаточный *).

Недостаточные корни втораго рода.

„Если подстановленіе ипотезы, въ противность „сказанному выше, не доставитъ ни *нуля* ни „*плюса* или *минуса*, то должно будетъ считать „два недостаточные корня въ той каскадѣ, въ „которую были подставлены эти ипотезы; „столько же недостаточныхъ корней будетъ въ „каждой изъ слѣдующихъ каскадъ, и для каждой „пары знаковъ, для которой это случится; и „такъ, если имѣемъ три пары знаковъ, то дол„жно будетъ считать шесть недостаточныхъ „корней въ каждой изъ слѣдующихъ каскадъ. На „практикѣ, достаточно обращать вниманіе толь„ко на ту каскаду, въ которую подставили ипо„тезы. Корни, недостающіе такимъ образомъ, „называются *недостаточными корнями втора*„*го рода.*

„*Примѣръ.* Имѣя уравненіе $z^3 - 9z^2 + 28z - 30$ „$= 0$, составляемъ его каскады

$$z - 3 = 0$$
$$z^2 - 6z + 9\tfrac{1}{3} = 0$$
$$z^3 - 9z^2 + 28z - 30 = 0;$$

„изъ первой выводимъ $z = 3$; и такъ 0, 3, 7 бу„дутъ ипотезы второй каскады. Но вторая „ипотеза, то есть 3, доставляетъ + вмѣсто „—; слѣдовательно, разсматриваніе ипотезъ 3 и „7 дѣлается излишнимъ, и мы заключаемъ, что „уравненіе $z^2 - 6z + 9\frac{1}{3} = 0$, а равно и слѣдующее „за нимъ, имѣютъ два корня недостаточные „втораго рода. И такъ, третья каскада имѣетъ „только одинъ дѣйствительный корень.

„Но въ практикѣ достаточно знать, что вто„рая каскада ничего не доставляетъ третей, „такъ что, для опредѣленія корня 3-ей каскады, „имѣемъ только ея крайнія ипотезы. Эти ипо„тезы суть 0 и 31, посредствомъ которыхъ на„ходимъ $z = 3$. И такъ 3 есть единственный „дѣйствительный корень предложеннаго урав„ненія.

Къ этой выпискѣ прибавимъ, что Ролль, въ своей *Алгебрѣ*, предлагаетъ два способа для опредѣленія корня раціональнаго, заключающагося между двумя смежными ипотезами. Эти способы, основанные на разсматриваніи такъ называемыхъ имъ: *moitiés accommodantes*, собственно говоря, не иное что, какъ послѣдовательныя подстановленія среднихъ чиселъ между двумя ипотезами, выводимыхъ по извѣстнымъ правиламъ. Ролль называетъ *первою принаровленною половиною (première moitié accommodante)* какого либо числа, ближайшее цѣлое число, заключающееся въ полови-

*) Очевидно, что этотъ корень равенъ также 6; и такъ, три корня предложеннаго уравненія суть 3, 6 и 6.

нѣ послѣдней цифры съ лѣвой стороны, съ столькими нулями, сколько цифръ въ предложенномъ числѣ, безъ одной. И такъ, первая принаровленная половина чиселъ 8753, 9708 есть 4000. Можно также принять 5000 за первую принаровленную половину числа 9708. Когда вмѣсто одной цифры съ лѣвой стороны принимаютъ въ соображенiе двѣ, три и проч., то получаютъ *вторую*, *третью....принаровленныя половины.* И такъ

1-ая принаровленная половина числа 8753 есть 4000
2-ая . . . . „ 4300
3-ья . . . . „ 4320
4-ая . . . . „ . . . . 4321.

Для опредѣленiя рацiональнаго корня уравненiя складываютъ ипотезы, заключающiя искомый корень, и отъ суммы ихъ берутъ первую принаровленную половину, которая изобразитъ новую ипотезу. То же самое должно будетъ произвести надъ двумя ближайшими ипотезами, доставляющими противные знаки, и продолжать эти дѣйствiя до тѣхъ поръ, пока не опредѣлится искомый корень. Если бы первыя принаровленныя половины, послѣ нѣкотораго числа дѣйствiй, привели насъ къ полученнымъ уже прежде ипотезамъ, то надлежало бы употребить вторыя половины, а въ случаѣ недостаточности сихъ послѣднихъ, третьи и дальнѣйшiя половины.

Для опредѣленiя иррацiональныхъ корней, Ролль предлагаетъ способъ, который объяснимъ на слѣдующемъ примѣрѣ:

Пусть будетъ уравненiе

$$x^2 - 6x + 3 = 0;$$

полагаемъ $x = \frac{z}{10}$ или $\frac{z}{100}$ или $\frac{z}{1000}$ и проч. смотря на степень точности, съ которою желаемъ опредѣлить корни. Положимъ, что довольствуемся приближенiемъ до *сотыхъ* частей, почему принимаемъ $x = \frac{z}{100}$. И такъ

$$\left(\frac{z}{100}\right)^2 - 6\left(\frac{z}{100}\right) + 3 = 0 \text{ или } z^2 - 600z + 30000 = 0.$$

Составляя каскады, получаемъ

$$z - 300 = 0$$
$$z^2 - 600z + 30000 = 0.$$

Ипотезы второй каскады будутъ 0, 300, 601. Посредствомъ 0 и 300 находимъ, что $z = 55$ обращаетъ 2-ую каскаду въ количество положительное, а $z = 56$, въ количество отрицательное, откуда заключаемъ, что z падаетъ между 55 и 56; слѣдовательно, x будетъ падать между $\frac{55}{100} = 0,55$ и $\frac{56}{100} = 0,56$. И такъ, величина x, равная 0,55; вѣрна до тысячныхъ. Для опредѣленiя третей десятичной цифры, надлежало бы принять $x = \frac{z}{1000}$, четвертой, $x = \frac{z}{10000}$, и такъ далѣе.

Чтобы сдѣлать способъ каскадъ удовлетворительнымъ, по крайней мѣрѣ въ теорическомъ отношенiи, оставалось еще разрѣшить одинъ случай, состоящiй въ слѣдующемъ: Положимъ, что корень какой ни есть каскады A, извѣстный намъ только по приближенiю, будучи подставленъ въ слѣдующую каскаду B, не доставляетъ того знака, который надлежало бы получить. Отсюда заключаемъ, или что корень каскады A не вычисленъ еще съ достаточною точностiю, или, что каскада B имѣетъ два недостаточные корня втораго рода. Но какъ отличить эти два случая одинъ отъ другаго? Вотъ правило, предлагаемое Роллемъ для достиженiя сей цѣли:

Если, по подставленiи въ каскаду B трехъ меньшихъ приближенныхъ величинъ корня каскады A, получатся выводы съ одинакими знаками, и вмѣстѣ съ тѣмъ противными тому, который бы надлежало получить, и если, сверхъ того, первыя цифры трехъ результатовъ подстановленiя будутъ одинаковы, а число превосходящихъ цифръ во второмъ результатѣ равно степени уравненiя, а въ третьемъ, удвоенной степени, то каскада B имѣетъ *недостаточные корни втораго рода.*

Пояснимъ это правило примѣромъ, который заимствуемъ изъ Алгебры Ролля.

Дано уравненiе

$$x^3 - 27x^2 + 237x - 504 = 0;$$

составляемъ его каскады

$$x - 9 = 0$$
$$x^2 - 18x + 79 = 0$$
$$x^3 - 27x^2 + 237x - 504 = 0.$$

Ипотезы второй каскады суть 0, 9, 19, посредствомъ которыхъ находимъ для нея одинъ корень между 7 и 8, а другой между 10 и 11. Принявъ 7 или 8 за одну среднюю ипотезу третей каскады, получаемъ знакъ $+$; но подставляя 10 или 11 не находимъ $-$. Изъ этого мы еще ничего не можемъ заключить о корняхъ третей каскады; надобно будетъ уточнить корень каскады $x^2 - 18x + 79 = 0$, заключающійся между предѣлами 10 и 11. Положивъ $x = \frac{z}{10}$, найдемъ

$$z^2 - 180z + 7900 = 0$$
$$z^3 - 270z + 23700z - 504000 = 0.$$

Корень первой изъ сихъ каскадъ заключается между 104 и 105. Подставляя сіи двѣ величины въ слѣдующую каскаду, опять не находимъ знака —, и, сверхъ того, выводъ подстановленія 104 въ каскаду третей степени будетъ + 165344.

Предполагая $z = \frac{z'}{10}$, найдемъ что каскада 2-й степени въ z', будетъ имѣть корень, заключающійся между числами 1041 и 1042, которыя опять не доставляютъ отрицательнаго знака. Число 1041, подставленное въ каскаду 3-ей степени въ z', доставляетъ + 165343221. Полагая еще $z' = \frac{z''}{10}$, найдемъ числа 10413 и 10414, не доставляющія —, а выводъ подстановленія меньшей ипотезы 10413 въ каскаду третей степени въ z'', будетъ + 165343151997. Итакъ, получимъ слѣдующія три числа:

165344
165343221
165343151997.

Здѣсь усматриваемъ: 1) что каждый изъ сихъ результатовъ начинается числомъ 16534; 2) второй результатъ заключаетъ три цифры лишнія противъ перваго, а третій, противъ втораго; при чемъ и уравненіе, въ которое подставляемъ ипотезы, есть третей степени. Отсюда заключаемъ о невозможности найти знакъ —, и слѣдовательно тѣмъ самымъ удостовѣряемся въ присутствіи двухъ недостаточныхъ корней втораго рода. Итакъ, предложенное уравненіе имѣетъ только одинъ дѣйствительный корень, коего ипотезы, какъ мы видѣли выше, суть 0 и 7.

Приводя это правило, Ролль сознается, что онъ вывелъ его только по *наведенію*. Любопытно подвергнуть способъ каскадъ, въ этомъ отношеніи, строгому изслѣдованію, ибо, если послѣднее правило окажется справедливымъ (что впрочемъ весьма сомнительно), то должно будетъ заключить, что уже въ концѣ XVII столѣтія Алгебра обладала способомъ правильнымъ, и удовлетворительнымъ, въ теорическомъ отношеніи, для рѣшенія алгебрическихъ уравненій.

Если собразимъ сказанное о способѣ каскадъ, то увидимъ, что этотъ способъ основанъ на слѣдующемъ предложеніи, называемомъ иногда *теоремою Ролля*.

Теорема. *Пусть будетъ*

$$f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

предложенное уравненіе и $f'(x)$, $f''(x)$ *первыя двѣ производныя отъ функціи* $f(x)$. *Если уравненіе* $f'(x) = 0$ *имѣетъ всѣ свои корни* $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ *вещественные, и если сверхъ того первообразная функція* $f(x)$ *и вторая ея производная* $f''(x)$, *для каждаго изъ этихъ корней, будутъ имѣть противные знаки, то всѣ корни уравненія* $f(x) = 0$ *будутъ также вещественные; сверхъ того, предположивъ что* $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots\ldots$ *и изображаютъ корни уравненія* $f'(x) = 0$, *написанные по порядку ихъ величинъ, начиная съ наименьшей, то между каждыми двумя смежными членами будетъ заключаться одинъ корень предложеннаго уравненія* $f(x) = 0$, *такъ что изобразивъ чрезъ* M *и* N *наименьшій и наибольшій его корни, а чрезъ* $a, b, c, \ldots l$, *всѣ остальные, расположенные по порядку ихъ величинъ, получимъ рядъ*

$$M, \alpha, a, \beta, b, \gamma, c, \ldots l, \mu, N,$$

въ которомъ $M < \alpha < a < \beta < b \ldots l < \mu < N$.

Доказательство. Примемъ въ соображеніе корни α и β уравненія $f'(x) = 0$. Мы предполагаемъ $f'(\alpha) = 0$ и $f'(\beta) = 0$, и сверхъ того

$$f(\alpha) \cdot f''(\alpha) < 0 \quad \text{и} \quad f(\beta) \cdot f''(\beta) < 0.$$

Перемноживъ послѣднія два неравенства, получимъ

$$f(\alpha)\, f(\beta)\, f''(\alpha)\, f''(\beta) > 0.$$

Но легко видѣть, что $f''(\alpha)$ и $f''(\beta)$ будутъ съ противными знаками; и дѣйствительно, изъ уравненій

$$f'(\alpha + \varepsilon) = \varepsilon f''(\alpha) + \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2} f'''(\alpha) + \ldots\ldots$$
$$f'(\beta) = 0$$
$$f'(\beta + \omega) = \omega f''(\beta) + \frac{\omega^2}{1 \cdot 2} f'''(\beta) + \ldots\ldots$$

въ которыхъ ε и ω изображаетъ весьма малыя положительныя количества, усматриваемъ, что такъ какъ $f'(x)$, обращается одинъ разъ въ нуль между предѣлами $\alpha + \varepsilon$ и $\beta + \omega$, то $f'(\alpha + \varepsilon)$ и $f'(\beta + \omega)$ должны быть съ противными знаками, а слѣдовательно то же самое можно сказать и о членахъ $\varepsilon f''(\alpha)$ и $\omega f''(\beta)$, или, что все равно, о производныхъ втораго порядка $f''(\alpha)$ и $f''(\beta)$. Итакъ

$$f''(\alpha)\, f''(\beta) < 0,$$

въ слѣдствіе чего выведенное выше неравенство обратится въ такое:

$$f(\alpha)\, f(\beta) < 0.$$

Такъ какъ $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ съ противными знаками, то заключаемъ, что $f(x)$ будетъ обращаться въ нуль между предѣлами $x = \alpha$ и $x = \beta$. Слѣдовательно, уравненіе $f(x) = 0$ можетъ имѣть, между предѣлами α и β, нечётное число вещественныхъ корней, и, во всякомъ случаѣ, по крайней мѣрѣ одинъ. Точно такимъ образомъ увидимъ, что между β и γ, γ и δ, ... заключается, по ме́ньшей мѣрѣ, по одному вещественному корню того же уравненія. Но если примемъ въ соображеніе, что степень функціи $f'(x)$ только одною единицею ниже степени функціи $f(x)$, и если сверхъ того, докажемъ существованіе крайнихъ корней M и N, то надобно будетъ заключить, что между каждою парою α и β, β и γ, γ и δ..... заключается только *одинъ* вещественный корень уравненія $f(x) = 0$.

Чтобы доказать существованіе корня M, возьмемъ извѣстную формулу $f(x-h) = f(x) - hf'(x-\lambda h)$, въ которой $\lambda > 0$ и < 1 [Смот. TAYLOR (THÉORÊME DE)], и подставимъ въ нее, на мѣсто x, одинъ изъ корней уравненія $f(x) = 0$, заключающійся между предѣлами α и β; пусть a этотъ корень. Слѣдовательно, по причинѣ $f(a) = 0$, получимъ

$$f(a-h) = -hf'(a-\lambda h).$$

Но очевидно, что измѣняя постепенно h, произведеніе λh будетъ также измѣняться, и можно будетъ выбрать для h такую величину, какъ бы она впрочемъ велика не была, что разность $a-\lambda h = \alpha$, разумѣя подъ α наименьшій корень уравненія $f'(x) = 0$. И такъ, въ этомъ предположеніи $f'(a-\lambda h) = 0$, а слѣдовательно и $f(a-h) = 0$; отсюда заключаемъ, что $a-h$ есть корень уравненія $f(x) = 0$, и именно тотъ, который изображенъ у насъ буквою M, ибо, по свойству числа λ, очевидно будетъ $[a-h = M] < [a-\lambda h = \alpha]$.

Точно такимъ образомъ докажемъ существованіе корня N. Изобразивъ чрезъ l корень уравненія $f(x) = 0$, непосредственно ме́ньшій наибольшаго корня μ уравненія $f'(x) = 0$, будетъ $f(l) = 0$, и слѣдовательно

$$f(l+h) = hf'(l+\lambda h),$$

гдѣ, какъ и выше, $\lambda > 0$ и < 1. Выбравъ теперь h такъ, чтобы $l+\lambda h = \mu$, найдется $f'(l+\lambda h) = 0$, въ слѣдствіе чего $f(l+h) = 0$, откуда $N = l+h$ и $[l+h = N] > [l+\lambda h = \mu]$. —

Ролль, въ своей Алгебрѣ, предлагаетъ также способъ для рѣшенія уравненій съ нѣсколькими неизвѣстными. Приуготовительныя правила его способа имѣютъ цѣлію расположить въ удобномъ порядкѣ какъ искомыя величины, такъ и самыя уравненія. На сей конецъ Ролль составляетъ такъ называемое *древо направленія (arbre de direction)*. Потомъ, отъ древа направленія, онъ отдѣляетъ извѣстные разряды уравненій, и для рѣшенія этихъ уравненій, составляетъ, для каждаго разряда, особое древо. Каждое изъ нихъ Ролль называетъ *древомъ возврата* (*arbre de retour*).

Объяснимъ въ короткихъ словахъ смыслъ этихъ выраженій, и начнемъ съ древа возврата.

О Древѣ Возврата.

Когда имѣемъ нѣсколько уравненій (A), (B), (C)... съ столькими же неизвѣстными x, y, z,... и ежели эти уравненія такого вида, что одно изъ нихъ, напримѣръ (A), заключаетъ въ себѣ только одну неизвѣстную, положимъ x, другое (B) двѣ неизвѣстныя x и y, третье (C) три неизвѣстныя x, y и z, и такъ далѣе, то уравненія (A), (B), (C) ... располагаются посредствомъ *древа возврата*. Пусть будутъ даны, напримѣръ, слѣдующія три уравненія, удовлетворяющія означеннымъ сей часъ условіямъ:

$$(A)\qquad x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$
$$(B)\qquad y^2 - 8y + x + 10 = 0$$
$$(C)\qquad z^2 - 20z + y + x = 0.$$

Уравненіе (A) пишутъ на основаніи A древа возврата, какъ показано на чертежѣ 2 (Листъ III). Такъ какъ это уравненіе имѣетъ три корня, то отъ него произойдутъ три вѣтви, идущія къ тремъ узламъ B, C, D. Въ каждомъ изъ сихъ узловъ пишется второе уравненіе (B), и какъ оно второй степени, то каждому узлу B, C, D, будутъ соотвѣтствовать двѣ вѣтви. Такимъ образомъ получится шесть новыхъ узловъ, которые означимъ буквами E, F, G, H, I, K. Послѣднее уравненіе (C) пишемъ во всѣхъ послѣднихъ узлахъ; каждый изъ нихъ доставляетъ опять по двѣ вѣтви, ибо уравненіе (C) второй степени. Очевидно, что послѣднее число вѣтвей (въ настоящемъ случаѣ 12) изобразитъ число рѣшеній, допускаемыхъ предложенными уравненіями.

Составивъ такимъ образомъ древо возврата, рѣшаемъ сначала первое уравненіе A, и находимъ $x=1$, $x=2$, $x=3$; пишемъ эти рѣшенія вдоль вѣтвей, какъ показано на чертежѣ. Подставляемъ потомъ 1 вмѣсто x во всѣ уравненія, принадлежащія къ первой вѣтви, то есть, въ B, E и F; 2 вмѣсто x въ C, G и H; 3 вмѣсто x въ D, I и K.

Послѣ сихъ подстановленій, рѣшаемъ уравненія B, C, D, и, написавъ ихъ корни по вѣтвямъ, идущимъ отъ нихъ, подставимъ эти самые корни въ зависящія отъ нихъ уравненія, именно: одинъ корень уравн. B въ E, а другой въ F; одинъ корень уравн. C въ G, а другой въ H; одинъ корень уравн. D въ I, а другой въ K. Потомъ рѣшаемъ уравненія E, F, G, H, I, K, и пишемъ ихъ корни по послѣднимъ вѣтвямъ. Этимъ оканчивается разрѣшеніе предложенныхъ уравненій. Напримѣръ, положимъ, что разсматриваемъ изъ двѣнадцати только два рѣшенія, соотвѣтствующія вѣтвямъ, означеннымъ нумерами 5 и 6, то есть предполагаемъ, что идемъ по ACG; находимъ двѣ системы величинъ для x, y и z, именно $x=2$, $y=2$, $z=10-\sqrt{96}$ и $x=2$, $y=2$, $z=10+\sqrt{96}$. Точно такимъ образомъ получимъ остальныя десять рѣшеній, соотвѣтствующія путямъ ABE, ABF, ACH, ADI и ADK.

О древѣ направленія.

При нѣсколькихъ уравненіяхъ съ такимъ же числомъ неизвѣстныхъ, входящихъ произвольнымъ образомъ въ предложенныя уравненія, Ролль употреблялъ *древо направленія*, направляющее такъ сказать порядокъ дѣйствій, для постепеннаго исключенія неизвѣстныхъ.

Положимъ, напримѣръ, что имѣемъ шесть уравненій съ шестью неизвѣстными x, y, z, u, v, w, входящими въ нихъ въ какой угодно степени. Пусть, $A=0$, $B=0$, $C=0$, $D=0$, $E=0$, $F=0$ будутъ эти уравненія. Пишемъ ихъ въ первомъ узлѣ A (черт. 1. Листъ III), и составляемъ потомъ узелъ B. Изъ уравненій $A=0$, $B=0$ и проч. отбираемъ тѣ, которыя не заключаютъ въ себѣ неизвѣстной x; пусть будутъ $C=0$, $B=0$, $F=0$ эти уравненія; пишемъ ихъ въ узлѣ B.

Ищемъ общаго дѣлителя между выраженіями A, B, E, расположенными относительно x; если начнемъ разыскивать наибольшій общій дѣлитель между A и B, и предположимъ что остатокъ, не заключающій въ себѣ x, есть H, то должно будетъ сдѣлать $H=0$, и записать это уравненіе въ узлѣ B.

Потомъ, беремъ выраженіе E, заключающее также x, и, употребляя послѣдній дѣлитель предыдущаго дѣйствія, продолжаемъ разыскиваніе наибольшаго общаго дѣлителя, по x-су, до тѣхъ поръ, пока эта неизвѣстная не уничтожится. Предположивъ, что послѣднее дѣленіе доставило остатокъ K, дѣлаемъ $K=0$; и пишемъ это уравненіе въ узлѣ B. Такъ какъ неизвѣстная x, по предположенію, не входитъ въ другія уравненія, то должно будетъ уравнять нулю дѣлителя послѣдняго произведеннаго нами дѣленія. Пусть будетъ L этотъ дѣлитель; пишемъ $L=0$ вдоль вѣтви, соединяющей узлы A и B.

Если уравненія узла B имѣютъ надлежащій видъ для того, чтобы можно было расположить ихъ на древѣ возврата, то, прежде нежели приступимъ къ ихъ разрѣшенію, присовокупляемъ къ нимъ уравненіе $L=0$.

Но ежели уравненія узла B не имѣютъ требуемаго вида, и если напримѣръ неизвѣстная y находится въ уравненіяхъ $D=0$ и $H=0$, то составляемъ новый узелъ C, и пишемъ въ немъ остающіяся $C=0$, $F=0$, $K=0$.

Разыскивая общаго дѣлителя между D и H, и предположивъ что остатокъ, незаключающій въ себѣ y, есть M, дѣлаемъ $M=0$, и записываемъ это уравненіе въ узлѣ C.

Такъ какъ y уже не входитъ въ другія уравненія, то изобразивъ чрезъ N дѣлителя того дѣленія, при которомъ уничтожился y, полагаемъ $N=0$, и пишемъ это уравненіе на вѣтви, соединяющей узлы B и C.

Если бы уравненія узла C могли быть рѣшены на древѣ возврата, то надлежало бы написать $L=0$, $N=0$ въ началѣ тѣхъ уравненій. Если же они не удовлетворяютъ предписаннымъ на сей конецъ условіямъ, то составляемъ новый узелъ D.

Принимаемъ, напримѣръ, F и M для разысканія между ними общаго дѣлителя. Если, послѣ такого дѣйствія, найдется, что остатокъ незаключающій въ себѣ z, равенъ нулю, то поступаемъ слѣдующимъ образомъ: отъ узла C проводимъ другую вѣтвь, и составляемъ новый узелъ F, въ которомъ пишемъ уравненіе $C=0$.

Изобразивъ чрезъ P общаго наибольшаго дѣлителя между F и M, и означивъ чрезъ $Q = \frac{F}{P}$, $R = \frac{M}{P}$, пишемъ уравненія $Q = 0$, $R = 0$ въ одномъ изъ узловъ D, F, напримѣръ въ D. Въ такомъ случаѣ ставимъ уравненіе $P = 0$ въ узлѣ F.

Съ каждымъ узломъ D и F должно поступать отдѣльно, принимая каждый изъ нихъ особеннымъ древомъ направленія. Если бы уравненія котораго нибудь изъ сихъ узловъ могли быть рѣшены посредствомъ древа возврата, то къ заключающимся уже въ томъ узлѣ уравненіямъ, надлежало бы присоединить еще слѣдующія: $L = 0$, $N = 0$. Въ противномъ случаѣ, продолжаемъ объясненныя выше дѣйствія, пока не достигнемъ предполагаемой цѣли.

Если эта статья покажется слишкомъ длинною, то скажемъ въ свое оправданіе, что мы желали ознакомить нашихъ читателей съ нѣкоторыми пріёмами, бывшими въ употребленіи у прежнихъ алгебристовъ; подробности такого рода представляютъ всегда занимательность, и даже бываютъ поучительны при изученіи исторіи науки.

CASSINOIDE или **ÉLLIPSE CASSINIENNE.** (Астр.) **КАССИНОИДА** или **КАССИНІЕВЪ ЭЛЛИПСЪ.** Названіе, данное кривой линіи, предложенной *Иваномъ Доминикомъ Кассини* для изображенія орбитъ планетъ около солнца. Но такъ какъ астрономическія наблюденія весьма рѣдко согласуются съ такимъ видомъ орбитъ, то кривая, о которой говоримъ, и оставлена безъ вниманія. Отличительное свойство Кассиніева эллипса состоитъ въ томъ, что произведеніе радіусовъ векторовъ fM на $f'M$ (черт. 4, *N.* 1, Л. III), проведенныхъ изъ двухъ фокусовъ, f и f' къ какой ни есть точкѣ M кривой, есть постоянное, и равняется произведенію $\overline{Af} \times \overline{Af'} = \overline{Bf'} \times \overline{Bf}$. N^0 1, 2, 3, 4 и 5 (Черт. 4, Листъ III) представляютъ виды, въ которые переходитъ послѣдовательно Кассиніевъ эллипсъ по мѣрѣ того, какъ увеличивается отношеніе разстоянія фокусовъ ff' къ Af или Bf. Кривая N^0 1 довольно похожа на обыкновенный эллипсъ; N^0 2 и 3 совершенно различествуютъ отъ сего послѣдняго; $N^0$4 представляетъ два сопряженные эллипса, а N^0 5 двѣ сопряженныя точки. Кассиноида описана въ *Elémens d'Astronomie par M. Cassini le fils* стр. 149. Названіе Кассиніева *эллипса* принято по причинѣ аналогіи этой кривой съ обыкновеннымъ эллипсомъ, въ которомъ сумма радіусовъ векторовъ постоянная.

CATACAUSTIQUE. Смот. CAUSTIQUE

CATACOUSTIQUE или **CATAPHONIQUE. КАТАКУСТИКА, КАТАФОНИКА.** Часть Акустики, занимающаяся законами отраженныхъ звуковъ. И такъ, теорія *отголосковъ (échos)* и вообще звуковъ не прямо, но чрезъ отраженіе доходящихъ до нашего слуха, составляетъ предметъ Катакустики. Эта наука въ отношеніи къ Акустикѣ, имѣетъ то же значеніе, что *Катоптрика* въ отношеніи къ Оптикѣ. Смот. ACOUSTIQUE, ÉCHO, SON.

CATADIOPTRIQUE. прилаг. (Опт.) **КАТАДІОПТРИЧЕСКІЙ.** Подъ симъ наименованіемъ разумѣютъ всё то, что относится вмѣстѣ къ Катоптрикѣ и къ Діоптрикѣ, то есть, къ теоріи отраженія и преломленія свѣта. И такъ, оптическіе приборы, основанные на законахъ отраженія и преломленія свѣта, называются *катадіоптрическими.*

CATALOGUE D'ÉTOILES (Астр.) **КАТАЛОГЪ, СПИСКИ ЗВѢЗДЪ.** Главныя статьи, входящія въ каталоги звѣздъ, суть имена звѣздъ и созвѣздія, къ которымъ сіи звѣзды принадлежатъ; величина звѣздъ, ихъ среднее прямое восхожденіе и склоненіе, годовая прецессія и собственное ихъ движеніе въ прямомъ восхожденіи и склоненіи. Извѣстнѣйшіе каталоги звѣздъ:

Каталогъ 1022 звѣздъ *Иппарха*, помѣщенный въ Птолемеевомъ Алмагестѣ, есть древнѣйшій изъ всѣхъ, какіе намъ извѣстны.

Въ 18 столѣтіи лучшіе каталоги:

Лаланда: Histoire Céleste 1801 г. содержитъ 50000 звѣздъ.

Боде: Himmels-Atlas, содержитъ 17240 звѣздъ.

Піацци: Praecipuarum stellarum inerrantium positiones mediae, содержитъ 7000 звѣздъ.

Бесселя: Fundamenta Astronomiae 1818 года содержитъ 3222 звѣзды.

Байли (Baily): New tables for facilitating the computation of praecession, aberration and nutation 1827 г. содержитъ 2281 звѣзду.

Штруве: Stellarum duplicium et multiplicium mensurae micrometricae. Petropoli, 1837 *in-folio.*

CATAPHONIQUE. Смот. CATACOUSTIQUE.

CATAPULTE. СТРѢЛОМЁТЪ, КАТАПУЛЬТЪ. Древнее военное орудіе, служившее для бросанія большихъ стрѣлъ.

CATARACTE. КАТАРАКТА. Такъ назвалъ *Ньютонъ* кривую, описываемую частицами жидкости, вытекающей изъ горизонтальнаго отверстія сосуда. — Водопадъ, порогъ.

CATENAIRE или **CHAINETTE.** (Мех.) **ЦѢПНАЯ ЛИНІЯ.** Смот. CHAINETTE.

CATHÈTE. (Геом.) **КАТЕТЪ.** Подъ симъ словомъ разумѣютъ, преимущественно въ Катоптрикѣ, прямую линію, перпендикулярную къ другой линіи, или, вообще, къ какой нибудь поверхности. — Чаще всего называютъ *катетами* перпендикулярныя между собою стороны въ прямоугольномъ треугольникѣ.

CATHOLIQUE (RÈGLE). КАТОЛИЧЕСКИМЪ или **ВСЕОБЩИМЪ ПРАВИЛОМЪ** называлось правило, придуманное *Неперомъ*, для рѣшенія всѣхъ случаевъ, представляющихся въ сферическихъ прямоугольныхъ треугольникахъ. Это правило изложено въ книгѣ *Elementa mathescos universalis*, соч. *Вольфа*.

CATOPTRIQUE. КАТОПТРИКА. Часть Оптики, занимающаяся законами отраженія свѣта. Это слово происходитъ отъ Греческаго *κατα*, *противъ*, и *ὄπτομαι*, *вижу*.

Катоптрика преимущественно занимается законами лучей, отраженныхъ полированными поверхностями. Всѣ поверхности, въ бо́льшей или ме́ньшей степени, отражаютъ свѣтъ. Но, между твердыми тѣлами, только нѣкоторые металлы и нѣкоторыя соединенія ихъ способны принимать хорошую полировку. Даже отражающее свойство обыкновенныхъ зеркалъ, должно быть отнесено не къ поверхности стекла, а къ сортутѣ, покрывающей одну изъ его сторонъ.

Основной законъ Катоптрики состоитъ въ *равенствѣ угла паденія и угла отраженія*. Для нѣкоторыхъ подробностей объ статьяхъ, входящихъ въ составъ Катоптрики, отсылаемъ читателей къ словамъ: OPTIQUE, INCIDENCE (ANGLE D'), MIROIRS, ARC-EN-CIEL, TÉLESCOPE и проч.

Изъ числа авторовъ, занимавшихся Катоптрикой, въ древности, можно привести *Архимеда* (Смот. MIROIR ARDENT), *Алхазена* и *Вителліона* въ XI и XII столѣтіи; въ позднѣйшія времена, *Таке* (*Tacquet*), *Фабри*, *Якова Грегори*, *Ньютона*, *Исаака Баррова* (*Barrow*), *Гершелля*, *Шмита* и нѣкоторыхъ другихъ.

CATOPTRIQUE. КАТОПТРИЧЕСКІЙ. Относящійся къ Катоптрикѣ; происходящій чрезъ отраженіе лучей. *Télescope catoptrique*, *катоптрическій телескопъ*.

CAUSE. (Мех.) **ПРИЧИНА.** Слово, часто употребляемое въ Механикѣ, и подъ которымъ разумѣютъ все то, что только можетъ измѣнить состояніе тѣла въ отношеніи къ его движенію или покою. Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что въ Механикѣ, слова *причина* и *сила* должны быть принимаемы въ одномъ и томъ же значеніи. Для объясненія смысла, въ которомъ надлежало бы понимать эти слова въ Механикѣ, мы приведемъ здѣсь мнѣніе нашего знаменитаго геометра о движущихъ *причинахъ* или *силахъ*. Вотъ его слова: *)

„Нѣкоторые авторы думаютъ, что движущія „причины (*causes motrices*) могутъ быть подчи„нены той же самой мѣрѣ, какая допущена для „ихъ дѣйствій. По ихъ мнѣнію, причина должна „быть пропорціональна дѣйствію, и слѣдова„тельно, отношеніе двухъ дѣйствій, равно от„ношенію силъ, производящихъ эти самыя дѣй„ствія. Что касается до насъ, то, находясь въ „совершенномъ невѣдѣніи относительно движу„щихъ причинъ, изъ различія или равенства дѣй„ствій, мы не выводимъ никакого слѣдствія въ „разсужденіи причинъ, и не только не выдаемъ „за истину пропорціональность причинъ къ дѣй„ствіямъ, но даже не утверждаемъ, что силы „суть величины. Правда, двѣ силы, каково бы „ни было ихъ свойство, могутъ быть предполо„жены равными, если одна изъ нихъ можетъ, во „всякомъ случаѣ, замѣнить другую, не производя „никакой перемѣны; но что́ будетъ такое сила „бо́льшая или ме́ньшая другой? Двѣ силы, рав„ныя въ объясненномъ сей-часъ смыслѣ, конечно „произведутъ одинаковыя дѣйствія, если будутъ „приложены къ одному и тому же тѣлу при оди„наковыхъ обстоятельствахъ; но изъ равенства

*) *Cours de Mécanique à l'usage des élèves de l'Institut des Voies de Communication*, § 4. *Par M. Ostrogradsky*. Этотъ курсъ литографированъ.

„дѣйствій, произведенныхъ на одно и то же тѣло, „при одномъ и томъ же его состояніи, можно ли „что заключить относительно причинъ? Силы, „производя равныя дѣйствія, могутъ однакожъ, „по самой сущности своей, различествовать „между собою въ другихъ отношеніяхъ.

„Если намъ скажутъ, что имѣютъ въ виду „сравненіе силъ только въ отношеніи произво-„димыхъ ими дѣйствій, и сравниваютъ именно „силы, а не дѣйствія, то мы возразимъ на это, „что никакъ не можемъ допустить пропорціо-„нальности дѣйствій къ силамъ, развѣ только „опредѣлять дѣйствія не такъ, какъ мы ихъ „опредѣлили; ибо, по нашему опредѣленію, дѣй-„ствіе можетъ зависѣть не только отъ силы, „но еще и отъ состоянія тѣла, то есть, отъ „скорости и отъ направленія движенія, кото-„рыя тѣло имѣло бы въ слѣдствіе своей инерціи. „Въ такомъ случаѣ, одна и та же причина, или „двѣ причины одинаковыя во всѣхъ отношеніяхъ, „могутъ произвести различныя дѣйствія, ибо онѣ „не измѣнятъ одинаковымъ образомъ двухъ раз-„личныхъ состояній одного и того же тѣла. „Отсюда слѣдуетъ, что, по нашему опредѣленію „дѣйствія, мы можемъ принимать различными „двѣ силы равныя, или, разсматривать одну и „ту же силу какъ неравною самой себѣ, и, на-„противъ того, допускать равными двѣ силы „различныя между собою, если, дѣйствуя на два „различныя состоянія тѣла, онѣ будутъ измѣ-„нять эти состоянія одинаковымъ образомъ.

„И такъ, если непремѣнно хотимъ, чтобы „мѣра дѣйствія приличествовала и причинѣ, то „надобно будетъ допустить мѣру дѣйствія, от-„личную отъ принятой нами, или, въ нашей мѣрѣ „найти то̀, что̀ принадлежитъ силѣ и что́ за-„виситъ отъ состоянія тѣла; первая часть „этой мѣры будетъ приличествовать какъ силѣ, „такъ и дѣйствію. Но разысканіе, о которомъ „говоримъ, не относится къ Механикѣ; должно „предоставить его метафизикамъ. Для насъ, „нѣтъ никакой надобности знать, какимъ обра-„зомъ сила примѣняется къ состоянію тѣла для „произведенія своего дѣйствія: главное состоитъ „въ опредѣленіи положенія тѣла, побуждаемаго „какою нибудь силою, и мы думаемъ, что мѣра „дѣйствія, принятая нами, удовлетворяетъ во „всѣхъ отношеніяхъ этому требованію."

Чтобы смыслъ этой выписки былъ вполнѣ ясенъ для нашихъ читателей, то они должны прочитать первые три урока Курса Механики, о которомъ упомянуто выше.

CAUSES FINALES. (Метаф.) **КОНЕЧНЫЯ ПРИЧИНЫ.** Начало *конечныхъ причинъ* состоитъ въ опредѣленіи какихъ либо дѣйствій въ природѣ основываясь на цѣли, которую природа имѣла въ виду достигнуть производя сіи самыя дѣйствія. Приложеніе этого начала почти невозможно, ибо весьма трудно открыть цѣль по усматриваемымъ нами дѣйствіямъ. Напримѣръ, при движеніи, природа стремится употребить наименьшую живую силу; но эта цѣль не прежде могла быть угадана, какъ по опредѣленіи общихъ законовъ движенія, то есть, когда познаніе сказанной цѣли сдѣлалось для насъ совершенно излишнимъ. Начало, о которомъ говоримъ, было въ большомъ употребленіи у прежнихъ философовъ и физиковъ: они объясняли разныя явленія природы основываясь на началахъ метафизическихъ, иногда совершенно нелѣпыхъ; такъ, напримѣръ, восхожденіе воды въ насосахъ объяснялось *отвращеніемъ природы отъ пустоты.*

Несмотря на злоупотребленіе начала конечныхъ причинъ, оно можетъ быть иногда и полезно, если только будетъ употреблено съ большою осмотрительностію. Доказательствомъ того можетъ служить примѣръ *Лейбница*, который, въ своемъ: *Unicum opticae, catoptricae, et dioptricae principium* Act. erud. 1682, вывелъ законы движенія свѣта на основаніи этого способа умствованія.

CAUSTIQUE (SURFACE). (Опт.) **КОСТИЧЕСКАЯ, ЗАЖИГАТЕЛЬНАЯ, ЖГУЧАЯ ПОВЕРХНОСТЬ.** Когда лучи, исходящіе изъ одной точки, или параллельные между собою, падаютъ на кривую поверхность зеркала, то они, по отраженіи или по преломленіи, взаимно пересѣкаются, и точки ихъ пересѣченія образуютъ такъ называемыя *костическія поверхности.* Въ случаѣ отраженія лучей, геометрическое мѣсто ихъ пересѣченій называется *костическою поверхностію чрезъ отраженіе,* или *катакостическою поверхностію (surface caustique par réflexion* или *catacaustique),* а въ случаѣ преломленія лучей, образуемая поверхность именуется *костическою поверхностію чрезъ преломленіе* или *діакостическою* *поверхностію* (*surface caustique par réfraction* или *diacaustique*).

Courbe caustique, или просто, **caustique**. Зажигательная, жгучая или костическая кривая. Кривая, образуемая пересѣченіемъ лучей, отраженныхъ или преломленныхъ какою ни есть кривою, начерченною на поверхности зеркала. Костическія кривыя бываютъ также двухъ родовъ: *костическія чрезъ отраженіе* или *катакостики*, и *костическія чрезъ преломленіе* или *діакостики*.

Для ближайшаго объясненія костическихъ кривыхъ, приведемъ здѣсь аналитическое рѣшеніе одной задачи, относящейся къ ихъ теоріи. Положимъ, что дана плоская кривая LMK (черт. 6, Листъ III); на вогнутую часть этой кривой падаютъ лучи, параллельные оси OY; таковы, напримѣръ лучи PM, pm. Лучъ PM, падая на кривую, отражается отъ нея, и уголъ паденія равенъ углу отраженія; Смот. INCIDENCE (ANGLE D'); если проведемъ въ точкѣ M кривой касательную TT', то уголъ паденія будетъ PMT; составляемъ потомъ уголъ $T'MH$, равный углу PMT; линія MH изобразитъ отраженный лучъ. Сверхъ того, пусть будетъ MN нормальная къ предложенной кривой въ точкѣ M; очевидно, что углы PMN и NMH будутъ равны между собою. Если примемъ въ соображеніе безконечно близкій лучъ pm, параллельный линіи PM, то проведя нормальную mn, и сдѣлавъ уголъ nmh, равнымъ углу pmn, получимъ отраженный лучъ mh, который пересѣчется съ MH въ точкѣ B; геометрическое мѣсто подобныхъ точекъ пересѣченій каждыхъ двухъ смежныхъ отраженныхъ лучей, называется *катакостикою* или *костическою кривою чрезъ отраженіе*. Легко видѣть что отраженные лучи будутъ всѣ касательные къ катакостикѣ CBD.

Приступимъ теперь къ опредѣленію уравненія катакостики. Пусть будетъ $y=f(x)$ уравненіе предложенной кривой LMK, отнесенной къ прямоугольнымъ осямъ OX, OY. Разсматривая точку M на кривой, будетъ $OP=x$, $PM=y$, $\tang(PMN)=\frac{dy}{dx}$. Будемъ искать теперь уравненіе отраженнаго луча MH; такъ какъ онъ проходитъ чрезъ точку M, то, изобразивъ чрезъ X и Y перемѣнныя координаты прямой MH, найдемъ для нея уравненіе

$$Y-y=A(X-x),$$

гдѣ A изображаетъ тригонометрическій тангенсъ угла $MHX=\alpha$. И такъ $A=\tang\alpha$. Для опредѣленія $\tang\alpha$ замѣчаемъ, что $\alpha=90^\circ+2\varphi=(90^\circ+\varphi)+\varphi$, разумѣя подъ φ половину угла PMH; отсюда $\tang\alpha=\frac{\tang(90^\circ+\varphi)+\tang\varphi}{1-\tang(90^\circ+\varphi)\tang\varphi}$; но $\tang(90^\circ+\varphi)=-\frac{1}{\tang\varphi}$; слѣдовательно

$$\tang\alpha=\frac{-\frac{1}{\tang\varphi}+\tang\varphi}{1+\frac{1}{\tang\varphi}\cdot\tang\varphi}=\frac{\tang^2\varphi-1}{2\tang\varphi},$$

и какъ $\tang\varphi=\frac{dy}{dx}$, то получимъ

$$A=\tang\alpha=\frac{\frac{dy^2}{dx^2}-1}{2\frac{dy}{dx}}=\frac{dy^2-dx^2}{2dxdy}.$$

И такъ, уравненіе отраженнаго луча MH будетъ

$$Y-y=\frac{dy^2-dx^2}{2dxdy}(X-x),$$

или

$$(1)\qquad 2dxdy(Y-y)=(dy^2-dx^2)(X-x).$$

Чтобы перейти теперь къ уравненію смежнаго отраженнаго луча mh, надлежитъ въ уравненіи (1) измѣнить x въ $x+dx$, y въ $y+dy$, dy въ $dy+d^2y$. Что касается до величинъ X и Y, то онѣ должны быть принимаемы постоянными, ибо мы имѣемъ въ виду опредѣлить координаты точки B, общей обоимъ лучамъ MH и mh. И такъ положивъ $OA=\xi$, $AB=\eta$, и подставивъ ξ и η на мѣсто X и Y въ уравн. (1), надобно будетъ дифференцировать сіе послѣднее, принимая для простоты dx постояннымъ. Слѣдовательно

$$(2)\qquad 2dxdy(\eta-y)=(dy^2-dx^2)(\xi-x)\text{ и}$$

$$2dxd^2y(\eta-y)-2dxdy^2=2dyd^2y(\xi-x)-dx(dy^2-dx^2);$$

послѣднее уравненіе, по сокращеніи, доставитъ

$$(3)\qquad \eta-y=\frac{dy}{dx}(\xi-x)+\frac{dy^2+dx^2}{2d^2y}.$$

Уравненія (2) и (3) опредѣляютъ координаты ξ и η точки B въ функціи x и y. Изъ нихъ выводимъ

$$(4)\qquad \begin{cases}\xi=x-\frac{dxdy}{d^2y}\\ \eta=y-\frac{dy^2-dx^2}{2d^2y}.\end{cases}$$

Совокупляя эти формулы съ уравненіемъ предложенной кривой

$$(5)\qquad y=f(x),$$

найдемъ уравненіе между ξ и η, которое будетъ принадлежать искомой *катакостикѣ*.

Возьмемъ напримѣръ обыкновенную параболу, опредѣляемую уравненіемъ

$$y = \frac{l}{p}x - \frac{x^2}{2p};$$

p изображаетъ полу-параметръ, а l перпендикулярное разстояніе ея вершины B (черт. 7, л. III) отъ оси OY. Положимъ, что направленіе падающихъ лучей перпендикулярно къ оси OX. Таковъ лучъ PM, отражающійся по направленію MF. Диффенцируя предложенное уравненіе, найдемъ

$$dy = \frac{l-x}{p}dx$$

$$d^2y = -\frac{dx^2}{p};$$

подставляя эти величины въ уравненіе (4), получимъ

$$\xi = x - \frac{\frac{l-x}{p}\cdot dx^2}{-\frac{dx^2}{p}} = l$$

$$\eta = y - \frac{\left(\frac{l-x}{p}\right)^2 dx^2 - dx^2}{-2\frac{dx^2}{p}} = y + \frac{(l-x)^2 - p^2}{2p};$$

послѣднее выраженіе, въ слѣдствіе даннаго уравненія параболы, обратится въ $\frac{l^2}{2p} - \frac{p}{2}$; но замѣтимъ, что $\frac{l^2}{2p}$, по свойству параболы, равняется линіи AB. Слѣдовательно, отмѣтивъ буквою F фокусъ параболы, найдется $\eta = AF$, и какъ сверхъ того $\xi = l$, то очевидно, что катакостика предложенной параболы будетъ точка, совпадающая съ ея фокусомъ.

Легко показать, что катакостика полуциклоиды ABC (черт. 8 листъ III) есть цѣлая циклоида ADE. Дѣйствительно, уравненіе циклоиды ABC, отнесенной къ прямоугольнымъ осямъ AX, AY, будетъ

$$x = a\,.\,arc.sin \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a} - \sqrt{2ay - y^2},$$

гдѣ a изображаетъ радіусъ круга производящаго; Смот. CYCLOIDE. Слѣдовательно

$$dy = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y}\cdot dx$$

$$d^2y = -\frac{a}{y^2}\cdot dx^2,$$

и уравненія (4) примутъ видъ

$$\xi = x - \frac{\frac{\sqrt{2ay-y^2}\cdot dx^2}{y}}{-\frac{a}{y^2}dx^2} = x + \frac{y}{a}\sqrt{2ay - y^2}$$

$$\eta = y - \frac{\frac{2ay - y^2}{y^2}\cdot dx^2 - dx^2}{-2\frac{a}{y^2}dx^2} = \frac{2ay - y^2}{a}$$

откуда

$$\sqrt{2ay - y^2} = \sqrt{a\eta} \text{ и } x = \xi - \frac{y}{a}\sqrt{a\eta};$$

слѣдовательно

$$\xi - \frac{y}{a}\sqrt{a\eta} = a.arc.sin\sqrt{\frac{\eta}{a}} - \sqrt{a\eta} \text{ и}$$

$$\xi = a.arc\,sin\sqrt{\frac{\eta}{a}} - \frac{a-y}{a}\sqrt{a\eta};$$

но $a - y = \sqrt{a}.\sqrt{a-\eta}$, почему предыдущее уравненіе приметъ видъ

$$\xi = a.\,arc\,sin\sqrt{\frac{\eta}{a}} - \sqrt{a\eta - \eta^2},$$

и если вмѣсто $a\,.\,arc\,sin\sqrt{\frac{\eta}{a}}$ поставимъ равную ей величину $\frac{1}{2}a.arc\,sin\frac{\sqrt{a\eta - \eta^2}}{\frac{1}{2}a}$, то получимъ

$$\xi = \frac{1}{2}a.arc\,sin\frac{\sqrt{a\eta-\eta^2}}{\frac{1}{2}a} - \sqrt{a\eta - \eta^2}.$$

Это уравненіе очевидно принадлежитъ циклоидѣ, имѣющей относительно предложенной ABC, положеніе ADE. Радіусъ круга производящаго послѣдней, равенъ половинѣ радіуса a, то есть, полуоснованіе AE полуциклоиды ABC, равно цѣлому основанію циклоиды ADE.

Основываясь на подобныхъ соображеніяхъ, докажемъ, что катакостика и діакостика *логариѳмической спирали* (Смот. SPIRALE LOGARITHMIQUE) суть также спирали логариѳмическія, что было найдено *Яковомъ Бернулли*.

Если бы лучи свѣта не были параллельны между собою, а исходили изъ постоянной точки, то, слѣдуя способу подобному тому, который сей-часъ былъ изложенъ, нашли бы уравненія катакостики; и въ этомъ случаѣ уравненіе *діакостики* выводится такимъ же образомъ, какъ и выше, только вмѣсто того, чтобы принимать уголъ отраженія равнымъ углу паденія, надлежитъ выразить, что отношеніе *синусовъ* этихъ угловъ постоянное. Примѣчательнѣйшее геометрическое свойство костическихъ кривыхъ состоитъ въ томъ, что когда кривая линія, производящая костическую кривую, будетъ *алгебрическая* (Смот. COURBE ALGÉBRIQUE), то самая костика будетъ *спрямляема*, то есть, можно найти прямую линію, равную какой угодно дуги ея.

Для подробностей отсылаемъ читателей къ сочиненіямъ *Якова Бернулли* (за 1692 годъ), къ Разсужденію *Карре* (*Carré*), помѣщенному въ *Mémoires de l'Académie Royale des sciences* за 1703 годъ, а также къ извѣстному сочиненію *Analyse des infiniment petits, par M. le Marquis de l'Hôpital*, 1768 г.

Изобрѣтателемъ костическихъ кривыхъ считаютъ *Чирнгауза (Tschirnhaus)*, который, въ 1682 году, представилъ въ Парижскую Академію Наукъ способы для построенія этого рода кривыхъ; способы его были предложены безъ доказательствъ.

Названіе *костическихъ* (*жгучихъ*) *кривыхъ* взято отъ Греческаго *χαίω, жгу*, потому что солнечные лучи, собираясь на нихъ въ бо́льшемъ количествѣ, нежели во всякомъ иномъ мѣстѣ, могутъ зажигать, если костика занимаетъ довольно малое пространство, какъ напримѣръ въ параболическихъ зеркалахъ, для которыхъ костика совпадаетъ съ *фокусомъ* параболы, когда падающіе лучи предполагаются параллельными между собою.

CAVALLERI (MÉTHODE DE). КАВАЛЛЕРІЕВЪ СПОСОБЪ, СПОСОБЪ НЕДѢЛИМЫХЪ. См. INDIVISIBLE.

CAVE. Стар. сл. **ВОГНУТЫЙ,** то же, что CONCAVE (Смот.).

CE.

CÉLÉRITÉ. (Мех.) **ПОСПѢШНОСТЬ, БЫСТРОТА, СКОРОСТЬ.** Смот. VITESSE. Слово *célérité* рѣдко употребляется для означенія скорости, съ которою движется тѣло; оно, какъ въ Русскомъ языкѣ *поспѣшность*, употребляется только въ обыкновенномъ разговорѣ.

CENT. (Ариѳ.) **СТО.**

CENTAINE. (Ариѳ.) **СОТНЯ.**

CENTÉSIMALE (DIVISION). (Ариѳ.) **СТОГРАДУСНОЕ ДѢЛЕНІЕ.** Въ новой Французской метрической системѣ принимаютъ четверть окружности за единицу, и раздѣляютъ ее на 100 равныхъ частей, именуемыхъ *градами* (*grades*), или, употребительнѣе у насъ, *градусами*. И такъ, вся окружность по новой системѣ раздѣляется на 400 градусовъ вмѣсто 360. *Градусъ* по новой метрической системѣ подраздѣляютъ на 100 *минутъ*, минуту на 100 *секундъ*, и такъ далѣе. — Стоградусное дѣленіе хотя и было употреблено въ нѣкоторыхъ сочиненіяхъ извѣстными математиками, но, несмотря на это, нынѣ выходитъ изъ употребленія, и, весьма вѣроятно, будетъ со временемъ совсѣмъ оставлено.

CENTIÈME. (Ариѳ.) **СОТАЯ.** Одна часть цѣлаго, раздѣленнаго на сто равныхъ частей. *Un centième, deux, trois centièmes; одна сотая, двѣ, три сотыя.*

CENTIGRADE. СТОГРАДУСНЫЙ. *Division centigrade du cercle; стоградусное дѣленіе круга*; См. CENTÉSIMALE. — *Thermomètre centigrade*; *стоградусный, Цельсіевъ термометръ.* Смот. THERMOMÈTRE.

CENTIGRAMME.
CENTILITRE.
CENTIME.
CENTIMÈTRE.
См. MÉTRIQUE (NOUVEAU SYSTÈME).

CENTRAL. (Мех.) **ЦЕНТРАЛЬНЫЙ, СРЕДОТОЧНЫЙ;** къ центру относящійся. Смот. CENTRE.

CENTRALES (FORCES). (Мех.) **ЦЕНТРАЛЬНЫЯ, СРЕДОТОЧНЫЯ СИЛЫ.** Такъ называется одна или нѣсколько силъ, дѣйствующихъ на матеріальную точку, или на систему точекъ, когда эти силы направляются къ неподвижному центру. Смот. FORCE.

Со временъ Нютона, геометры много занимались изслѣдованіемъ свойствъ траэкторій, то есть кривыхъ линій, описываемыхъ матеріальною точкою, побуждаемою къ одному или двумъ неподвижнымъ центрамъ. Уже Нютонъ рѣшилъ съ особеннымъ искусствомъ первый изъ сихъ двухъ вопросовъ; онъ показалъ, что опредѣленіе свойства кривой, а также времени, въ которое она бываетъ описываема, приводится къ квадратурамъ. Предполагая въ частности, что центральная сила обратно пропорціональна квадрату разстоянія, получится для траэкторіи коническая кривая. Читатели найдутъ почти во всѣхъ трактатахъ о Механикѣ доказательство этого предложенія.

Другой вопросъ, въ которомъ предполагается также, что дѣйствующія силы обратно пропорціональны квадратамъ разстояній, но направлены къ двумъ неподвижнымъ центрамъ, представляетъ несравненно бо́льшія затрудненія. Первый рѣшилъ его *Эйлеръ*; онъ показалъ, что траэкторія въ этомъ случаѣ есть кривая трансцендентная, коей уравненіе зависитъ отъ эллиптическихъ функцій. Рѣшеніе Эйлера было признано всѣми геометрами верхомъ искусства математическаго анализа.

Геометры занимались также рѣшеніемъ вопросовъ обратныхъ, именно, опредѣленіемъ центральныхъ силъ по даннымъ обстоятельствамъ движенія. Нютонъ разрѣшилъ многіе вопросы такого рода. Вотъ, для поясненія, одна задача относящаяся къ этому случаю.

Тѣло движется по кругу, и при такомъ движеніи, радіусъ векторъ тѣла описываетъ площади, пропорціональныя временамъ, около нѣкоторой точки A, находящейся внутри круга. Найти центральную силу, побуждающую тѣло къ точкѣ A?

Мы говоримъ къ точкѣ A, ибо легко доказать, что если площади, описываемыя радіусомъ векторомъ тѣла около нѣкоторой точки, пропорціональны временамъ, то сила, побуждающая движущееся тѣло, будетъ направлена къ этой самой точкѣ, предполагая однакожъ что траекторія есть плоская кривая.

Дѣйствительно, положимъ, что точка A есть та, около которой радіусъ векторъ r тѣла, движущагося по кривой BC, въ плоскости ABC заключающейся, описываетъ площади, пропорціональныя временамъ. И такъ, если примемъ начало координатъ въ точкѣ A, и изобразимъ чрезъ x и y прямоугольныя координаты тѣла по истеченіи времени t, то пропорціональность описанныхъ площадей къ временамъ выразится, какъ извѣстно изъ Геометріи, слѣдующею формулою:

$$xdy - ydx = cdt\ ^{*}),$$

въ которой c изображаетъ постоянное количество. Диференцируя послѣднее уравненіе, находимъ

$$xd^2y - yd^2x = 0,$$

или, что все равно,

$$\frac{xd^2y - yd^2x}{rdt^2} = 0;$$

но выраженіе $\frac{xd^2y - yd^2x}{rdt^2}$ есть не иное что, какъ проэкція ускорительной силы, побуждающей тѣло по направленію перпендикулярному къ радіусу вектору (Смот. FORCE), и такъ какъ эта проэкція, въ настоящемъ случаѣ, равна нулю, то отсюда заключаемъ, что самая сила направляется по радіусу вектору, то есть, къ точкѣ A.

Мы не будемъ останавливаться на рѣшеніи приведенной сей-часъ частной задачи, а разыщемъ прямо общее выраженіе центральной силы, когда тѣло описываетъ какую ни есть плоскую кривую.

Проэкція ускорительной силы на радіусѣ векторѣ выражается чрезъ

$$\frac{xd^2y + yd^2x}{rdt^2};$$

сверхъ того, такъ какъ $x^2 + y^2 = r^2$, то $xdx + ydy = rdr$; диференцируя это уравненіе, найдется

$$xd^2x + yd^2y + dx^2 + dy^2 = dr^2 + rd^2r.$$

Но $dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2dp^2$, разумѣя подъ p уголъ, составляемый радіусомъ векторомъ r съ осью x-овъ. Слѣдовательно

$$\frac{xd^2x + yd^2y}{rdt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{dp^2}{dt^2}.$$

И такъ $\frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{dp^2}{dt^2}$ изображаетъ проэкцію ускорительной силы по направленію радіуса вектора или самую эту силу, ибо сія послѣдняя совпадаетъ съ своею проэкціею на радіусѣ векторѣ. Но, въ слѣдствіе пропорціональности описываемыхъ площадей къ временамъ,

$$xdy - ydx = r^2dp = cdt,$$

откуда

$$r^4dp^2 = c^2dt^2 \text{ и } r\frac{dp^2}{dt^2} = \frac{c^2}{r^3};$$

слѣдовательно, выраженіе ускорительной силы будетъ

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{c^2}{r^3}.$$

---

*) Дѣйствительно, положимъ что траекторія пересѣкаетъ ось x-овъ на разстояніи a отъ точки A. Площадь сектора, описанная радіусомъ векторомъ тѣла, будетъ состоять изъ треугольника $\frac{xy}{2}$ и криволинейной площади, для которой абсцисса равняется $a - x$, а ордината y. Эта послѣдняя криволинейная площадь выразится чрезъ $\int yd(a-x) = -\int ydx$; Смот. AIRE. Слѣдовательно, площадь сектора будетъ $\frac{xy}{2} - \int ydx$, которая, по условію вопроса, должна быть пропорціональна времени t. И такъ

$$\frac{xy}{2} - \int ydx = Ct,$$

разумѣя подъ C величину постоянную. Диференцируя послѣднее уравненіе, найдемъ формулу

$$xdy - ydx = 2Cdt,$$

которая одинакова съ приведенною выше, когда примемъ $2C = c$.

Вмѣсто того, чтобы разсматривать dt постояннымъ, будемъ принимать p за перемѣнную независимую; въ такомъ предположеніи надобно замѣнить $\frac{d^2r}{dt^2}$ выраженіемъ $\frac{1}{dt}\,d\left(\frac{dr}{dt}\right)$. Но

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dp}\cdot\frac{dp}{dt} = \frac{dr}{dp}\cdot\frac{c}{r^2} = -c\cdot\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dp};$$

слѣдовательно

$$\frac{d\left(\frac{dr}{dt}\right)}{dt} = -\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dp^2}\cdot\frac{dp}{dt} = -\frac{c^2}{r^2}\cdot\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dp^2}.$$

И такъ, ускорительная сила выразится чрезъ

$$-\frac{c^2}{r^2}\left(\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dp^2} + \frac{1}{r}\right).$$

Если преположимъ, что тѣло описываетъ *эллипсъ* около одного изъ его фокусовъ, то получится уравненіе (Смот. ELLIPSE)

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\,Cos\,p},$$

въ которомъ a изображаетъ большую полу-ось эллипса, а e его эксцентрицитетъ; изъ этого уравненія выведемъ послѣдовательно

$$\frac{1}{r} = \frac{1+e\,Cos\,p}{a(1-e^2)}$$

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dp^2} = -\frac{e\,Cos\,p}{a(1-e^2)}$$

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dp^2} + \frac{1}{r} = \frac{1}{a(1-e^2)}.$$

И такъ, въ этомъ случаѣ, центральная сила будетъ

$$-\frac{c^2}{a(a-e^2)}\cdot\frac{1}{r^2};$$

знакъ — показываетъ, что эта сила составляетъ съ радіусомъ векторомъ уголъ въ 180°, то есть, что она притягательная; сверхъ того, изъ найденнаго выраженія заключаемъ, что искомая сила обратно пропорціональна квадрату разстоянія тѣла отъ притягательнаго центра, въ фокусѣ эллипса находящагося.

Разсматриваніе центральныхъ силъ, въ наше время, не представляетъ уже той степени занимательности, какую имѣло для современниковъ Нютона и для геометровъ, непосредственно послѣ него жившихъ. Механика обладаетъ нынѣ формулами, которыя опредѣляютъ движеніе точекъ, побуждаемыхъ какими ни есть силами, направленными къ неподвижнымъ центрамъ, или имѣющими какія угодно направленія, непрестанно измѣняющіяся.

CENTRALE (RÈGLE). ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПРАВИЛО. Способъ изобрѣтенный Англійскимъ математикомъ *Бакеромъ (Baker)* для геометрическаго построенія вещественныхъ корней полныхъ уравненій третей и четвертой степени. Этотъ способъ основанъ на опредѣленіи *центра* и *радіуса* круга, пересѣкающаго данную параболу въ точкахъ, коихъ абсциссы изображаютъ искомые корни. Для подробностей отсылаемъ къ *Philosophical Transactions* N° 157.

CENTRE (Геом.) **ЦЕНТРЪ, СРЕДОТОЧІЕ.** Отъ Греческаго слова *κεντρον, точка*. Въ обширномъ смыслѣ, центромъ называется точка, которая представляетъ какую либо особенность. Иногда даже центръ есть точка, произвольно взятая между многими другими, подлежащими нашему разсмотрѣнію по свойству вопроса. Это опредѣленіе объясняется слѣдующими частностями:

Centre d'un cercle. Центръ круга. Точка, равно удаленная отъ всѣхъ точекъ окружности.

Centre d'une courbe. Центръ кривой линіи. Такая точка въ плоскости кривой, что каждая прямая, проведенная чрезъ нее до встрѣчи съ кривою линіею, раздѣляется въ этой точкѣ на двѣ части, равныя между собою. Многія кривыя совсѣмъ не имѣютъ центра; другія имѣютъ только одинъ центръ, а нѣкоторыя, нѣсколько точекъ такого свойства.

Изъ этого опредѣленія весьма легко заключить, что для разысканія центра кривой, опредѣляемой уравненіемъ $f(x,y)=0$, надлежитъ разсмотрѣть, возможно ли удовлетворить въ одно время двумъ уравненіямъ

$$f(\alpha+x,\ \beta+y)=0 \quad \text{и} \quad f(\alpha-x,\ \beta-y)=0,$$

разумѣя подъ α и β координаты искомаго *центра* кривой. И такъ, если желаемъ узнать, которыя изъ коническихъ кривыхъ имѣютъ центръ, то въ общее уравненіе втораго порядка

$$A+Bx+Cy+Dx^2+Exy+Fy^2=0,$$

подставляемъ на мѣсто x и y сперва $\alpha+x$ и $\beta+y$, а потомъ $\alpha-x$ и $\beta-y$, и разсматриваемъ, могутъ ли два уравненія, полученныя такимъ образомъ, быть приведены къ тожественному виду, и въ какомъ именно случаѣ. Эти два уравненія будутъ

$$A + B\alpha + C\beta + D\alpha^2 + E\alpha\beta + F\beta^2 + (B + 2D\alpha + E\beta)x + (C + 2F\beta + E\alpha)y + Dx^2 + Exy + Fy^2 = 0$$
$$A + B\alpha + C\beta + D\alpha^2 + E\alpha\beta + F\beta^2 - (B + 2D\alpha + E\beta)x - (C + 2F\beta + E\alpha)y + Dx^2 + Exy + Fy^2 = 0.$$

Для тожества этихъ двухъ уравненій, должно быть

$$B + 2D\alpha + E\beta = 0 \text{ и } C + 2F\beta + E\alpha = 0,$$

откуда
$$\alpha = \frac{CE - 2BF}{4DF - E^2}$$
$$\beta = \frac{BE - 2CD}{4DF - E^2}.$$

Эти величины α и β возможны, пока не уничтожится знаменатель $4DF - E^2$. Если же $4DF - F^2 = 0$, то α и β обращаются въ безконечныя величины, и слѣдовательно кривая, соотвѣтствующая случаю $4DF - E^2 = 0$, то есть *парабола*, не имѣетъ *центра*. И такъ, между коническими кривыми, одна только парабола не имѣетъ центра.

Легко усмотрѣть, что если уравненіе кривой будетъ чётной степени, и сверхъ того такого свойства, что въ каждомъ членѣ сумма показателей надъ x и y изобразитъ чётное число, то кривая линія будетъ имѣть центръ въ началѣ координатъ. То же самое можно сказать и объ уравненіи нечётной степени, въ которомъ сумма показателей во всѣхъ членахъ будетъ число нечётное. Для примѣра на эти два случая, предлагаемъ двѣ кривыя, опредѣляемыя уравненіями

$$x^4 - x^2y^2 + a^2y^2 - b^4 = 0 \text{ и } x^3 - xy^2 + a^2y - y^3 = 0.$$

Кривыя двоякой кривизны рѣдко имѣютъ центры. Что касается до кривыхъ поверхностей, то ихъ *центры* имѣютъ то же значеніе, какъ и въ плоскихъ кривыхъ, и опредѣляются подобнымъ образомъ. Положимъ, напримѣръ, что желаемъ найти центръ кривой поверхности втораго порядка, опредѣляемой общимъ уравненіемъ

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy + Gx + Hy + Iz = K.$$

Подставляемъ въ это уравненіе на мѣсто x, y, z суммы $\alpha + x$, $\beta + y$, $\gamma + z$, и получаемъ

$$\begin{aligned} &Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy \\ &+ 2(A\alpha + F\beta + E\gamma + G)x \\ &+ 2(F\alpha + B\beta + D\gamma + H)y \\ &+ 2(E\alpha + D\beta + C\gamma + I)z \\ &= K - (A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2D\beta\gamma + 2E\alpha\gamma \\ &\quad + 2F\alpha\beta + G\alpha + H\beta + I\gamma). \end{aligned}$$

Это уравненіе, для существованія центра, не должно измѣниться, когда, вмѣсто x, y, z, подставимъ въ него $-x$, $-y$, $-z$. И такъ, коэффиціенты предъ x, y, z должны обратиться въ нули, почему

$$A\alpha + F\beta + E\gamma + G = 0$$
$$F\alpha + B\beta + D\gamma + H = 0$$
$$E\alpha + D\beta + C\gamma + I = 0,$$

откуда

$$\alpha = \frac{(BC - D^2)G + (DE - CF)H + (FD - BE)I}{ABC - D^2A - E^2B - F^2C + 2DEF},$$
$$\beta = \frac{(DE - CF)G + (CA - E^2)H + (EF - AD)I}{ABC - D^2A - E^2B - F^2C + 2DEF},$$
$$\gamma = \frac{(FD - BE)G + (EF - AD)H + (AB - F^2)I}{ABC - D^2A - E^2B - F^2C + 2DEF}.$$

Вотъ величины координатъ центра разсматриваемой поверхности. Ясно, что пока знаменатель, входящій въ эти дроби, не обратится въ нуль, то получится одна, совершенно опредѣленная система координатъ α, β, γ. Но если

$$ABC - D^2A - E^2B - F^2C + 2DEF = 0,$$

то разстояніе центра отъ начала координатъ сдѣлается безконечнымъ, то есть, поверхность не будетъ имѣть центра, развѣ только числители предыдущихъ дробей сами обратятся въ нули; въ этомъ послѣднемъ случаѣ поверхность допуститъ безконечное число центровъ.

Centre général d'une courbe. Общій центръ кривой линіи. Когда всѣ діаметры пересѣкаются въ одной точкѣ, то сія послѣдняя называется *общимъ центромъ той кривой*. Смот. DIAMÈTRE.

Centre d'une sphère. Центръ шара. Точка, равно удаленная отъ всѣхъ точекъ поверхности шара.

Centre d'un polygone régulier. Центръ правильнаго многоугольника. Точка соединенія всѣхъ апотемъ въ правильномъ многоугольникѣ.

Centre de figure. Центръ фигуры. Такая точка въ плоскости фигуры, что каждая прямая, проведенная чрезъ нее до встрѣчи съ периметромъ той фигуры, раздѣляется въ этой точкѣ на двѣ части, равныя между собою.

Centre des moyennes distances. Центръ средняго разстоянія. Положимъ, что имѣемъ сколько угодно точекъ m, m', m'' ...., опредѣляемыхъ координатами x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''.... Пусть будетъ n число данныхъ точекъ. Если опредѣлимъ координаты ξ, η, ζ такъ, чтобы

$$\xi = \frac{x + x' + x'' + \cdots}{n}$$

$$\eta = \frac{y + y' + y'' + \cdots}{n}$$

$$\zeta = \frac{z + z' + z'' + \cdots}{n},$$

то опредѣляемая ими точка принимаетъ названіе *центра средняго разстоянія*. Очевидно, что ξ, η, ζ будутъ соотвѣтственно не иное что, какъ *среднія ариѳметическія* между величинами координатъ x, x', $x''\ldots$; y, y', $y''\ldots$; z, z', z'';....

CENTRE DE GRAVITÉ, D'INERTIE, DE MASSE или DE FIGURE. (Мех.) **ЦЕНТРЪ ТЯЖЕСТИ**, инерціи, массы или фигуры. См. GRAVITÉ (CENTRE DE).

CENTRE DES FORCES PARALLÈLES. Центръ параллельныхъ силъ. Положимъ, что имѣемъ систему параллельныхъ силъ P, P', $P''\ldots$, соотвѣтственно приложенныхъ къ точкамъ m, m', m''..... Равнодѣйствующая R этихъ силъ равна ихъ суммѣ $P + P' + P'' + \ldots$, параллельна общему ихъ направленію, и проходитъ чрезъ извѣстную точку O, именуемую *центромъ параллельныхъ силъ*. Свойство этой точки таково, что если измѣнимъ направленіе силъ P, P', $P''\ldots$ такъ, чтобы и въ измѣненномъ положеніи онѣ оставались параллельными между собою, и сохранимъ прежнія точки приложенія m, m', m''...., то равнодѣйствующая R пройдетъ чрезъ прежнюю точку O. Изъ сказаннаго въ статьѣ: COMPOSITION DES FORCES PARALLÈLES легко удостовѣриться въ этомъ свойствѣ.

И такъ, *центръ параллельныхъ силъ* есть точка, въ которой пересѣкаются послѣдовательныя направленія равнодѣйствующей, въ предположеніи, что составляющія силы обращаются около своихъ точекъ приложенія, оставаясь притомъ параллельными между собою.

Соображаясь съ строеніемъ, предложеннымъ въ статьѣ: COMPOSITION DES FORCES PARALLÈLES, нетрудно будетъ опредѣлить аналитически положеніе центра параллельныхъ силъ. Отнесемъ систему параллельныхъ силъ P, P', P''...., приложенныхъ къ точкамъ m, m', $m''\ldots$ къ тремъ прямоугольнымъ осямъ x-овъ, y-овъ, z-овъ. Пусть будутъ соотвѣтственно x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'';.... координаты точекъ m, m', m''.... Изобразимъ чрезъ ξ, η, ζ координаты центра параллельныхъ силъ. Разстоянія ξ, η, ζ опредѣлятся слѣдующими формулами:

$$\xi = \frac{Px + P'x' + P''x'' + \cdots}{P + P' + P'' + \cdots}$$

$$\eta = \frac{Py + P'y' + P''y'' + \cdots}{P + P' + P'' + \cdots}$$

$$\zeta = \frac{Pz + P'z' + P''z'' + \cdots}{P + P' + P'' + \cdots}.$$

Въ тяжелыхъ тѣлахъ, центръ параллельныхъ силъ принимаетъ названіе *центра тяжести*. См. GRAVITÉ (CENTRE DE).

CENTRE FIXE. Неподвижный центръ.

CENTRE D'ACTION или CENTRE D'ATTRACTION. Центръ притяженія. Смот. ATTRACTION.

CENTRE DES MOMENTS. Центръ моментовъ. Точка, относительно которой берутся моменты. Смот. MOMENT.

CENTRE D'ÉQUILIBRE. Центръ равновѣсія. Точка, чрезъ утвержденіе которой, система приводится въ равновѣсіе. Въ рычагѣ, напримѣръ, *точка подпоры* одно и то же, что *центръ равновѣсія*.

CENTRE DE SUSPENSION. Центръ привѣшиванія, центръ привѣса; точка, около которой маятникъ производитъ свои качанія.

CENTRE D'OSCILLATION. Центръ качанія. Когда тяжелое тѣло, имѣющее какой угодно видъ, или вообще неизмѣняемая система тѣлъ, совершаетъ качанія около горизонтальной оси, то внутри этого тѣла или системы находится безчисленное множество такихъ точекъ, коихъ движеніе не отличается отъ того движенія, которое бы онѣ имѣли, еслибъ были совершенно отдѣльны отъ другихъ точекъ сего тѣла. Подобныя точки именуются *центрами качанія*, и всегда бываютъ расположены на прямой, параллельной оси качанія. См. PENDULE COMPOSÉ.

CENTRE DE PRESSION. Центръ давленія. Такъ называется точка, чрезъ которую проходитъ равнодѣйствующая давленій, производимыхъ тяжелою жидкостію на какую либо плоскую фигуру. Легко усмотрѣть, что центръ давленія бываетъ всегда ниже центра тяжести. Смот. PRESSION.

CENTRE DE MOUVEMENT. Уст. выр. Центръ движенія. Точка, около которой обращаются тѣла, составляющія какую либо систему.

CENTRE DE GRAVITATION. Центръ тяготѣнія. Центръ тяжести системы нѣсколькихъ тѣлъ, подверженныхъ закону взаимнаго притяженія. *Centre de gravitation* или *centre commun de gravité du systême solaire*; *центръ тяготѣнія* или *общій центръ тяжести солнечной системы.*

Centre d'agitation. Уст. выр. Центръ волненія. Такъ называлъ *Декартъ* ту точку, которую впослѣдствіи стали называть *центромъ каганія (centre d'oscillation).*

Centre de percussion. Уст. выр. Центръ удара. Когда неизмѣняемая система тѣлъ движется около неподвижной оси, то въ этой системѣ есть такая точка, которая противуполагаемому ей препятствію, сообщаетъ ударъ сильнѣйшій, нежели всѣ другія; эту точку и называютъ *центромъ удара.* Смот. PERCUSSION.

Centre de conversion. Уст. выр. Центръ обращенія. Точка пересѣченія мгновенныхъ осей въ двухъ смежныхъ ихъ положеніяхъ. Можно допустить, что въ каждое мгновеніе, тѣло обращается около подобнаго центра, котораго положеніе непрестанно измѣняется. *Бернулли* называлъ эту точку *centre spontané de rotation.* Смот. AXE INSTANTANÉ DE ROTATION.

Principe de la conservation du centre de gravité. Начало сохраненія движенія центра тяжести. Смот. DYNAMIQUE.

Centre d'un cadran. (Гном.) Центръ квадрана, солнечныхъ часовъ. Основаніе указателя въ солнечныхъ часахъ. Смот. GNOMONIQUE.

CENTRIFUGE. FORCE CENTRIFUGE. ЦЕНТРОБѢЖНАЯ, СРЕДОБѢЖНАЯ СИЛА. Усиліе, изъявляемое тѣломъ, движущимся по кривой, чтобы описывать прямую линію. Мѣрою центробѣжной силы служитъ отношеніе квадрата скорости къ радіусу кривизны описываемой кривой линіи. Смот. FORCE.

CENTRIPÈTE. ЦЕНТРОПРИТЯГАТЕЛЬНАЯ, ЦЕНТРОВЛЕКУЩАЯ СИЛА. Сила постоянно направленная къ движущемуся или неподвижному центру. Смот. ATTRACTION.

CENTROBARIQUE (MÉTHODE). ЦЕНТРОБАРИЧЕСКІЙ СПОСОБЪ. Способъ, помощію котораго опредѣляется поверхность и объёмъ тѣла: первая — посредствомъ производящей кривой и ея центра тяжести, а второй — посредствомъ производящей площади и ея центра тяжести.

Для поверхностей или тѣлъ вращенія, этотъ способъ заключается въ слѣдующей теоремѣ, именуемой *Гюльденовой (théorême de Guldin).* См. BARICENTRIQUE (CALCUL).

1°. *Поверхность, образуемая вращеніемъ плоской кривой около прямой линіи, заключающейся въ ея плоскости, равна длинѣ производящей кривой, помноженной на пространство, переходимое центромъ тяжести этой самой кривой при описаніи поверхности.*

2°. *Объёмъ, образуемый вращеніемъ площади плоской кривой около прямой линіи, заключающейся въ ея плоскости, равенъ производящей площади, помноженной на пространство, перейденное ея центромъ тяжести во время образованія тѣла.*

Эти два предложенія весьма легко доказываются слѣдующимъ образомъ:

Пусть будутъ x и y прямоугольныя координаты производящей кривой, а η ордината центра тяжести дуги s этой самой кривой. По свойству центра тяжести будетъ

$$s\eta = \int y ds.$$

Изобразивъ чрезъ S площадь разсматриваемой поверхности вращенія, а чрезъ π отношеніе окружности круга къ его діаметру, получимъ

$$S = 2\pi\int y ds;$$

исключая изъ послѣднихъ двухъ уравненій $\int y ds$, найдемъ формулу

$$S = 2\pi\eta . s,$$

выражающую первое изъ двухъ предложеній. Чтобы доказать второе, изобразимъ чрезъ u производящую площадь, чрезъ η ординату ея центра тяжести, а чрезъ V объёмъ тѣла вращенія, образуемаго обращеніемъ этой площади. Будемъ имѣть двѣ формулы

$$u\eta = \tfrac{1}{2}\int y du, \quad V = \pi\int y^2 dx;$$

по $du = y dx$ (Смот. AIRE); слѣдовательно, исключая $\int y^2 dx$, получимъ уравненіе

$$V = 2\pi\eta . u,$$

выражающее второе изъ приведенныхъ предложеній.

CERCLE. (Геом.) **КРУГЪ.** Площадь, ограниченная *круговою линіею. Круговою линіею* или *окружностію круга* называется такая плоская кривая, коей всѣ точки равно удалены отъ нѣкоторой внутренней точки, именуемой *центромъ* или *средоточіемъ*, въ плоскости самой кривой находящейся.

*

Иногда смѣшиваютъ *кругъ* съ *окружностію круга*; но сдѣланное выше опредѣленіе устраняетъ всякое недоразумѣніе.

Каждая изъ линій CA, CB (черт. 9, Листъ III), изъ центра C къ окружности проведенная, называется *радіусомъ, полу-діаметромъ* или *полупоперечникомъ (rayon, demi-diamètre)*. Линія DE, проходящая чрезъ центръ C, и ограниченная съ обѣихъ сторонъ окружностію, именуется *діаметромъ* или *поперечникомъ (diamètre)*.

Окружность круга раздѣляютъ на 360 *градусовъ*, которые изображаютъ знакомъ: $^\circ$. Каждый градусъ дѣлится на 60 *минутъ*, изображаемыхъ знакомъ: $'$; минута на 60 *секундъ*, отмѣчаемыхъ знакомъ $''$; секунду, на 60 *терцій*, которыя обозначаются слѣдующимъ образомъ: $'''$, и такъ далѣе. Такое раздѣленіе окружности называется *старымъ (ancienne division)*. Въ новомъ, такъ называемомъ *стоградуснымъ (centigrade* или *centésimale)*, четверть окружности дѣлится на *сто* градусовъ, слѣдовательно вся окружность на 400°. Впрочемъ, старое дѣленіе вѣроятно останется и впредъ господствующимъ, по причинѣ удобности выкладокъ при употребленіи числа 360, имѣющаго много дѣлителей.

Уравненіе круга выводится какъ нельзя легче: положимъ, что оси, къ которымъ относимъ кругъ, суть прямоугольныя и проходятъ чрезъ его центръ. Пусть CX ось абсциссъ, а CY ось ординатъ; $CP = x$, $PA = y$, $CA = r$. По свойству прямоугольнаго треугольника CPA получимъ

$$\overline{CP}^2 + \overline{PA}^2 = \overline{CA}^2 \text{ или } x^2 + y^2 = r^2.$$

Вотъ уравненіе круга, отнесеннаго къ прямоугольнымъ осямъ, пересѣкающимся въ его центрѣ. Если бы начало координатъ находилось при концѣ діаметра, напримѣръ въ точкѣ D, то принявъ $DP = x$, $PA = y$, нашли бы уравненіе круга $y^2 = 2rx - x^2$. Вообще, предполагая центръ перенесеннымъ въ какую ни есть точку, опредѣляемую координатами α и β, найдется общее уравненіе для круга слѣдующаго вида:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

См. TRANSFORMATION DES COORDONNÉES.

CERCLE OSCULATEUR. Соприкасающійся кругъ, кругъ кривизны. Смот. OSCULATEUR.

CERCLES DE DEGRÉS SUPERIEURS. Круги высшихъ порядковъ. Такъ называются кривыя, въ которыхъ абсцисса, возвышенная въ извѣстную степень, относится къ той же степени ординаты, какъ ордината, къ постоянной линіи безъ абсциссы. Изобразивъ упомянутую степень чрезъ m, постоянную линію чрезъ $2a$, абсциссу чрезъ x, а ординату чрезъ y, получимъ слѣдующее уравненіе для круга m-го порядка:

$$y^{m+1} = 2ax^m - x^{m+1}.$$

Полагая, $m = 1$, найдется уравненіе $y^2 = 2ax - x^2$, принадлежащее обыкновенному кругу. Принявъ $m = 2$, будетъ $y^3 = 2ax^2 - x^3$; это уравненіе, по приведенному выше опредѣленію, принадлежитъ кругу *втораго порядка*.

CERCLES HORRAIRES. Часовые круги. Смот. HORRAIRE.

CÉRÈS. (Астр.) **ЦЕРЕРА.** Одна изъ новыхъ телескопическихъ планетъ; она открыта Палермскимъ астрономомъ *Піацціемъ* 1-го Января 1801 года. Вотъ элементы пути Цереры:

Эпоха средн. долготы 1801 г.	77°18′36″, 5
Долгота перигелія	146°26′ 0″, 1
log. большой полу-оси	0,4420486
Эксцентрицитетъ 1806 г.	0,0785028
Долгота восходящаго узла	80°53′41″, 3
Наклоненіе пути	10°37′31″, 2.

Переливы цвѣтовъ Цереры въ красный, синій и бѣлый, а также толстыя туманныя оболочки, которыми эта планета иногда бываетъ окружена, между тѣмъ какъ въ другое время сіяетъ чистѣйшимъ свѣтомъ, заставляютъ думать, что Церера имѣетъ значительную атмосферу, въ которой происходятъ всѣ эти перемѣны.

CERTITUDE. (Исч. Вѣр.) **ДОСТОВѢРНОСТЬ, НЕСОМНѢННОСТЬ, ПОДЛИННОСТЬ, ИЗВѢСТНОСТЬ.** Смот. PROBABILITÉ.

CH.

CHACUN A CHACUN. КАЖДЫЙ КАЖДОМУ. Реченіе, употребляемое въ Геометріи для означенія равенства сравниваемыхъ частей въ двухъ или нѣсколькихъ фигурахъ. И такъ, говорятъ: *Dans ces deux triangles les côtés sont égaux chacun à chacun: въ этихъ двухъ треугольникахъ стороны равны каждая каждой. — Dans ces trois pentagones les angles sont égaux chacun à chacun; въ этихъ трехъ пятиугольникахъ углы равны каждый каждому.*

CHAINE. (Землем.) **ЦѢПЬ.** Цѣпь, употребляемая землемѣрами для измѣренія линій (оснований) на участкахъ земли. Она дѣлается, по большой части, изъ желѣзныхъ или мѣдныхъ прутьевъ, которые имѣютъ обыкновенно одинъ футъ въ длинѣ. Съ тою же цѣлію употребляютъ иногда и *верески*; но такъ какъ длина сихъ послѣднихъ отъ сырости воздуха, также отъ силы, которою ихъ натягиваютъ, подвергается значительнымъ измѣненіямъ, то преимущество остается на сторонѣ металлическихъ цѣпей.

Что касается до употребленія землемѣрной цѣпи при измѣреніи оснований, то оно такъ извѣстно, что мы не будемъ останавливаться на немъ. Для нѣкоторыхъ подробностей отсылаемъ читателей къ слову: BASE.

CHAINE SANS FIN. (Прикл. Мех.) Безконечная цѣпь, четки. Сомкнутая цѣпь, которая навивается на валъ какой либо машины.

CHAINES A GODETS. Цѣпи съ черпалами.

CHAINETTE, CATENAIRE. (Мех.) **ЦѢПНАЯ ЛИНІЯ, КАТЕНАРІЯ.** Кривая, образуемая совершенно гибкою и нерастяжимою тяжелою цѣпью или нитью, утвержденною въ двухъ точкахъ. *Галилей* пытался опредѣлить видъ цѣпной линіи, и думалъ, но ошибочно, что парабола удовлетворяетъ вопросу. Впослѣдствіи *Яковъ Бернулли*, именно въ 1690 году, предложилъ современнымъ математикамъ найти свойства этой кривой. Въ слѣдующемъ году задача была рѣшена *Гугенсомъ*, *Лейбницемъ* и *Иваномъ Бернулли* (братомъ Якова). Во всѣхъ этихъ рѣшеніяхъ предполагали цѣпь во всѣхъ ея точкахъ равномѣрно тяжелою. Яковъ Бернулли предложилъ рѣшеніе для случая болѣе общаго, предположивъ вѣсъ цѣпи измѣняющимся по извѣстному закону, когда отъ одной ея точки переходятъ къ другой. Вслѣдъ за симъ, по аналогіи предметовъ, онъ разыскалъ кривую, образуемую натянутымъ лукомъ, также видъ *упругой пластинки* (См. ÉLASTIQUE PLAQUE) и *линтеаріи* (Смот. LINTÉAIRE).

Покажемъ теперь какимъ образомъ можно найти уравненіе цѣпной линіи. Положимъ, что однородная цѣпь AhB, (Черт. 10 Листъ III) утверждена своими двумя концами въ точкахъ A и B, и что она, въ состояніи равновѣсія, имѣетъ видъ означенный на чертежѣ. Принимая цѣпную линію за веревочный многоугольникъ [Смот. FUNICULAIRE (POLYGONE)], состоящій изъ безконечнаго числа сторонъ, и къ которому приложены силы вертикальныя, легко видѣть, что эта кривая будетъ вся заключаться въ вертикальной плоскости, проходящей чрезъ точки A и B. Проведемъ въ этой плоскости координатныя оси, горизонтальную OX и вертикальную OY. Пусть будутъ $Op = x$ и $pm = y$ координаты какой ни есть точки m цѣпной линіи; $Ok = x_0$ и $kh = y_0$ неизвѣстныя координаты точки h, въ которой касательная QL къ кривой параллельна оси OX. Отнимемъ теперь мысленно части Ah и mB цѣпи, и разсмотримъ только ея дугу hm. Очевидно, что такое предположеніе позволительно, лишь бы только замѣнили дѣйствіе отнятыхъ частей цѣпи на дугу hm приличными силами. Ясно, что направленія силъ, о которыхъ говоримъ, должны быть касательныя къ кривой въ точкахъ h и m. Пусть будутъ Q сила, дѣйствующая въ точкѣ h, и направляющаяся по hQ, а T, сила, замѣняющая дѣйствіе части mB, и направленная по mT. Эти силы называются *напряженіемъ* цѣпи въ точкахъ h и m; См. TENSION. Если вообразимъ теперь, что часть hm цѣпной линіи, не измѣняясь въ своемъ видѣ, приличествующемъ ея состоянію равновѣсія, сдѣлалась *несгибаемою* (*rigide*), то чрезъ это равновѣсіе не нарушится, ибо уничтожаемъ въ системѣ нѣкоторыя изъ возможныхъ ея движеній. Въ такомъ предположеніи можно будетъ замѣнить дѣйствіе дуги hm цѣпной линіи ея вѣсомъ, приложеннымъ къ центру тяжести g этой самой дуги, и дѣйствующимъ по направленію вертикальному gn. Пусть будетъ s длина дуги hm, μ масса единичной длины, g сила тяжести; вѣсъ части hm цѣпи выразится чрезъ $g\mu s$. Слѣдовательно, получимъ неизмѣняемую систему, побуждаемую тремя силами, именно: 1) силою $g\mu s$, дѣйствующею на точку g по направленію gn; 2) силою Q, приложенною въ точкѣ h по направленію hQ; 3) силою T, приложенною въ точкѣ m, и дѣйствующею по направленію mT. Вопросъ приводится къ опредѣленію условій равновѣсія этой системы.

Такъ какъ разсматриваемая нами теперь система есть неизмѣняемая, то мы въ правѣ перенести точку приложенія m силы T въ точку q встрѣчи ея направленія съ горизонтальною

QL, и мы покажемъ, что эта точка q должна непремѣнно находиться на прямой gn. Дѣйствительно, разложимъ силу T, дѣйствующую въ точкѣ q по направленію qT на двѣ силы, одну направленную по qL, которая будетъ $T\frac{dx}{ds}$, и другую вертикальную $T\frac{dy}{ds}$. Горизонтальная $T\frac{dx}{ds}$ должна уничтожить силу Q, прямопротивную ей, въ слѣдствіе чего

(1) $$T\frac{dx}{ds} = Q,$$

а вертикальная $T\frac{dy}{ds}$ должна уравновѣшивать остающуюся силу $g\mu s$; если бы эти двѣ силы не были прямопротивны, то получилась бы пара силъ, которая уже ни чѣмъ не могла бы уравновѣситься. Слѣдовательно, необходимо чтобы точка q совпадала съ пересѣченіемъ вертикальной линіи gn и горизонтальной QL, и сверхъ того должно быть:

(2) $$T\frac{dy}{ds} = g\mu s.$$

Сказанное нами приводитъ къ слѣдующему заключенію: *цѣпная линія есть кривая такого свойства, что если къ какой ни есть ея точкѣ m* (черт. 10) *проведемъ касательную mT, и продолжимъ ее до пересѣченія съ горизонтальною линіею hL, то точка q совпадетъ съ основаніемъ перпендикуляра, опущеннаго на hL изъ центра тяжести g дуги hm.* Основываясь на этомъ геометрическомъ свойствѣ цѣпной линіи, очень легко вывести ея уравненіе. Дѣйствительно, пусть будетъ $\xi = \frac{\int x ds}{s}$ абсцисса On центра тяжести g дуги hm. Въ слѣдствіе приведеннаго свойства цѣпной линіи, должно быть $\overline{On} = \overline{Op} - \overline{np} = \overline{Op} - \overline{qr}$; но $\overline{Op} = x$, $\overline{qr} = (y - y_0)\frac{dx}{dy}$, почему $\frac{\int x ds}{s} = x - (y - y_0)\frac{dx}{dy}$.

Положивъ для краткости $\frac{dx}{dy} = p$, выводимъ изъ этого уравненія

$$\int x ds = sx - s(y - y_0)p,$$

или, по причинѣ $\int x ds = xs - \int s dx$,

$$s(y - y_0)p = \int s dx;$$

дифференцируя это уравненіе, находимъ

$$s(y - y_0)dp + spdy + (y - y_0)pds = sdx;$$

замѣнивъ дифференціалъ dx равною ему величиною pdy, и раздѣливъ на $(y - y_0)$, получимъ

$$sdp + pds = 0.$$

Но $sdp + pds = d(sp)$; слѣдовательно $sp = a$, разумѣя подъ a постоянную величину. И такъ

$$s = \frac{a}{p} = a\frac{dy}{dx}.$$

Это уравненіе показываетъ, что *въ цѣпной линіи дуги, считаемыя отъ низшей точки, пропорціональны тангенсамъ угловъ, составляемыхъ касательною съ горизонтальною осью x-овъ.*

Подставляя $\int dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$ вмѣсто s въ предыдущее уравненіе (Смот. ARC), и дифференцируя потомъ, получаемъ

$$dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = ad\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

откуда

$$dx = \frac{ad\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}};$$

интегралъ этого уравненія будетъ

$$x - \alpha = a \cdot \log\left(\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\right),$$

разумѣя подъ α постоянную величину. Но при $x = x_0$, $\frac{dy}{dx} = 0$; слѣдовательно $\alpha = x_0$, и

$$\frac{x - x_0}{a} = \log\left(\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\right).$$

Отсюда выводимъ

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = e^{\frac{x - x_0}{a}} \text{ и}$$

$$-\frac{1}{\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}} = \frac{dy}{dx} - \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = -e^{-\frac{x - x_0}{a}}.$$

Сложивъ послѣднія два уравненія, найдемъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x - x_0}{a}} - e^{-\frac{x - x_0}{a}}\right),$$

откуда, по умноженіи на dx, получится чрезъ интегрированіе

$$y - \beta = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x - x_0}{a}} + e^{-\frac{x - x_0}{a}}\right).$$

Для опредѣленія β замѣтимъ, что при $x = x_0$, будетъ $y = y_0$; слѣдовательно

$$y_0 - \beta = a, \text{ откуда } \beta = y_0 - a,$$

или наконецъ

(3) $$\frac{y - y_0}{a} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x - x_0}{a}} + e^{-\frac{x - x_0}{a}}\right) - 1.$$

Вотъ уравненіе цѣпной линіи въ прямоугольныхъ координатахъ. — Мы не будемъ останавливаться на опредѣленіи трехъ постоянныхъ величинъ a, x_0, y_0; скажемъ только, что условія, опредѣляющія ихъ, суть слѣдующія: кривая проходитъ чрезъ точки A и B, коихъ координаты Oa, aA и Ob, bB даны, и сверхъ того, длина дуги s между сими двумя точками извѣстна; легко видѣть, что этихъ трехъ условій достаточно для предполагаемой цѣли, и что для опредѣленія постоянныхъ величинъ a, x_0 и y_0, надобно будетъ рѣшить трансцендентное уравненіе въ отношеніи къ a. Это рѣшеніе упрощается, когда положимъ, что точки A и B находятся на горизонтальной линіи, ибо въ такомъ случаѣ цѣпная линія будетъ состоять изъ двухъ частей Ah и hB, совершенно равныхъ.

Что касается до напряженія, то оно опредѣляется изъ уравненія (2), доставляющаго

$$T = g\mu\,\frac{sds}{dy}.$$

Замѣтимъ еще, что цѣпная линія есть кривая *распрямляемая* (*réctifiable*). И дѣйствительно, мы видѣли что $s = a\frac{dy}{dx}$; но изъ уравненія (3) выводимъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x-x_0}{a}} - e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right);$$

слѣдовательно

$$s = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-x_0}{a}} - e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right).$$

Опредѣляя вторую часть этого уравненія въ функціи y, получимъ алгебрическое выраженіе

$$s = a\sqrt{\left(1+\frac{y-y_0}{a}\right)^2 - 1}.$$

Приведемъ въ заключеніе еще одно примѣчательное механическое свойство цѣпной линіи. Посредствомъ Исчисленія Варіацій доказываютъ, что изъ всѣхъ изопериметрическихъ (Смот. ISOPÉRIMÈTRE), то есть, изъ всѣхъ кривыхъ равной длины, проведенныхъ между двумя точками, центръ тяжести цѣпной линіи занимаетъ самое низкое положеніе.

CHALEUR. (Мат. Физ.) **ТЕПЛОТА, ТЕПЛО.** Причина, производящая явленія теплоты, неизвѣстна естествоиспытателямъ. Ксчастію, математическая теорія теплоты вовсе не нуждается въ познаніи этой причины. Происходитъ ли тепло отъ сотрясенія атомовъ, или оно есть особенная невѣсомая жидкость, которую назвали теплородомъ — для аналиста все равно. Для него достаточно знать законы, по которымъ распространяется теплота. Законы, о которыхъ говоримъ, подтвержденные всѣми опытами, суть слѣдующіе:

1) *Количество тепла, равномѣрно распредѣленное по нѣкоторому объёму, пропорціонально этому объёму и его температурѣ.*

2) *Двѣ частицы m и m', безконечно малыя, находящіяся между собою на разстояніи нечувствительномъ, сообщаютъ одна другой количество теплоты, которое, напримѣръ для частицы m, пропорціонально разности температуръ, соотвѣтствующихъ частицамъ m' и m, и нѣкоторой функціи ихъ взаимнаго разстоянія.*

3) *Количество тепла, проходящее чрезъ элементъ поверхности твердаго тѣла, пропорціонально избытку температуры этого элемента, предъ температурою окружающей его середины.*

Отъ сотрясенія ли атомовъ, или отъ дѣйствія теплорода обнаруживаются эти законы, математическая теорія тепла остается одна и та же; ибо, повторяемъ еще разъ, она не зависитъ отъ причины тепла, но отъ приведенныхъ сей-часъ законовъ *).

Чтобы вывести математическую теорію распространенія теплоты въ твердыхъ тѣлахъ, вообразимъ какое ни есть однородное твердое тѣло, коего всѣ точки, въ опредѣленное мгновеніе, имѣютъ произвольныя, но извѣстныя температуры, и которое выставлено въ середину, равномѣрно вездѣ нагрѣтую. Теплота будетъ переходить изъ частицъ болѣе нагрѣтыхъ въ тѣ, которыя нагрѣты менѣе, и въ то же время часть тепла выйдетъ изъ тѣла чрезъ его поверхность, и распространится въ окружающей серединѣ. Если разсмотримъ состояніе тѣла по истеченіи извѣстнаго времени послѣ того мгновенія, когда температуры всѣхъ его точекъ по-

*) Мы отнюдь не утверждаемъ, чтобы теорія теплоты, *сама по себѣ*, не зависѣла отъ причины тепла; и дѣйствительно, нѣтъ никакого сомнѣнія, что приведенные законы, которые были найдены посредствомъ опытовъ, находятся въ полной зависимости отъ причины тепла; такъ что существо, одаренное высшимъ разумомъ, и постигающее эту причину, могло бы, не основываясь на показаніяхъ опыта, вывести эти самые законы.

лагались извѣстными, то найдемъ совсѣмъ другія температуры; вопросъ, который имѣемъ цѣлію подчинить математическому анализу, состоитъ именно въ опредѣленіи сихъ температуръ.

Для рѣшенія задачи, положимъ что u изображаетъ температуру какой ни есть точки тѣла, опредѣляемой прямоугольными координатами x, y, z, и соотвѣтствующую времени t. Надлежитъ найти температуру u по извѣстной ея величинѣ въ одно опредѣленное мгновеніе, которое, для простоты, предположимъ соотвѣтствующимъ времени $t = 0$. И такъ, первая *данная* рѣшаемаго нами вопроса, выражается условіемъ

(1) $$u = f(x, y, z) \text{ когда } t = 0,$$

гдѣ подъ $f(x, y, z)$ разумѣемъ извѣстную функцію координатъ x, y, z. Вообразимъ теперь безконечно малый элементъ dv тѣла, заключающій въ себѣ точку (x, y, z), и опредѣлимъ, сколько въ безконечно малое время dt этотъ элементъ получитъ теплоты. Для этого, примемъ въ соображеніе другую частицу dv'; пусть будутъ $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ ея координаты, и положимъ для простоты

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = r^2.$$

Если изобразимъ чрезъ u' температуру элемента dv', то въ слѣдствіе двухъ первыхъ законовъ, частица dv, въ безконечно малое время dt, получитъ приращеніе теплоты, выражающееся чрезъ

$$(u' - u)\ \varphi(r)\ dv\, dv' dt,$$

гдѣ $\varphi(r)$ изображаетъ функцію разстоянія r такого свойства, что величина ея, для разстоянія чувствительнаго, дѣлается неощутительною. Взявъ интегралъ предыдущаго выраженія относительно всѣхъ элементарныхъ объёмовъ dv', окружающихъ частицу dv, получимъ количество тепла, пріобрѣтаемое ею во время dt. И такъ, это количество будетъ

$$dv\, dt \int (u' - u)\ \varphi(r)\ dv'.$$

Съ другой стороны, такъ какъ температура объёма dv есть u, то, по истеченіи времени dt, она получитъ приращеніе $\frac{du}{dt} dt$, и, въ слѣдствіе перваго изъ приведенныхъ трехъ законовъ, объёмъ dv, во время dt, пріобрѣтетъ количество тепла, пропорціональное $\frac{du}{dt} dv\, dt$. Пусть будетъ $C \frac{du}{dt} dv\, dt$ это количество; здѣсь C изображаетъ постоянную величину, которую называютъ *теплоёмкостію (capacité spécifique pour la chaleur)*. И такъ

$$C \frac{du}{dt}\, dv\, dt = dv\, dt \int (u' - u)\ \varphi(r)\ dv',$$

или, уничтожая общихъ множителей,

(2) $$C \frac{du}{dt} = \int (u' - u)\ \varphi(r)\ dv'.$$

Вотъ уравненіе распространенія тепла внутри твердаго тѣла. Чтобы представить эту формулу въ видѣ болѣе удобномъ, стоитъ только разложить вторую ея часть. Для этого, опишемъ сферическую поверхность около точки (x, y, z), принимаемой за центръ, радіусомъ равнымъ единицѣ, и потомъ, изъ той же точки, проведемъ ко всѣмъ точкамъ частицы dv' прямыя линіи, которыя можно продолжить неопредѣленно. Пусть будетъ $d\omega$ элементъ сферической поверхности, образуемый пересѣченіемъ съ нею проведенныхъ сей-часъ прямыхъ; можно будетъ, какъ извѣстно, положить $dv' = r^2 dr d\omega$. И такъ, интегралъ, который надлежитъ опредѣлить, будетъ

(3) $$\int (u' - u)\ \varphi(r)\ r^2 dr d\omega,$$

и онъ долженъ быть взятъ: 1° отъ $r = 0$, до r равнаго нечувствительной величинѣ ϱ, изображающей разстояніе, на которомъ прекращается непосредственное сообщеніе тепла, и 2° относительно всѣхъ элементовъ сферической поверхности. Если предположимъ теперь $u = \psi(x, y, z, t)$, разумѣя подъ ψ неизвѣстную функцію, то получимъ также

$$u' = \psi(x + \xi,\ y + \eta,\ z + \zeta, t),$$

или, по разложеніи,

$$u' = u + \frac{du}{dx}\xi + \frac{du}{dy}\eta + \frac{du}{dz}\zeta + \frac{1}{1.2}\left[\frac{d^2u}{dx^2}\xi^2 + \frac{d^2u}{dy^2}\eta^2 + \frac{d^2u}{dz^2}\zeta^2 + 2\left(\frac{d^2u}{dxdy}\xi\eta + \frac{d^2u}{dxdz}\xi\zeta + \frac{d^2u}{dydz}\eta\zeta\right)\right] + \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots n}\left[\frac{d^nu}{dx^n}\xi^n + \frac{d^nu}{dy^n}\eta^n + \frac{d^nu}{dz^n}\zeta^n + n\left(\frac{d^nu}{dx^{n-1}dy}\xi^{n-1}\eta + \frac{d^nu}{dxdy^{n-1}}\eta^{n-1}\xi + \frac{d^nu}{dx^{n-1}dz}\xi^{n-1}\zeta + \frac{d^nu}{dxdz^{n-1}}\zeta^{n-1}\xi + \right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{d^nu}{dy^{n-1}dz}\eta^{n-1}\zeta + \frac{d^nu}{dydz^{n-1}}\zeta^{n-1}\eta\right) + \ldots\ldots\right] + \text{ и проч.}$$

Выводя изъ этого выраженія разность $u' - u$ и подставляя ее въ интегралъ (3), получимъ

$$\int\left[\frac{du}{dx}\xi+\frac{du}{dy}\eta+\frac{du}{dz}\zeta+\frac{1}{1.2}\left(\frac{du}{dx}\xi+\frac{du}{dy}\eta+\frac{du}{dz}\zeta\right)^2+\cdots\cdots+\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots n}\left(\frac{du}{dx}\xi+\frac{du}{dy}\eta+\frac{du}{dz}\zeta\right)^n+\text{и пр.}\right]\varphi(r)r^2drd\omega,$$

употребляя, для сокращенія, символическія выраженія для диффеpенціаловъ. Смот. ANALOGIE DES PUISSANCES AVEC LES DIFFÉRENCES. Положимъ въ этомъ выраженіи $\xi = r\, Cos\, \alpha$, $\eta = r\, Cos\, \beta$, $\zeta = r\, Cos\, \gamma$; такъ какъ $Cos^2\alpha + Cos^2\beta + Cos^2\gamma = 1$, то предыдущая формула обратится въ слѣдующую:

$$(4)\quad \begin{cases} \int\left(\frac{du}{dx}Cos\,\alpha+\frac{du}{dy}Cos\,\beta+\frac{du}{dz}Cos\,\gamma\right)\varphi(r)\,r^3dr\,d\omega+\frac{1}{1.2}\int\left(\frac{du}{dx}Cos\,\alpha+\frac{du}{dy}Cos\,\beta+\frac{du}{dz}Cos\,\gamma\right)^2\varphi(r)\,r^4dr\,d\omega \\ +\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +\frac{1}{1.2.3\ldots.n}\int\left(\frac{du}{dx}Cos\,\alpha+\frac{du}{dy}Cos\,\beta+\frac{du}{dz}Cos\,\gamma\right)^n\varphi(r)\,r^{n+2}dr\,d\omega+\cdots\cdots \end{cases}$$

Всѣ интегралы должны быть взяты, относительно r, отъ $r=0$ до $r=\varrho$, а относительно α, β, γ, для всѣхъ величинъ сихъ угловъ, удовлетворяющихъ уравненію $Cos^2\alpha + Cos^2\beta + Cos^2\gamma = 1$, и не превышающихъ π. Такъ какъ между предѣлами, о которыхъ идетъ рѣчь, r есть количество весьма малое, то въ предыдущемъ ряду удерживаютъ обыкновенно только два первые члена, а тѣ, которые помножены на r^5 и на высшія степени, откидываются. Впрочемъ мы увидимъ, что члены, заключающіе нечётныя степени количества r, обращаются въ *нуль*, и что слѣдовательно, удерживая первые два члена предыдущаго ряда, мы, на самомъ дѣлѣ, доводимъ приближеніе до r^6. И такъ, имѣемъ

$$\int(u'-u)\,\varphi(r)\,r^2dr\,d\omega = \int_0^\varrho \varphi(r)\,r^3dr\int\left(\frac{du}{dx}Cos\,\alpha+\frac{du}{dy}Cos\,\beta+\frac{du}{dz}Cos\,\gamma\right)d\omega\, +$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\varrho\varphi(r)\,r^4dr\int\left(\frac{d^2u}{dx^2}Cos^2\alpha+\frac{d^2u}{dy^2}Cos^2\beta+\frac{d^2u}{dz^2}Cos^2\gamma+2\frac{d^2u}{dxdy}Cos\,\alpha\,Cos\,\beta+2\frac{d^2u}{dxdz}Cos\,\alpha\,Cos\,\gamma+2\frac{d^2u}{dydz}Cos\,\beta\,Cos\,\gamma\right)d\omega,$$

разумѣя подъ ϱ радіусъ шара, при поверхности котораго прекращается непосредственное сообщеніе тепла.

Займемся сперва интегралами, относящимися къ ω. Очевидно, что

$$\int Cos\,\alpha\, d\omega = \int Cos\,\beta\, d\omega = \int Cos\,\gamma\, d\omega = 0,$$

и что вообще будетъ $\int Cos^i\alpha\, Cos^k\beta\, Cos^l\gamma\, d\omega = 0,$

если изъ показателей i, k, l будетъ хотя одинъ нечётный. И дѣйствительно, положимъ что i число нечётное; такъ какъ разсматриваемый интегралъ долженъ быть распространенъ на всѣ значенія перемѣнныхъ α, β, γ, удовлетворяющія уравненію $Cos^2\alpha + Cos^2\beta + Cos^2\gamma = 1$ и не превосходящія π, то отсюда слѣдуетъ, что каждому элементу, для котораго $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$, будетъ соотвѣтствовать другой, при которомъ $\alpha=\pi-\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$; ибо, если $Cos^2\alpha' + Cos^2\beta' + Cos^2\gamma' = 1$, то будетъ также $Cos^2(\pi-\alpha') + Cos^2\beta' + Cos^2\gamma' = 1$, и, сверхъ того, такъ какъ α' изображаетъ величину положительную, ме́ньшую π, то и разность $\pi-\alpha'$ также положительная, а элементы, соотвѣтствующія значеніямъ $\alpha=\alpha'$ и $\alpha=\pi-\alpha'$, будутъ равны между собою, но съ противными знаками; слѣдовательно $\int Cos^i\alpha\, Cos^k\beta\, Cos^l\gamma\, d\omega = 0,$

и поэтому $\int Cos\,\alpha\, Cos\,\beta\, d\omega = \int Cos\,\alpha\, Cos\,\gamma\, d\omega = \int Cos\,\beta\, Cos\,\gamma\, d\omega = 0.$

И такъ, получаемъ $\int(u'-u)\,\varphi(r)\,r^2drd\omega = \frac{1}{2}\int_0^\varrho\varphi(r)\,r^4\,dr\int\left[\frac{d^2u}{dx^2}Cos^2\alpha+\frac{d^2u}{dy^2}Cos^2\beta+\frac{d^2u}{dz^2}Cos^2\gamma\right]d\omega.$

Легко произвести означенныя здѣсь интегрированія; дѣйствительно, имѣемъ

$$\int Cos^2\alpha\, d\omega = \int Cos^2\beta\, d\omega = \int Cos^2\gamma\, d\omega,$$

и слѣдовательно $\int(Cos^2\alpha + Cos^2\beta + Cos^2\gamma)\,d\omega = \int d\omega = 4\pi,$

откуда заключаемъ $\int Cos^2\alpha\, d\omega = \int Cos^2\beta\, d\omega = \int Cos^2\gamma\, d\omega = \frac{4\pi}{3}.$

И такъ $\int(u'-u)\,\varphi(r)\,r^2drd\omega = \frac{2\pi}{3}\int_0^\varrho\varphi(r)\,r^4dr\left[\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right],$

или, полагая для краткости, $\frac{2\pi}{3}\int_0^\varrho\varphi(r)\,r^4dr = k,$

получимъ $\int(u'-u)\,\varphi(r)\,r^2drd\omega = k\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right),$

и наконецъ, въ слѣдствіе формулы (3),

$$(5)\qquad C\frac{du}{dt} = k\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right).$$

Вотъ уравненіе въ частныхъ диФФеренціалахъ, опредѣляющее распространеніе тепла внутри твердаго тѣла; оно было выведено въ первый разъ знаменитымъ Французскимъ математикомъ *Фурье* (*Fourier*).

Если не довольствуемся тѣмъ приближеніемъ, на основаніи котораго выведена формула (5), то надобно будетъ найти интегралы, составляющіе рядъ (4); полагая въ немъ для краткости $\frac{du}{dx}=a$, $\frac{du}{dy}=b$, $\frac{du}{dz}=c$, и удерживая символическое знакоположеніе, получимъ

$$\int_0^\rho \varphi(r)\, r^3\, dr \int (a \operatorname{Cos}\alpha + b \operatorname{Cos}\beta + c \operatorname{Cos}\gamma)\, d\omega + \tfrac{1}{2}\int_0^\rho \varphi(r)\, r^4\, dr \int (a \operatorname{Cos}\alpha + b \operatorname{Cos}\beta + c \operatorname{Cos}\gamma)^2 d\omega + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{1.2.3\ldots n}\int_0^\rho \varphi(r)\, r^{n+2} dr \int (a \operatorname{Cos}\alpha + b \operatorname{Cos}\beta + c \operatorname{Cos}\gamma)^n d\omega + \ldots\ldots$$

Займемся теперь опредѣленіемъ интеграла $\int (a \operatorname{Cos}\alpha + b \operatorname{Cos}\beta + c \operatorname{Cos}\gamma)^n d\omega$.

Положивъ $a = R \operatorname{Cos}\lambda, \quad b = R \operatorname{Cos}\mu, \quad c = R \operatorname{Cos}\nu,$

онъ обратится въ слѣдующій: $R^n \int (\operatorname{Cos}\lambda \operatorname{Cos}\alpha + \operatorname{Cos}\mu \operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Cos}\nu \operatorname{Cos}\gamma)^n d\omega,$

или, полагая $\operatorname{Cos}\lambda \operatorname{Cos}\alpha + \operatorname{Cos}\mu \operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Cos}\nu \operatorname{Cos}\gamma = \operatorname{Cos}\vartheta,$

получимъ $R^n \int \operatorname{Cos}^n \vartheta\, d\omega.$

Здѣсь ϑ изображаетъ уголъ, составляемый направленіемъ R съ r. Такъ какъ положеніе линіи R постоянное, а r измѣняетъ свое направленіе всѣми возможными образами, то и уголъ ϑ будетъ измѣняться отъ 0 до π. Если разложимъ сферическую поверхность, коей элементъ изображенъ у насъ чрезъ $d\omega$, на другіе элементы, сперва коническими поверхностями, составляющими уголъ ϑ съ R, потомъ плоскостями, проходящими чрезъ R, и образующими съ одною изъ сихъ плоскостей уголъ p, то получимъ $d\omega = \operatorname{Sin}\vartheta \,.\, d\vartheta \,.\, dp$, и слѣдовательно надобно будетъ искать интегралъ

$$R^n \int \operatorname{Cos}^n \vartheta \operatorname{Sin}\vartheta\, d\vartheta\, dp$$

отъ $p=0$ до $p=2\pi$, и отъ $\vartheta=0$ до $\vartheta=\pi$; интегрируя сперва относительно p, получимъ

$$2\pi R^n \int \operatorname{Cos}^n \vartheta \operatorname{Sin}\vartheta\, d\vartheta,$$

а потомъ, въ разсужденіи ϑ, $\quad 2\pi R^n \dfrac{\operatorname{Cos}^{n+1}(o) - \operatorname{Cos}^{n+1}(\pi)}{n+1} = 2\pi\left(\dfrac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}\right) R^n.$

Слѣдовательно, если n *чётное число*, или $(-1)^{n+1} = -1$, тогда $R^n \int \operatorname{Cos}^n \vartheta \operatorname{Sin}\vartheta\, d\vartheta\, dp = \dfrac{4\pi}{n+1} R^n,$

а если n *нечётное*, то $\quad R^n \int \operatorname{Cos}^n \vartheta \operatorname{Sin}\vartheta\, d\vartheta\, dp = 0,$

что впрочемъ слѣдуетъ и изъ формулы $\int \operatorname{Cos}^i\alpha \operatorname{Cos}^k\beta \operatorname{Cos}^l\gamma \,.\, d\omega = 0$, которая уже была доказана.

И такъ, разсматриваемый нами рядъ приметъ видъ

$$\frac{1}{1.2}\cdot\frac{4\pi}{3} R^2 \int_0^\rho \varphi(r)\, r^4 dr + \frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{4\pi}{5} R^4 \int_0^\rho \varphi(r)\, r^6\, dr + \ldots\ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots 2n}\cdot\frac{4\pi}{2n+1} R^{2n}\int_0^\rho \varphi(r) r^{2n+2} dr + \ldots\ldots$$

Положивъ

$$\frac{1}{1.2}\cdot\frac{4\pi}{3}\int_0^\rho \varphi(r)\, r^4 dr = K_1$$

$$\frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{4\pi}{5}\int_0^\rho \varphi(r)\, r^6 dr = K_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{1.2.3\ldots 2n}\cdot\frac{4\pi}{2n+1}\int_0^\rho \varphi(r)\, r^{2n+2} dr = K_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

рядъ обратится въ слѣдующій: $\quad K_1 R^2 + K_2 R^4 + \ldots\ldots + K_n R^{2n} + \ldots\ldots$

Но $R^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2$; слѣдовательно получимъ

$$K\left(\frac{du^2}{dx^2} + \frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2}\right) + K_2\left(\frac{du^2}{dx^2} + \frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2}\right)^2 + \ldots\ldots + K_n\left(\frac{du^2}{dx^2} + \frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2}\right)^n + \ldots\ldots$$

Само собой разумѣется, что въ этомъ ряду, по разложеніи степеней, каждый членъ вида $A\,\frac{du^{2i}}{dx^{2i}}\cdot\frac{du^{2k}}{dy^{2k}}\cdot\frac{du^{2l}}{dz^{2l}}$ долженъ быть замѣненъ частною производною $A\,\frac{d^{2i+2k+2l}u}{dx^{2i}dy^{2k}dz^{2l}}$.

И такъ, уравненіе, опредѣляющее законъ распространенія теплоты внутри твердаго тѣла, будетъ

$$C\frac{du}{dt} = K_1\left(\frac{du^2}{dx^2} + \frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2}\right) + K_2\left(\frac{du^2}{dx^2} + \frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2}\right)^2 + \ldots\ldots + K_n\left(\frac{du^2}{dx^2} + \frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2}\right)^n + \ldots\ldots$$

Если же освободимся отъ символическихъ знакоположеній, то получимъ

$$(6)\begin{cases} C\frac{du}{dt} = K_1\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)+K_2\left(\frac{d^4u}{dx^4}+\frac{d^4u}{dy^4}+\frac{d^4u}{dz^4}+2\frac{d^4u}{dx^2dy^2}+2\frac{d^4u}{dx^2dz^2}+2\frac{d^4u}{dy^2dz^2}\right)+\ldots\ldots \\ +K_n\Big[\frac{d^{2n}u}{dx^{2n}}+\frac{d^{2n}u}{dy^{2n}}+\frac{d^{2n}u}{dz^{2n}}+n\Big(\frac{d^{2n}u}{dx^{2n-2}dy^2}+\frac{d^{2n}u}{dx^2dy^{2n-2}}+\frac{d^{2n}u}{dx^{2n-2}dz^2}+\frac{d^{2n}u}{dx^2dz^{2n-2}}+\frac{d^{2n}u}{dy^{2n-2}dz^2}+\frac{d^{2n}u}{dy^2dz^{2n-2}}\Big)+\ldots\Big]+\ldots \end{cases}$$

Въ этомъ уравненіи численные коэффиціенты $K_1, K_2, \ldots . K_n, \ldots .$ будутъ составлять рядъ быстро убывающій, по причинѣ возрастающихъ степеней r, входящихъ подъ интегралы, опредѣляющіе ихъ величины. Если отбросимъ $K_2, K_3, \ldots . K_n, \ldots .$ и удержимъ только K_1, то получимъ уравненіе (5), выведенное нами выше.

Обратимся теперь къ количеству теплоты $dvdt\int(u'-u)\varphi(r)\,dv'$, которое частица dv получаетъ во время dt; это количество, чрезъ подстановленіе на мѣсто интеграла $\int(u'-u)\varphi(r)\,dv'$ найденнаго сей-часъ значенія, обратится въ

$$dvdt\left[K_1\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)+K_2\left(\frac{d^4u}{dx^4}+\ldots\right)+\ldots+K_n\left(\frac{d^{2n}u}{dx^{2n}}+\ldots\right)+\ldots\right].$$

Найдемъ интегралъ этого выраженія во всемъ протяженіи какого нибудь объёма A, воображаемаго внутри того тѣла, котораго разсматриваемъ температуру. По извѣстнымъ формуламъ получимъ выраженіе

$$dt\int\Big\{K_1\left(\frac{du}{dx}\,Cos\,\lambda+\frac{du}{dy}\,Cos\,\mu+\frac{du}{dz}\,Cos\,\nu\right)+K_3\Big[\left(\frac{d^3u}{dx^3}+\frac{d^3u}{dxdy^2}+\frac{d^3u}{dxdz^2}\right)Cos\,\lambda$$
$$+\left(\frac{d^3u}{dy^3}+\frac{d^3u}{dydx^2}+\frac{d^3u}{dydz^2}\right)Cos\,\mu+\left(\frac{d^3u}{dz^3}+\frac{d^3u}{dzdx^2}+\frac{d^3u}{dzdy^2}\right)Cos\,\nu\Big]+\ldots\Big\}\,ds,$$

въ которомъ λ, μ, ν изображаютъ углы, составляемые внѣшнею частію нормали къ поверхности разсматриваемаго объёма съ координатными осями, а ds элементъ этой поверхности. Предыдущее выраженіе, взятое съ противнымъ знакомъ, изобразитъ количество теплоты, которое каждый элементъ объёма A потеряетъ во время dt, и слѣдовательно будетъ также равняться проходящему сквозь поверхность объёма A количеству теплоты. Впрочемъ, можетъ случиться, что выраженіе

$$(7)\qquad -dt\int\Big\{K_1\left(\frac{du}{dx}\,Cos\,\lambda+\frac{du}{dy}\,Cos\,\mu+\frac{du}{dz}\,Cos\,\nu\right)+K_3\Big[\left(\frac{d^3u}{dx^3}+\ldots\right)Cos\,\lambda+\ldots\Big]+\ldots\Big\}\,ds$$

будетъ отрицательное; это значитъ, что въ такомъ случаѣ объёмъ A не потеряетъ, а пріобрѣтетъ это количество теплоты. Та же формула изобразитъ количество тепла, которое цѣлое тѣло теряетъ, если подъ A будемъ разумѣть объёмъ всего разсматриваемаго тѣла. Впрочемъ, не худо замѣтить, что въ строгомъ смыслѣ, нельзя приложить вышеприведеннаго выраженія къ цѣлому объёму тѣла, ибо точки, находящіяся очень близко къ поверхности, испускаютъ непосредственно теплоту внѣ тѣла, такъ что относительно сихъ точекъ нельзя будетъ употребить вычисленій, которыми опредѣляется количество теплоты, пріобрѣтаемое частицею dv. И такъ, для бо́льшей строгости, мы допустимъ, что A изображаетъ объёмъ цѣлаго тѣла безъ наружнаго слоя, весьма тонкаго; поэтому, формула (7) изобразитъ количество тепла, получаемаго наружнымъ слоемъ отъ внутренней части тѣла. Положимъ, что окружающая середина имѣетъ постоянную температуру *нуль* градусовъ; слѣдовательно, по третьему закону, элементъ ds поверхности испуститъ наружу во время dt количество теплоты, пропорціональное произведенію $udsdt$; пусть будетъ $hudsdt$ это количество, гдѣ h изображаетъ постоянный коэффиціентъ, именуемый *наружною проводимостію (conductibilité extérieure, pouvoir émissif)*; и такъ, количество теплоты, испускаемое тѣломъ наружу, будетъ $hdt\int uds$. Но ясно, что разность между этою величиною и величиною (7), должна быть весьма малая, иначе наружный слой получилъ бы количество теплоты, пропорціональное только элементу времени dt, и, по причинѣ, что объёмъ слоя весьма малъ, температура его сдѣлалась бы чрезвычайно высокою, а этого въ опытахъ никогда не замѣчено. И такъ, уравнивъ выраженіе (7) интегралу $hdt\int uds$, раздѣливъ на общіе множители, и уничтоживъ знакъ $\int$, получимъ:

$$K_1\left(\frac{du}{dx}\,Cos\,\lambda+\frac{du}{dy}\,Cos\,\mu+\frac{du}{dz}\,Cos\,\nu\right)+K_2\Big[\left(\frac{d^3u}{dx^3}+\frac{d^3u}{dxdy^2}+\frac{d^3u}{dxdz^2}\right)Cos\,\lambda+\left(\frac{d^3u}{dy^3}+\frac{d^3u}{dydx^2}+\frac{d^3u}{dydz^2}\right)Cos\,\mu$$
$$+\left(\frac{d^3u}{dz^3}+\frac{d^3u}{dzdx^2}+\frac{d^3u}{dzdy^2}\right)Cos\,\nu\Big]+\ldots+hu=0\ \ldots\ldots\ldots\ (8)$$

Вотъ уравненіе, которое вмѣстѣ съ (6) и съ условіемъ (1), служитъ для опредѣленія температуры u въ функціи x, y, z и t (*).

Въ обыкновенной теоріи теплоты отбрасываютъ коэффиціенты K_2, K_3,... а удерживаютъ только K_1. Въ этомъ предположеніи, уравненія (6), (8) и (1), въ которыхъ вмѣсто K_1 пишемъ K, а вмѣсто h, hK, примутъ видъ:

$$(9)\begin{cases} C\dfrac{du}{dt}=K\left(\dfrac{d^2u}{dx^2}+\dfrac{d^2u}{dy^2}+\dfrac{d^2u}{dz^2}\right)\\ \dfrac{du}{dx}\,Cos\,\lambda+\dfrac{du}{dy}\,Cos\,\mu+\dfrac{du}{dz}\,Cos\,\nu+hu=0\\ u=f(x,y,z)\ \text{когда}\ t=0.\end{cases}$$

Математическая теорія распространенія тепла въ твердыхъ тѣлахъ, въ допущенномъ предположеніи, приводится къ интегрированію этихъ трехъ уравненій. Постоянный коэффиціентъ C называется *теплоёмкостію*, а K, *относительною внутреннею теплопроводимостію*, или просто *проводимостію*; h изображаетъ содержаніе наружной теплопроводимости къ внутренней. См. CAPACITÉ, CONDUCTIBILITÉ.

Приложимъ уравненія (9) къ шару, коего начальную температуру положимъ постоянною, напримѣръ, равною 1. Изобразивъ чрезъ l радіусъ шара, получимъ

$$(10)\begin{cases} C\dfrac{du}{dt}=K\left(\dfrac{d^2u}{dx^2}+\dfrac{d^2u}{dy^2}+\dfrac{d^2u}{dz^2}\right)\\ x\dfrac{du}{dx}+y\dfrac{du}{dy}+z\dfrac{du}{dz}+hlu=0\\ u=1,\ \text{когда}\ t=0.\end{cases}$$

Если означимъ чрезъ r перемѣнный радіусъ, то есть, разстояніе разсматриваемой точки внутри шара отъ его центра, то u будетъ функціею только двухъ количествъ, именно, радіуса r и времени t; слѣдовательно, въ силу уравненія $x^2+y^2+z^2=r^2$, найдется

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dr}\cdot\frac{x}{r},\quad \frac{du}{dy}=\frac{du}{dr}\cdot\frac{y}{r},\quad \frac{du}{dz}=\frac{du}{dr}\cdot\frac{z}{r},$$

откуда

$$x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}+z\frac{du}{dz}=r\frac{du}{dr}$$

и уравненіе, относящееся къ поверхности, приметъ видъ

$$\frac{du}{dr}+hu=0.$$

Далѣе получимъ:

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d^2u}{dr^2}\cdot\frac{x^2}{r^2}+\frac{du}{dr}\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right)$$
$$\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{d^2u}{dr^2}\cdot\frac{y^2}{r^2}+\frac{du}{dr}\left(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}\right)$$
$$\frac{d^2u}{dz^2}=\frac{d^2u}{dr^2}\cdot\frac{z^2}{r^2}+\frac{du}{dr}\left(\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3}\right),$$

откуда

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}=\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{du}{dr}=\frac{r\dfrac{d^2u}{dr^2}+2\dfrac{du}{dr}}{r}=\frac{1}{r}\frac{d^2(ru)}{dr^2}.$$

И такъ, первое изъ уравненій (10) приметъ видъ

$$C\frac{du}{dt}=\frac{K}{r}\frac{d^2(ur)}{dr^2}$$

или

$$C\frac{d(ru)}{dt}=K\frac{d^2(ur)}{dr^2}.$$

Пусть будетъ для краткости $ru=\nu$; получимъ

$$C\frac{d\nu}{dt}=K\frac{d^2\nu}{dr^2},$$

и въ то же время выраженіе $\frac{du}{dr}+hu$ обратится въ слѣдующее:

$$\frac{1}{r}\left[\frac{d(ru)}{dr}+\left(h-\frac{1}{r}\right)ru\right]=\frac{1}{r}\left[\frac{d\nu}{dr}+\left(h-\frac{1}{r}\right)\nu\right],$$

почему уравненіе при поверхности будетъ

$$\frac{d\nu}{dr}+\left(h-\frac{1}{l}\right)\nu=0;$$

сверхъ того, при $t=o$, $\nu=r$. И такъ, уравненія, опредѣляющія состоянія температуръ разсматриваемаго шара, приводятся къ тремъ слѣдующимъ:

$$\frac{d\nu}{dt}=K'\frac{d^2\nu}{dr^2}$$
$$\frac{d\nu}{dr}+h'\nu=o$$
$$\nu=r\ \text{когда}\ t=o,$$

въ которыхъ положили для краткости $\frac{K}{C}=K'$ и $h-\frac{1}{l}=h'$.

Интегрированіе сихъ уравненій завлекло бы насъ слишкомъ далёко; ограничимся опредѣленіемъ окончательной температуры тѣла, то есть той, которую оно будетъ имѣть по истеченіи значительнаго времени. Для этого должно положить $\frac{d\nu}{dt}=o$, откуда и $\frac{d^2\nu}{dr^2}=o$; слѣдовательно

$$\nu=ar+b.$$

Но когда $r=o$, то и $\nu=o$, ибо $\nu=ru$; поэтому $b=o$, и получимъ

$$\nu=ar,$$

что приводитъ уравненіе

$$\frac{d\nu}{dr}+h'\nu=0$$

*) Уравненія (6) и (8) выведены нашимъ математикомъ Г. Остроградскимъ; они еще нигдѣ не были помѣщены, и напечатаны въ первый разъ въ нашемъ Лексиконѣ.

къ слѣдующему:

$$a(1+h'l)=0,$$

или, подставляя на мѣсто h' равную ему величину $h-\frac{1}{l}$, $hla=0$;

и такъ $a=0$, ибо мы не предполагаемъ чтобы h уничтожался. Отсюда заключаемъ, что $v=0$, и слѣдовательно $u=0$, а это показываетъ, что по истеченіи значительнаго времени, шаръ будетъ имѣть температуру окружающей его середины, что дѣйствительно и справедливо. Еслибы положили $h=0$, то нашли бы $v=ar$, и слѣдовательно $u=a$; такъ какъ этотъ выводъ показываетъ, что температура постоянна, то она должна быть равна первоначальному своему состоянію, то есть, $u=1$; это слѣдствіе очевидно справедливо, ибо, въ настоящемъ предположеніи, теплота, заключающаяся въ шарѣ, не переходитъ въ окружающую его середину.

Когда объясняемъ явленія теплоты допуская существованіе особенной жидкости, именуемой теплородомъ, то предполагаемъ, что частицы этой жидкости отталкиваются взаимно, и движутся съ чрезвычайною быстротою. Внутри тѣлъ твердыхъ и жидкихъ ихъ движеніе несравненно медленнѣе нежели въ газахъ и пустотѣ. Разсматриваніе внутренняго лучеобразнаго движенія тепла (*rayonnement intérieur*) въ твердыхъ тѣлахъ приводитъ къ дифференціальнымъ уравненіямъ распространенія теплоты, которыя мы вывели выше. Сообщеніе же лучей между тѣлами отдѣльными, находящимися въ воздухѣ или въ пустотѣ, составляетъ другую отрасль математической теоріи теплоты, называемую *теоріею лучистой теплоты* (*théorie de la chaleur rayonnante*). Это то же въ отношеніи тепла, что *Катоптрика* въ разсужденіи свѣта. По объёму нашего Лексикона, мы не можемъ предложить никакихъ подробностей объ теоріи лучистой теплоты, представляющей весьма примѣчательные законы, а укажемъ только на сочиненія, въ которыхъ читатели могутъ почерпнуть свѣдѣнія объ этомъ предметѣ: *Fourier*, Tome V des Mémoires de l'Académie de Paris; *Poisson*, Théorie mathématique de la chaleur, 1835; Annales de Physique et de Chymie, въ которыхъ тѣ же авторы помѣстили нѣсколько Разсужденій объ этомъ предметѣ.

Ограничимся приведеніемъ изъ сей теоріи главной формулы, выражающей количество теплоты, сообщаемое безконечно малымъ элементомъ ω какого нибудь тѣла m безконечно же малому элементу s другаго тѣла m', находящемуся отъ перваго на извѣстномъ разстояніи. Пусть будетъ r разстояніе двухъ элементовъ ω и s; ϑ и φ углы, составляемые нормалями къ ω и s съ r; наконецъ u и v соотвѣтственныя температуры элементовъ ω и s, а dt, дифференціалъ времени. Количество теплоты, о которомъ мы сей-часъ упомянули, выразится формулою

$$\frac{K(u-v)\,Cos\vartheta\,Cos\varphi\cdot\omega.s.dt}{r^2},$$

въ которой K изображаетъ постоянную величину.

Въ заключеніе скажемъ, что теорія теплоты, собственно говоря, не ранѣе 1812 года сдѣлалась новою отраслью Физико-математическихъ наукъ. До этого времени, только нѣкоторыя отрывочныя изслѣдованія *Ламберта*, *Прево* (*Pierre Prévost*, de Genève) и *Лапласа*, составляли всю математическую часть сей теоріи. Трудъ Г. Фурье, увѣнчанный Парижскою Академіею *) въ началѣ 1812 года, представилъ обильный и разнообразный итогъ вопросовъ изъ математической Теоріи Теплоты, и возвелъ ее на степень самостоятельной науки. Впослѣдствіи, именно въ 1822 году, Фурье издалъ сочиненіе подъ заглавіемъ *Théorie analytique de la chaleur*, заключающее въ себѣ рѣшенія многоразличныхъ вопросовъ, относящихся къ математической теоріи теплоты.

CHAMBRE NOIRE или CHAMBRE OBSCURE (Опт.) **ТЕМНЫЙ ПОКОЙ**, КАМЕРА ОБСКУРА. CHAMBRE CLAIRE, СВѢТЛЫЙ ПОКОЙ. Читатели найдутъ описаніе этихъ оптическихъ снарядовъ почти во всѣхъ курсахъ Оптики, а также въ физическихъ Лексиконахъ *Гелера* и *Фишера*.

CHAMP D'UNE LUNETTE. (Опт.) **ПОЛЕ ТРУБЫ.** Такъ называется круговое пространство, усматриваемое въ зрительную трубу сквозь стекла, ее составляющія. Поле трубы измѣряется угломъ, подъ которымъ бы невооруженный глазъ видѣлъ пространство, обнимаемое имъ при пособіи трубы.

---

*) *Mémoires de l'Académie des sciences*, T. IV и V.

CHANCE. (Исч. Вѣр.) **ВѢРОЯТНОСТЬ, СЛУЧАЙНОСТЬ, СЛУЧАЙ, РИСКЪ.** Смот. PROBABILITÉ.

CHANCES ÉGALES. Равныя вѣроятности. CHANCES INÉGALES; неравныя вѣроятности. *Courir les chances, les hasards*; *рисковать, ставить на удачу. Parier à chances égales; закладъ держать съ равною вѣроятностію выигрыша и проигрыша, держать закладъ безобидно для обѣихъ сторонъ.* CHANCES FAVORABLES; благопріятные случаи. — Бо́льшая вѣроятность. CHANCES DÉFAVORABLES. Неблагопріятные, противные случаи. — Ме́ньшая вѣроятность. CHANCES DE SUCCÈS; благопріятствующія случаи, удачи. *Il y a deux chances pour, et une contre l'arrivée de cet événement; два случая благопріятствуютъ этому событію, а одинъ не благопріятствуетъ.*

На Русскомъ языкѣ нѣтъ слова, которое выражало бы вполнѣ Французское *chance*; въ большей части случаевъ мы должны прибѣгать къ разнымъ словамъ, иногда даже къ цѣлымъ фразамъ, чтобы передать его значеніе, а это весьма неудобно, въ особенности же въ математическомъ языкѣ, котораго важнѣйшія достоинства безъ сомнѣнія составляютъ опредѣлительность и краткость. За неимѣніемъ покамѣстъ никакого термина, въ математическомъ языкѣ, соотвѣтствующаго Французскому *chance*, мы предлагаемъ новое слово *статочность* [отъ глагола *статься* (можетъ)], выражающее, если не ошибаемся, довольно близко смыслъ, придаваемый Французскими математиками слову *chance*. Если впослѣдствіи найдутъ болѣе удачный терминъ, то мы откажемся отъ нашего, и примемъ съ благодарностію новый. И такъ, *chances égales, chances favorables, chances de succès*, мы переводимъ: *равныя, благопріятныя, благопріятствующія статочности. Parier à chances égales; держать закладъ при равныхъ статочностяхъ; les chances sont pour l'arrivée de cet événement; статочности на сторонѣ этого событія*, и проч.

CHANGE. (Ариѳ.) **ПЕРЕВОДЪ ДЕНЕГЪ.** Для избѣжанія вывоза денежныхъ суммъ, негоціанты разныхъ Государствъ вознаграждаютъ взаимные долги одни другими, что приводитъ къ вычисленію, имѣющему цѣлію, по извѣстному курсу монетъ, опредѣлить сколько данная сумма, платимая въ одномъ торговомъ мѣстѣ, стоитъ въ другомъ. Ежели изъ одного мѣста сумма переводится непосредственно на другое, то для рѣшенія задачи достаточно употребить *простое* тройное правило. Если же желаемъ перевесть извѣстную сумму изъ одного Государства на другое чрезъ опредѣленныя торговыя мѣста, для которыхъ курсы монетъ въ отношеніи упомянутыхъ двухъ Государствъ извѣстны, то употребляется *сложное* тройное правило, или такъ называемое *цѣпное (règle conjointe)*. Для поясненія сказаннаго, положимъ, что требуется *перевесть* 10000 *Французскихъ франковъ чрезъ Берлинъ на Русскіе рубли, зная, что* 10 *Франц. франковъ* $=$ 2,72 *Прус. талеровъ, а* 100 *Прус. талер.* $=$ 326 *рублямъ*?

Чтобы рѣшить эту задачу, превращаемъ сперва 10000 франковъ въ талеры; для этого составляемъ пропорцію

$$10\text{ ф.} : 2{,}72\text{ т.} :: 10000\text{ ф.} : x\text{ т.};$$

потомъ, x талеровъ переводимъ на рубли посредствомъ пропорціи

$$100\text{ т.} : 326\text{ р.} :: x : y.$$

Послѣдній членъ y будетъ означать искомое число рублей. Чтобы найти эту величину, перемножаемъ почленно обѣ пропорціи, и находимъ:

$$1000 : 326 \times 2{,}72 :: 10000 \times x : xy$$

или

$$1 : 886{,}72 :: 10 : y = 8867{,}2 \text{ рублей.}$$

CHANGEMENT D'ORDRE. (Алг.) **ПЕРЕЛОЖЕНІЕ**; перемѣщеніе, перестановка, измѣненіе порядка. Смот. ALTERNATION.

CHANGEMENT DE LA VARIABLE INDÉPENDANTE. ИЗМѢНЕНІЕ ПЕРЕМѢННОЙ НЕЗАВИСИМОЙ. Пусть будетъ уравненіе

$$y = f(x),$$

въ которомъ предполагаемъ перемѣнную x зависимою, напримѣръ, отъ измѣняемой t; диференцируя это уравненіе нѣсколько разъ сряду, получимъ формулы

$$\begin{aligned} dy &= f'(x)\,dx \\ d^2y &= f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2x \\ d^3y &= f'''(x)\,dx^3 + 3f''(x)\,dx\,d^2x + f'(x)\,d^3x, \end{aligned}$$

изъ которыхъ выводимъ

$$(A)\left\{\begin{aligned} f'(x) &= \frac{dy}{dx} \\ f''(x) &= \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3} = \frac{1}{dx}\,d\left(\frac{dy}{dx}\right) \\ f'''(x) &= \frac{dx\,(dx\,d^3y - dy\,d^3x) - 3\,d^2x\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{dx^5} \\ &= \frac{1}{dx}\,d\left(\frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3}\right) = \frac{1}{dx}\,d\left[\frac{1}{dx}\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Если бы желали теперь перейти къ тому случаю, въ которомъ x принимается за перемѣнную независимую, то въ предыдущихъ формулахъ стоило бы только положить dx постояннымъ, и слѣдовательно $d^2x=0$, $d^3x=0\ldots$, чрезъ что уравн. (A) превращятся въ такія:

$$f'(x)=\frac{dy}{dx},\ f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2},\ f'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3},\ldots\ldots$$

Сравненіе сихъ послѣднихъ формулъ съ (A) показываетъ, что ежели послѣдовательныя производныя отъ функціи $f(x)$ будутъ выражены посредствомъ дифференціаловъ перемѣнныхъ x и $y=f(x)$, то одна только производная перваго порядка $f'(x)$ не измѣнится, будемъ ли принимать x за перемѣнную зависимую, или независимую.

Если бы какое либо уравненіе, найденное въ предположеніи x независимаго, желали превратить въ такое, въ которомъ уже x разсматривается зависимымъ, то для полученія этого новаго уравненія, надлежало бы въ предложенномъ

на мѣсто $\frac{d^2y}{dx^2}$ подставить $\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$

на мѣсто $\frac{d^3y}{dx^3}$ поставить

$$\frac{dx\,(dx\,d^3y - dy\,d^3x) - 3\,d^2x\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{dx^5},$$

и такъ далѣе. Если отъ предположенія x независимаго желаемъ перейти къ предположенію y независимаго, то въ формулахъ (A) надобно положить $d^2y=0$, $d^3y=0,\ldots$; слѣдовательно

$\frac{d^2y}{dx^2}$ надобно замѣнить $-\frac{dy\,d^2x}{dx^3}$

$$\frac{d^3y}{dx^3}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{dy\,dx\,d^3x - 3\,dy\,(d^2x)^2}{dx^5}$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Употребленіе подобныхъ подстановленій и называютъ въ Дифференціальномъ Исчисленіи *измѣненіемъ перемѣнной независимой*.

CHAPE. (Мех.) **ГНѢЗДО, ПОДПЯТКА, ГЛАЗОКЪ.** Такъ называется вообще отверстіе, дѣлаемое въ деревѣ, въ желѣзѣ или въ чемъ другомъ, и въ которое входитъ стержень вала, оконечности оси блока, вѣсовъ, и проч. — *Обоймица.* Металлическая или деревянная раздвоенная полоса съ двумя отверстіями, въ которыя входитъ своими оконечностями ось блока, такъ что блокъ, заключаясь между сими двумя полосами, можетъ свободно обращаться около своей оси. — CHAPE или *chapelle d'une aiguille aimantée*; *шапочка магнитной стрѣлки.* Пустая пуговка, припаенная къ срединѣ магнитной стрѣлки для того, чтобы можно было ее надѣвать на остріе, около котораго она обращается.

CHAPELETS. (Прикл. Мех.) **БЕЗКОНЕЧНЫЯ ЦѢПИ, ЧЁТКИ.** Машина, употребляемая для отливанія воды. *Chapelets à godets, безконечныя цѣпи съ черпалами.*

CHARGE. (Мех.) **ДАВЛЕНІЕ. — ГРУЗЪ.** *Charge supportée par le point d'appui d'un levier; давленіе выдерживаемое, претерпѣваемое подпорною точкою въ рычагѣ.*

CHARGER. ОБРЕМЕНИТЬ.

CHARNIÈRE. (Мех.) **ШАРНЕРЪ, ШАЛНЕРЪ, СМЫКЪ, ПЕТЛЯ.**

CHASSE. (Мех.) **РУЧКА, КРЮКЪ.** Полоса, перпендикулярная къ коромыслу вѣсовъ, за которую держатъ ихъ когда взвѣшиваютъ тѣла.

CHASSER. (Алг.) **ИСКЛЮЧИТЬ.** См. ÉLIMIMER.

CHAVIRER. (Мех.) **ОПРОКИНУТЬСЯ.** Говорится о тѣлахъ, погруженныхъ въ воду, когда нарушается ихъ равновѣсіе. *Quand le métacentre est au dessous du centre de gravité d'un corps flottant, et que l'on écarte ce dernier de sa position verticale, la poussée du fluide fera chavirer le corps; когда метацентръ ниже центра тяжести плавающаго тѣла, то, отклонивъ сіе послѣднее отъ вертикальнаго положенія, напоръ жидкости опрокинетъ тѣло.*

CHERCHÉE (QUANTITÉ). (Мат.) **ИСКОМОЕ КОЛИЧЕСТВО.** Величина, которую по свойству предложенной задачи требуется опредѣлить.

CHERCHER. ИСКАТЬ, РАЗЫСКИВАТЬ. *Chercher la valeur d'une quantité, propre à vérifier une certaine condition; искать значеніе количества, удовлетворяющаго извѣстному условію. Chercher les racines d'une équation; искать, разыскивать корни уравненія.*

CHEVILLE. СТЕРЖЕНЬ, БОЛТЪ, КОЛОКЪ. Вообще деревянная или желѣзная жердочка, коей длина и толщина зависятъ отъ цѣли, съ которою ее употребляютъ. *Roue à chevilles, колесо съ стержнями*; колесо, по ободу котораго насажены въ нѣкоторомъ одна отъ другой разстояніи спицы, служащія вмѣсто рукоятокъ для приведенія того колеса въ движеніе.

CHÈVRE. (Прикл. Мех.) **КОЗА.** Машина, употребляемая для подъёма большихъ тяжестей, какъ то: артиллерійскихъ орудій, камней, бревенъ и проч. Она состоитъ изъ двухъ брусьевъ, иногда для прочности изъ трехъ, соединенныхъ между собою верхними концами, и имѣетъ видъ треугольника или пирамиды. Брусья, для большей надёжности, скрѣпляются между собою посредствомъ перекладинъ. Въ вершинѣ треугольника привязывается простой блокъ, иногда же и система сложныхъ блоковъ. Къ одному концу веревки, проходящей чрезъ жолобъ блока, привязываютъ поднимаемый грузъ, а другимъ концомъ веревка навивается на валъ горизонтальнаго ворота, коего ось параллельна основанію треугольника, то есть, линіи, соединяющей нижніе концы двухъ брусьевъ. Гнѣзда, въ которыхъ обращаются шипы вала, находятся на стойкахъ, придѣланныхъ къ брусьямъ. Вся машина удерживается въ надлежащемъ положеніи посредствомъ канатовъ, коихъ концы прикрѣплены къ неподвижнымъ точкамъ.

Воротъ приводится въ движеніе обыкновенными способами, именно, посредствомъ рычаговъ или колеса, съ насаженными на него стержнями.

CHIFFRE. (Ариѳ.) **ЦИФРА, ЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЗНАКЪ.** Смот. CARACTÈRE.

CHIFFRER. СЧИТАТЬ. Глаголъ употребляемый въ просторѣчіи вмѣсто: *вычислять*.

CHILIADE. (Ариѳ.) **ТЫСЯЧА.** *Calculer une, deux chiliades de logarithmes*; *вычислить, одну, двѣ тысячи логариѳмовъ*.

CHILIGONE. (Геом.) **ТЫСЯЧЕУГОЛЬНИКЪ.** Плоская правильная фигура, изъ тысячи сторонъ и тысячи угловъ состоящая.

CHOC, COLLISION DES CORPS, PERCUSSION. (Мех.) **СОУДАРЕНІЕ, СТОЛКНОВЕНІЕ ТѢЛЪ, УДАРЪ.** Когда два или нѣсколько тѣлъ, движущихся съ какими ни есть скоростями, встрѣчаются такъ, что не могутъ продолжать своего движенія не проницая одни въ другія, то, въ слѣдствіе непроницаемости тѣлъ, движеніе ихъ отъ столкновенія претерпитъ нѣкоторое измѣненіе, равное тому усилію, которое потребно для воспрепятствованія проницаемости. При такихъ обстоятельствахъ произойдетъ быстрая перемѣна въ скоростяхъ разсматриваемыхъ тѣлъ, и явленіе, о которомъ говоримъ, называется *соудареніемъ* или *ударомъ*.

Ударъ можетъ быть прямой и косвенный. Когда направленіе удара перпендикулярно въ точкѣ прикосновенія къ поверхностямъ соударяющихся тѣлъ, и, сверхъ того, проходитъ чрезъ ихъ общій центръ тяжести, то ударъ называется *прямымъ*. Если же эти два условія не выполнены оба въ одно время, то ударъ именуется *косвеннымъ*.

Разсмотримъ теперь нѣкоторыя изъ простѣйшихъ явленій, сопровождающихъ соудареніе двухъ тѣлъ; для простоты положимъ, что они сферическія, и, сверхъ того, что они имѣютъ одинаковую плотность. И такъ, вообразимъ два однородныхъ шара, коихъ всѣ частицы описываютъ равномѣрнымъ движеніемъ прямыя линіи, параллельныя прямой, соединяющей ихъ центры; сіи послѣдніе, очевидно, будутъ также и центрами тяжести сихъ шаровъ. Допустимъ что шары движутся одинъ на встрѣчу другому; слѣдовательно они встрѣтятся, и надобно опредѣлить обстоятельства, сопровождающія ихъ соудареніе. Мы разсмотримъ задачу въ двухъ крайнихъ случаяхъ, то есть, предполагая оба шара или одаренными совершенною упругостію, или совершенно лишенными сего свойства. Займемся сперва вторымъ случаемъ.

Въ самое мгновеніе встрѣчи, шары, въ слѣдствіе своей непроницаемости, должны сжаться, болѣе или менѣе, смотря на степень ихъ твердости. Во время сжатія, движеніе двухъ шаровъ будетъ весьма сложно, и опредѣленіе обстоятельствъ этого движенія, зависящее отъ анализа весьма труднаго, не можетъ быть предложено въ нашемъ Лексиконѣ. Но когда это насильственное состояніе прекратится, то всѣ частицы двухъ шаровъ начнутъ двигаться равномѣрно, и вопросъ приведется къ опредѣленію скорости, общей всѣмъ частицамъ.

Замѣтимъ во первыхъ, что движеніе ихъ будетъ параллельно направленію первоначальнаго движенія, а во вторыхъ, что въ слѣдствіе *начала сохраненія движенія центра тяжести*, центръ тяжести системы двухъ разсматриваемыхъ шаровъ будетъ имѣть одну и ту же скорость до удара, во время удара, и послѣ него. Чтобы удостовѣриться въ томъ, что въ настоящемъ случаѣ начало, о которомъ говоримъ, имѣетъ мѣсто, вспомнимъ только, что внутреннія силы, то есть, тѣ, которыя происходятъ отъ взаимнаго дѣйствія частицъ системы, нисколько не измѣняютъ движенія центра тяжести. Но, до удара, никакія силы, по предположенію, не дѣйствовали на частицы разсматриваемыхъ шаровъ; слѣдовательно ихъ центръ тяжести будетъ двигаться равномѣрно. Во время соударенія, частицы будутъ побуждаемы притягательными и отталкивающими взаимодѣйствіями; но такъ какъ эти силы внутреннія, то движеніе центра тяжести останется тѣмъ же самымъ, какимъ было до удара, и сохранится таковымъ же до конца удара, и послѣ него.

Это начало не доставляетъ почти никакихъ свѣдѣній о томъ, что происходитъ во время удара, ибо тогда скорости различныхъ частицъ, различны; но оно достаточно для опредѣленія скорости системы послѣ удара; и дѣйствительно, такъ какъ послѣ удара скорости всѣхъ частицъ одинаковы, то достаточно знать движеніе одной, какой ни есть частицы; но скорость центра тяжести извѣстна, ибо она осталась та же, какою была до удара. И такъ, искомая скорость, общая всѣмъ частицамъ двухъ шаровъ послѣ удара, равна скорости, которую имѣлъ центръ тяжести шаровъ до удара.

Пусть будутъ m и m' массы двухъ разсматриваемыхъ шаровъ; a и a' соотвѣтственныя ихъ скорости до удара; x и x' перемѣнныя разстоянія ихъ центровъ тяжести отъ постоянной точки, взятой на прямой, по которой движутся эти центры, и соотвѣтствующія времени t. Мы будемъ принимать скорость a положительною; что касается до a', то она будетъ положительная, если шары m и m' движутся въ одну сторону, а отрицательная, если они идутъ на встрѣчу одинъ другому, почему величина a' должна быть принимаема съ двоякимъ знакомъ.

Изобразимъ чрезъ ξ разстояніе, по истеченіи времени t, центра тяжести системы двухъ шаровъ отъ выбранной постоянной точки; найдется

$$\xi = \frac{mx + m'x'}{m + m'}.$$

Скорость центра тяжести будетъ $\frac{d\xi}{dt}$, почему и получимъ

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{m\frac{dx}{dt} + m'\frac{dx'}{dt}}{m + m'}.$$

Но, до удара, $\frac{dx}{dt} = a$, $\frac{dx'}{dt} = \pm a'$; слѣдовательно, скорость центра тяжести двухъ шаровъ до удара будетъ

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{ma \pm m'a'}{m + m'}.$$

Сверхъ того, такъ какъ мы видѣли выше, что эта скорость сохранится и послѣ удара, то $\frac{ma \pm m'a}{m + m'} = u$ изобразитъ скорость, общую всѣмъ частицамъ двухъ шаровъ послѣ удара. Если шары идутъ одинъ на встрѣчу другому, и $ma > m'a'$, то шары будутъ удаляться отъ постоянной точки; когда $ma = m'a'$, то скорость обратится въ нуль, и слѣдовательно движеніе прекратится съ ударомъ; если же $ma < m'a'$, то система двухъ шаровъ послѣ удара будетъ приближаться къ постоянной точкѣ.

Легко доказать, что при соударенія двухъ шаровъ, совершенно неупругихъ какъ мы здѣсь предполагали, теряется отъ удара нѣкоторая часть живой силы. И въ самомъ дѣлѣ, замѣтимъ, что потерянная живая сила выражается разностію

$$ma^2 + m'a'^2 - (m + m')\,u^2;$$

если вычтемъ изъ нея количество

$$2u\,(ma \pm m'a' - mu - m'u),$$

которое, въ слѣдствіе уравненія $u = \frac{ma \pm m'a'}{m + m'}$, равно нулю, то эта разность не перемѣнится, и мы получимъ

$$m(a^2 - 2au + u^2) + m'(u^2 \mp 2a'u + a'^2) = m(a-u)^2 + m'(u \mp a')^2;$$

слѣдовательно

$$ma^2 + m'a'^2 - mu^2 - m'u^2 = m(a - u)^2 + m'(u \mp a')^2.$$

Эта формула выражаетъ, что потеря, о которой говоримъ, будетъ равна суммѣ живыхъ силъ, относящихся къ скоростямъ: $a - u$ пріобрѣтенной и $u \mp a'$ потерянной двумя шарами. Доказанное здѣсь предложеніе есть частный случай одной общей теоремы, которую предложилъ

Карно. Смот. CARNOT (THÉORÈME DE).

Разсмотримъ теперь что происходитъ при соудареніи двухъ упругихъ шаровъ. Здѣсь предполагается, что послѣ столкновенія, тѣла сжимаются до нѣкотораго предѣла, точно такъ, какъ и въ предыдущемъ случаѣ; но, когда сжатіе достигнетъ наибольшей степени, то тѣла начнутъ возстановляться, и ударъ должно считать прекратившимся не прежде, какъ когда шары получатъ, въ строгомъ смыслѣ, тотъ видъ, какой имѣли до удара. Съ этого мгновенія предполагается, что всѣ частицы обоихъ шаровъ принимаютъ одинаковыя скорости, но впрочемъ отличныя для каждаго изъ двухъ шаровъ.

Движеніе центра тяжести въ разсматриваемомъ теперь случаѣ, точно такъ какъ и при соудареніи неупругихъ тѣлъ, не подвергнется никакому измѣненію послѣ удара; и дѣйствительно, здѣсь какъ и прежде, частицы системы будутъ только подвержены дѣйствію внутреннихъ силъ. Но къ этому можно прибавить, что по причинѣ совершеннаго возстановленія шаровъ, частицы, ихъ составляющія, примутъ послѣ удара тѣ же относительныя положенія, какія имѣли до удара; слѣдовательно, на основаніи *начала живыхъ силъ*, живая сила системы до удара, и послѣ удара, будутъ одинаковы. И такъ, изобразивъ чрезъ v и v' скорости двухъ шаровъ послѣ удара, и удержавъ прежнія знаменованія буквъ, получимъ уравненія

$$mv + m'v' = ma \pm m'a'$$
$$mv^2 + m'v'^2 = ma^2 + m'a'^2,$$

изъ коихъ первое выражаетъ правило сохраненія движенія центра тяжести, а второе, начало живыхъ силъ. Отсюда выводимъ

$$m(v^2 - a^2) = \quad m'(a'^2 - v'^2)$$
$$m(v - a) = - m'(v' \mp a'),$$

или, раздѣляя первое уравненіе на второе,

$$v + a = v' \pm a', \text{ или } v - v' = - a \pm a'.$$

Совокупленіе послѣдняго уравненія съ формулою

$$mv + m'v' = ma \pm m'a'$$

приведетъ къ слѣдующимъ значеніямъ для v и v';

$$v = \frac{(m - m')a \pm 2m'a'}{m + m'}$$
$$v' = \frac{2ma \mp (m - m')a'}{m + m'}.$$

Когда массы двухъ шаровъ равны между собою, то полагая $m = m'$, найдемъ $v = \pm a'$, $v' = a$; то есть, шары, послѣ соударенія, обмѣняются своими скоростями. Предоставляемъ читателямъ разборъ другихъ частныхъ случаевъ, представляющихся при разсматриваніи соударенія двухъ упругихъ шаровъ; всѣ эти случаи рѣшаются посредствомъ вышеприведенныхъ двухъ формулъ.

Первая мысль о томъ, что соудареніе тѣлъ происходитъ по опредѣленнымъ законамъ, принадлежитъ какъ полагаютъ *Декарту*; но онъ не извлекъ изъ этой мысли той пользы, которую можно было ожидать, и даже ошибся въ большей части выведенныхъ имъ законовъ. Впослѣдствіи *Гугенсъ*, *Вренъ* и *Валлисъ* предложили вышеприведенныя формулы, опредѣляющія скорости, послѣ удара, упругихъ и неупругихъ тѣлъ.

CHOIX. (Исч. Вѣр.) **ВЫБОРЫ.** См. ÉLECTIONS.

CHOQUER. (Мех.) **УДАРЯТЬ.** *Se choquer*; *соударяться, сталкиваться.* *Les corps après s'être choqués и проч.* *Тѣла послѣ удара и проч.*

CHOROBATE. ХОРОБАТЪ. Деревянный уровень бывшій въ употребленіи у древнихъ, и очень неудобный по своей величинѣ. Хоробатъ, какъ должно догадываться по весьма неполному описанію, оставленному *Витрувіемъ* (Architectura Lib. III), состоялъ изъ линейки, имѣющей до 20 футовъ въ длинѣ, соединенной съ другою, такъ что весь снарядъ имѣлъ видъ буквы Т. Въ верхней части находился жолобъ, который наполнялся водою, по стоянію которой можно было судить, что верхняя линейка находилась въ положеніи горизонтальномъ. Въ тихую погоду употребляли нити съ свинцовыми гирьками, посредствомъ которыхъ приводили инструментъ въ надлежащее положеніе.

CHOROGRAPHIE. ХОРОГРАФІЯ, СТРАНООПИСАНІЕ. Описаніе какого либо Государства или страны. *Хорографическою картою* (*carte chorographique*) называется карта, на которой изображено какое либо Государство, или отдѣльная область. Когда карта обнимаетъ большую часть земной поверхности, то она именуется *географическою.*

CHOSES. (Геом.) **ЧАСТИ, ВЕЛИЧИНЫ.** Когда въ Геометріи говорятъ о сторонахъ и углахъ треугольника, то часто употребляютъ на Французскомъ языкѣ слово *choses.* Слѣдовательно, *choses* означаетъ въ одно время и стороны и углы треугольника. Напримѣръ: *De six choses dans un triangle il faut, en général, en connoitre trois pour que le triangle soit complètement déterminé.* *Изъ шести величинъ, разсматриваемыхъ въ треугольникѣ, вообще три опредѣляютъ его.*

CHRONOLOGIE. ХРОНОЛОГІЯ. Отъ Греческ. *χρόνος, время,* и *λόγος, слово.* Наука, имѣющая предметомъ измѣреніе и раздѣленіе времени.

Хронологія раздѣляется на *теорическую* и *прикладную.* Первая основана на астрономическихъ наблюденіяхъ и вычисленіяхъ. Вторая занимается опредѣленіемъ эпохъ различныхъ событій, ознаменовавшихъ политическую жизнь народовъ, и слѣдовательно служитъ основаніемъ Исторіи. Читатели могутъ почерпнуть нѣкоторыя свѣдѣнія о теорической Хронологіи въ статьяхъ: ANNÉE, CALENDRIER, CYCLE, ÈRE, JOUR, MOIS, PERIODE, TEMPS и проч.

CHRONOMÈTRE или **MONTRE MARINE. ХРОНОМЕТРЪ, МОРСКІЕ ЧАСЫ.** Отъ Греческ. *χρόνος, время,* и *μετρον, мѣра.* Часы устроенные съ большимъ тщаніемъ, и сохраняющіе равномѣрный ходъ въ продолженіи значительнаго времени. Самый легкій и удобный способъ опредѣленія долготъ въ морѣ, основанъ на употребленіи хронометровъ. Смот. LONGITUDE.

Въ 1714 году, въ царствованіи Королевы Анны, Англійскій Парламентъ обѣщалъ законнымъ актомъ награду въ десять тысячъ фунтовъ стерлинговъ тому, кто, по приговору Коммиссіи Долготъ, предсѣдательствуемой тогда *Нютономъ,* предложитъ способъ для опредѣленія долготы съ точностію, доведенной до одного градуса большаго круга; пятнадцать тысячъ, если точность будетъ простираться до двухъ третей градуса, и наконецъ, двадцать тысячъ фунтовъ стерлинговъ, когда погрѣшность не будетъ превышать половины градуса.

По прошествіи нѣсколькихъ лѣтъ, *Генрихъ Сюлли (Sully),* Англійскій механикъ, поселившійся во Франціи, окончилъ морскіе часы, первые, устроенные по настоящимъ правиламъ искусства; ихъ испытывали въ 1726 году, но успѣхъ не соотвѣтствовалъ ожиданіямъ художника, и обѣщанная награда осталась не выданною.

Другой знаменитый Англійскій часовщикъ, *Гаррисонъ* (*Harrison*), долго занимавшійся устроеніемъ морскихъ часовъ, получилъ, за представленные имъ часы, въ 1749 году, отъ Лондонскаго Королевскаго Общества премію, назначенную за полезнѣйшее открытіе, сдѣланное въ продолженіи года. Въ 1761 и 1762 годахъ онъ представилъ Адмиралтейству другой хронометръ, который, во время сто сорока семи дневнаго плаванія изъ Портсмута въ Ямайку и обратно, показалъ разность, равную одной минутѣ и 54 секундамъ. Въ другое путешествіе, изъ Лондона въ Барбаду, оказалась погрѣшность въ двѣ минуты 20 секундъ въ сто пятьдесятъ шесть дней. На основаніи результатовъ сихъ двухъ опытовъ и тщательнаго испытанія, которому подвергли хронометръ въ продолженіи 10 мѣсяцевъ на Гринвичской Обсерваторіи, Гаррисонъ считалъ себя въ правѣ просить награды въ двадцать тысячъ фунтовъ стерлинговъ, обѣщанной въ 1714 году. Но ему выдали только половину этой суммы, ссылаясь на нѣкоторые недостатки его хронометра, и между прочими на то, что ходъ сего послѣдняго былъ подверженъ вліянію температуры. Гаррисонъ усовершенствовалъ свой хронометръ, и какъ новые опыты, произведенные надъ нимъ, имѣли полный успѣхъ, то и другая половина награды была выдана художнику. Онъ умеръ въ 1770 году осьмидесяти двухъ лѣтъ отъ роду.

Въ 1767 и 1769 годахъ Парижская Академія Наукъ предложила задачу о лучшемъ способѣ измѣренія времени въ морѣ. Награда была присуждена морскимъ часамъ *Петра Леруа (Leroi),* испытаннымъ въ двухъ путешествіяхъ. Другой Французскій механикъ, *Фердинандъ Берту (Berthoud),* современникъ Петра Леруа, также отличился устроеніемъ хронометровъ, которые вѣрностію не уступали морскимъ часамъ Леруа, и превосходили Гаррисоновы.

Нынѣ устроеніе хронометровъ доведено до высокой степени совершенства. Въ Англіи особенно отличаются въ этомъ дѣлѣ *Арнольдъ* и *Броккбенсъ,* въ Даніи *Кессельсъ,* а у насъ въ Россіи, *Гаутъ,* коего хронометры пріобрѣли всеобщую извѣстность.

CHRONOMÈTRE. (Акуст.) **ХРОНОМЕТРЪ.** Акустическій инструментъ посредствомъ котораго опредѣляютъ взаимныя отношенія звуковъ. Описаніе такого снаряда читатели найдутъ въ *Principes d'Acoustique de M. Sauveur,* Sect. IV, стр. 19.

*

CHRONOMÉTRIQUE. ХРОНОМЕТРИЧЕСКІЙ. Относящійся къ хронометрамъ или ко времени. Peson chronométrique. (Mex.) Хронометрическій безменъ. Такъ назвалъ *Г. Каньяръ-Латуръ* (*Cagniard-Latour*) изобрѣтенный имъ снарядъ для измѣренія динамическихъ дѣйствій машинъ, находящихся въ движеніи. Усилія, которымъ подвергается этотъ снарядъ, измѣряются числомъ качаній, совершаемыхъ въ извѣстное время хронометрическимъ маятникомъ, утвержденнымъ къ безмену. Если станемъ послѣдовательно привѣшивать къ пружинѣ безмена различные грузы, и въ то же время наблюдать происходящія отъ того перемѣны въ ходѣ хронометра, то можно будетъ составить таблицу указаній хронометра, соотвѣтствующихъ различнымъ массамъ грузовъ. Когда же употребимъ хронометрическій безменъ для опредѣленія динамическихъ дѣйствій машины, то, посредствомъ этой таблицы, легко будетъ судить о среднемъ усиліи, которому снарядъ подвергался во время испытанія.

Г. Каньяръ-Латуръ, въ Іюнѣ мѣсяцѣ 1837 года, сообщилъ Парижской Академіи Наукъ, что онъ занимается устроеніемъ своего хронометрическаго безмена. Для дальнѣйшихъ свѣдѣній отсылаемъ читателей къ журналу: *L'Institut*; *Sciences Mathématiques, Physiques et Naturelles*; 5^{me} *année*, № 214.

CHRONOSCOPE. Уст. сл. **ХРОНОСКОПЪ.** Отвѣсъ служащій для измѣренія времени. Смот. PENDULE.

CHUTE DES GRAVES. (Mex.) **ПАДЕНІЕ ТЯЖЕЛЫХЪ ТѢЛЪ.** Опыты доказали, что при паденіи тяжелыхъ тѣлъ въ пустотѣ, пространства, ими переходимыя, пропорціональны квадратамъ временъ, а слѣдовательно пріобрѣтаемыя ими скорости просто пропорціональны временамъ. Отсюда заключаемъ, что тяжесть есть сила ускорительная постоянная, почему движеніе падающихъ тяжелыхъ тѣлъ и называется *равномѣрно-ускореннымъ*, а движеніе тѣлъ, брошенныхъ вверхъ по вертикальному направленію, *равномѣрно-укосненнымъ*.

Пусть будетъ e пространство, переходимое падающимъ тѣломъ во время t, v скорость пріобрѣтаемая имъ по истеченіи того же времени, и g сила тяжести, то есть приращеніе, получаемое скоростію въ каждую единицу времени. Такъ какъ $\frac{d^2e}{dt^2}$ изображаетъ ускорительную силу (Смот. FORCE), то получимъ

$$\frac{d^2e}{dt^2}=g,$$

откуда

$$\frac{de}{dt}=v=c+gt;$$

для опредѣленія постояннаго количества c, положимъ, что тѣло было брошено съ начальною скоростію a; слѣдовательно, при $t=0$, должно быть $v=a$, почему

$$(1)\qquad v=a+gt.$$

Подставляя на мѣсто скорости v равную ей величину $\frac{de}{dt}$, и интегрируя, получаемъ

$$(2)\qquad e=at+\frac{gt^2}{2}.$$

Мы не прибавляемъ постояннаго количества къ этому интегралу, ибо предполагаемъ, что при $t=0$, будетъ также $e=0$.

Принявъ $a=0$, найдется

$$(3)\qquad v\quad t \text{ и } e=\frac{gt^2}{2},$$

откуда

$$v=\sqrt{2ge};$$

величина $\sqrt{2ge}$ называется *скоростію соотвѣтствующею высотѣ e (vitesse due à la hauteure)*.

Чтобы перейти къ уравненіямъ движенія равномѣрно укосненнаго замѣтимъ, что скорость тѣла, брошеннаго снизу вверхъ, будетъ уменьшаться въ каждую единицу времени тою же постоянною величиною g, какою увеличивалась при ускоренномъ движеніи. Слѣдовательно, стоитъ только въ формулахъ (1) и (2) измѣнить g въ $-g$. И такъ получимъ,

$$v=a-gt \text{ и } e=at-\frac{gt^2}{2}.$$

Эти два уравненія опредѣляютъ всѣ обстоятельства движенія равномѣрно укосненнаго. Если желаемъ опредѣлить высоту, до которой подымется тѣло, то изобразивъ ее чрезъ h, а чрезъ T время восхожденія, и замѣтивъ что тогда $v=0$, получимъ

$$0=a-gT \text{ и } h=aT-\frac{gT^2}{2},$$

откуда

$$T=\frac{a}{g},\quad h=\frac{a^2}{2g}.$$

Достигнувъ высоты h, тѣло начнетъ падать, и движеніе его опредѣлится формулою (3). Достигнувъ точки, изъ которой тѣло было брошено, скорость его будетъ

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{a^2} = a;$$

отсюда заключаемъ, что если требуется чтобы тѣло, брошенное снизу вверхъ, достигло опредѣленной высоты, то надобно сообщить ему начальную скорость, равную той, которую бы оно пріобрѣло падая съ сказанной высоты.

Употребленная нами въ предыдущихъ формулахъ величина g, опредѣляется посредствомъ различныхъ опытовъ, и преимущественно помощію маятника. Отсылаемъ по сему предмету къ статьямъ: GRAVITÉ, PENDULE.

Знаменитый *Галилей*, въ концѣ XVI вѣка, первый открылъ истинные законы паденія тяжелыхъ тѣлъ. Бывъ ученикомъ, онъ уже возставалъ противъ тогдашняго ученія объ этомъ предметѣ, и, между прочимъ, противъ аксіомы допущенной въ то время всѣми физиками, что скорости падающихъ тѣлъ пропорціональны вѣсамъ сихъ послѣднихъ. Чтобы доказать неосновательность такого мнѣнія на самомъ дѣлѣ, Галилей опускалъ тѣла весьма неравнаго вѣса съ высокой колокольни; эти опыты, произведенные передъ многочисленными зрителями, показали очевиднымъ образомъ, что времена паденія различныхъ тѣлъ почти одинаковы, когда плотности ихъ мало разнятся между собою. Впослѣдствіи Галилей подтвердилъ этотъ законъ новыми опытами, произведенными надъ качаніями двухъ маятниковъ, равной длины, но вѣсовъ весьма различныхъ.

Для доказательства законовъ паденія тяжелыхъ тѣлъ, Галилей избралъ слѣдующій путь: предположивъ сперва, что скорости, въ равныя времена, получаютъ равныя приращенія, онъ разыскиваетъ потомъ, теорически, слѣдствія проистекающія изъ этой ипотезы. Далѣе, прибѣгаетъ уже къ опытамъ надъ паденіемъ тяжелыхъ тѣлъ. Этими опытами онъ показываетъ, что тѣла, опускаясь на равныя вертикальныя высоты по длинѣ наклонной плоскости, или даже по какой ни есть кривой линіи, имѣютъ тѣ же скорости, какія бы они пріобрѣли, падая по вертикальному направленію, и переходя тѣ же высоты. Отсюда легко вывести равенство отношеній между пространствами, переходимыми тѣломъ по наклоннымъ плоскостямъ и по вертикальному направленію.

На томъ же основаніи Галилей производилъ еще слѣдующій опытъ: взявъ длинный деревянный брусъ, и выдолбивъ въ немъ прямой жолобъ весьма гладкій, онъ опускалъ по немъ шарикъ, при чемъ давалъ приличное наклоненіе брусу, съ цѣлію уменьшить скорость движенія, и тѣмъ самымъ удобнѣе измѣрить какъ переходимое шарикомъ пространство, такъ и время, употребленное имъ на этотъ переходъ. Постояннымъ результатомъ этихъ опытовъ было то слѣдствіе, что въ удвоенное время шарикъ переходитъ четверное пространство, въ утроенное время, девятерное пространство и такъ далѣе, изъ чего Галилей заключилъ, что при паденіи тяжелыхъ тѣлъ, *переходимыя пространства содержатся между собою какъ квадраты временъ*. Достигнувъ этого закона, теорія паденія тѣлъ уже не представляетъ болѣе никакихъ затрудненій, ибо, всё остальное въ ней есть необходимое слѣдствіе этой истины. Смот. ATWOOD (MACHINE D'), также BALLISTIQUE.

CI.

CIEL. (Астр.) **НЕБО.** Древніе астрономы допускали существованіе столькихъ небесъ или твердей, сколько замѣчали различныхъ движеній въ небесныхъ свѣтилахъ. И такъ, каждая изъ семи планетъ имѣла свое небо, именно: было небо для *Луны*, *Меркурія*, *Венеры*, *Солнца*, *Марса*, *Юпитера* и *Сатурна*. Восьмое небо, называемое ими *твердью (firmament)*, принадлежало неподвижнымъ звѣздамъ. Нѣкоторые думали, что эти небеса были твердыя, и именно кристальныя, потому что свѣтъ проходилъ сквозь нихъ. Видъ ихъ былъ сферическій, и къ нимъ-то были прикрѣплены свѣтила, изъ которыхъ каждое двигалось вмѣстѣ съ своимъ небомъ.

Впослѣдствіи, по мѣрѣ того какъ стали замѣчать бо́льшее разнообразіе въ движеніяхъ небесныхъ тѣлъ, увеличилось и самое число небесъ. *Альфонзъ*, Король Кастильскій, прибавилъ къ прежнимъ осьми, два новыхъ; *Евдокій* насчиталъ ихъ до двадцати трехъ; *Каллипъ* допускалъ тридцать; *Регіомонтанъ* тридцать три; *Аристотель* сорокъ семь, и наконецъ *Фракасторъ* довелъ число небесъ до семидесяти.

Въ нынѣшней Астрономіи подъ словомъ *небо* или *твердь* разумѣютъ представляющійся наблюдателю сферическій сводъ, называемый *небеснымъ*, и на вогнутой поверхности котораго, по видимому, находятся всѣ свѣтила.

CINÉTHMIQUE или **CINÉMATIQUE. ЦИНЕТМИКА.** Наука занимающаяся законами движенія, независимо отъ силъ, производящихъ сіи движенія; и такъ, Цинетмика служитъ переходомъ отъ Геометріи къ Механикѣ.

CINQ. (Ариѳ.) **ПЯТЬ.** CINQUIÈME; ПЯТАЯ. *Un cinquième, deux cinquièmes; одна пятая, двѣ пятыя.*

CIRCOMPOLAIRES (ÉTOILES). (Астр.) **ОКОЛОПОЛЮСНЫЯ ЗВѢЗДЫ.** Звѣзды, находящіяся по близости сѣвернаго полюса. Ближайшая изъ нихъ, называемая *полярною* (*la polaire*), находится въ созвѣздіи малой медвѣдицы, и составляетъ оконечность ея хвоста. Разстояніе этой звѣзды отъ полюса равно $1°38'$.

CIRCONFÉRENCE, PÉRIPHÉRIE. (Геом.) **ОКРУЖНОСТЬ (КРУГА);** См. CERCLE. — Иногда слово *окружность* употребляется и для означенія периметра какой ни есть кривой. — Задача объ опредѣленіи отношенія окружности къ діаметру, извѣстная подъ наименованіемъ *квадратуры круга*, занимала геометровъ всѣхъ вѣковъ; для подробностей объ этомъ предметѣ, отсылаемъ читателей къ статьѣ QUADRATURE DU CERCLE. Отношеніе, о которомъ говоримъ, есть число трансцендентное, и слѣдовательно оно не можетъ быть найдено иначе, какъ по приближенію. Приведемъ здѣсь нѣкоторыя изъ извѣстнѣйшихъ приближенныхъ отношеній. *Архимедъ*, чрезъ сравненіе периметровъ двухъ 96-угольниковъ, одного вписаннаго въ кругѣ, а другаго описаннаго около него, нашелъ, что приближенное отношеніе окружности къ діаметру изображается дробью $\frac{22}{7}$.

Другое, болѣе точное, но менѣе удобное содержаніе, есть: $\frac{333}{106}$.

Адріанъ Мецій нашелъ отношеніе $\frac{355}{113}$, которое вѣрно до десяти-милліонныхъ частей радіуса. Это содержаніе, во многихъ случаяхъ достаточное по своей точности, имѣетъ еще и то преимущество, что числа, изъ которыхъ оно составлено, легко удерживаются въ памяти. Дѣйствительно, написавъ къ ряду знаменателя и числителя, находимъ: 113355; а это число состоитъ изъ трехъ первыхъ нечетныхъ чиселъ, повторенныхъ каждое два раза.

Съ открытіемъ Исчисленія Безконечныхъ сами собой представились способы несравненно удобнѣйшіе для опредѣленія отношенія окружности къ діаметру. *Ланьи* (*Lagny*) вычислилъ это отношеніе до 127 десятичныхъ. Въ Ратклифской Библіотекѣ, въ Оксфортѣ, есть рукопись, въ которой вычисленіе это доведено до 154 десятичныхъ цифръ; принимая радіусъ круга за 1, полуокружность, по этой рукописи, выражается числомъ:

3,14159	26535	89793	23846	26433
83279	50288	41971	69399	37510
58209	74944	59230	78164	06286
20899	86280	34825	34211	70679
82148	08651	32823	06647	09384
46095	50582	37172	53594	08128
4802				

Замѣтимъ, что если приближенное до 7 десятичныхъ цифръ отношеніе $3{,}1415926 = \frac{31415926}{10000000}$ разложимъ въ непрерывную дробь, то получимъ слѣдующій рядъ сходящихся дробей:

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ldots\ldots$$

вторая дробь изображаетъ отношеніе, найденное *Архимедомъ*, а четвертая, *Меціемъ*.

Одинъ изъ простѣйшихъ способовъ для опредѣленія приближенной величины окружности, состоитъ въ разложеніи въ рядъ дуги въ функціи ея тангенса. Пусть будетъ y дуга, а x ея тангенсъ; получимъ

$$x = tang y \text{ или } y = arctang x.$$

Дифференцируя первое уравненіе, найдемъ

$$dx = \frac{dy}{Cos^2 y} \text{ откуда } dy = Cos^2 y . dx;$$

но $Cos^2 y = \frac{1}{1+tang^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$; слѣдовательно

$$dy = \frac{dx}{1+x^2} \text{ и } y = \int \frac{dx}{1+x^2}.$$

Разлагая, чрезъ простое дѣленіе, функцію $\frac{1}{1+x^2}$ въ безконечный рядъ, получимъ

$$y = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots) dx = \int dx - \int x^2 dx + \int x^4 dx - \int x^6 dx + \ldots\ldots$$

Производя интегрированія, находимъ

$$(1) \qquad y = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \text{и пр.}$$

мы не прибавляемъ къ интегралу постояннаго количества, ибо ищемъ наименьшую дугу y, коей тангенсъ $= x$, а при $x = 0$, въ этомъ предположеніи, будетъ также $y = 0$.

Изобразимъ, какъ всѣми принято, чрезъ π полуокружность круга при радіусѣ равномъ единицѣ; если положимъ въ послѣднемъ уравненіи $x = 1$, то получимъ $y = \frac{\pi}{4}$, и слѣдовательно

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \text{ и проч.}$$

Этотъ рядъ, медленно сходящійся, не совсѣмъ удобенъ для опредѣленія величины π. Но если примемъ $y = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$, то найдемъ рядъ болѣе выгодный; дѣйствительно, такъ какъ въ этомъ случаѣ $x = tang\, 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, то получимъ

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \text{ и проч.}\right)$$

Посредствомъ этого ряда *Ланъи* вычислилъ величину π съ 127 десятичными знаками.

Можно найти ряды еще болѣе сходящіеся посредствомъ уравн. (1). Напримѣръ, если положимъ $\frac{\pi}{4} = a + b$, то найдемъ

$$1 = tang\,(a+b) = \frac{tang\,a + tang\,b}{1 - tang\,a\,.\,tang\,b};$$

принявъ $tang\,a = \frac{1}{2}$ получится $tang\,b = \frac{1}{3}$, и слѣдовательно

$$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7} + \text{ и проч.}$$

$$b = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7} + \text{ и проч.}$$

откуда, по причинѣ $a + b = \frac{\pi}{4}$,

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5}\right) - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7}\right) + \text{ и проч.}$$

Англійскій математикъ *Мехинъ* (*Machin*), еще въ 1706 году предложилъ средство для полученія рядовъ болѣе сходящихся: его способъ состоялъ въ слѣдующемъ: принявъ за тангенсъ одной дуги весьма малую дробь, и повторивъ эту дугу столько разъ, сколько нужно для полученія новой дуги, наименѣе разнствующей отъ 45°, вычисляемъ тангенсъ дуги, изображающей избытокъ 45° предъ найденною кратною дугою; очевидно, что тангенсъ этой разности опредѣлится рядомъ весьма сходящимся. Напримѣръ, положивъ $tang\,a = \frac{1}{5}$, находимъ

$$tang\,2a = \frac{2\,tang\,a}{1 - tang^2 a} = \frac{5}{12}$$

$$tang\,4a = \frac{2\,tang\,(2a)}{1 - tang^2\,(2a)} = \frac{120}{119};$$

здѣсь усматриваемъ, что дуга $4a$ весьма мало разнствуетъ отъ 45°, ибо ея тангенсъ превосходитъ тангенсъ 45° только дробью $\frac{1}{119}$. И такъ, полагая $4a = A$, $45^\circ = B$, $A - B = b$, найдется

$$tang\,(A - B) = \frac{tang\,A - tang\,B}{1 + tang\,A\,.\,tang\,B} = \frac{1}{239} = tang\,b.$$

Но, по формулѣ (1), имѣемъ

$$a = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} - \text{ и проч.}$$

$$b = \frac{1}{239} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{239^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{239^5} - \text{ и проч.}$$

и какъ съ другой стороны $\frac{\pi}{4} = 4a - b$, то и получимъ

$$\frac{\pi}{4} = \begin{cases} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \text{ и проч.}\right) \\ -\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \text{ и проч.}\right). \end{cases}$$

Вычисленіе перваго ряда очень просто; и въ самомъ дѣлѣ, замѣтимъ, что онъ можетъ быть представленъ въ видѣ

$$\frac{4}{5}\left(1 - \frac{4}{3\,(100)} + \frac{4^2}{5\,(100)^2} - \frac{4^3}{7\,(100)^3} + \text{ и проч.}\right)$$

То же самое можно сказать и о второмъ рядѣ, написавъ его въ видѣ

$$\frac{1}{239}\left(1 - \frac{1}{3\,(57121)} + \frac{1}{5\,(57121)^2} - \frac{1}{7\,(57121)^3} + \text{ и пр.}\right).$$

Приведемъ еще нѣкоторыя примѣчательныя выраженія числа π. Англійскій математикъ *Вальисъ* нашелъ слѣдующую формулу, опредѣляющую четверть окружности:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdots$$

Законъ составленія дробей очевиденъ: въ числителѣ чётныя числа, а въ знаменателѣ нечётныя повторяются два раза. Это выраженіе можетъ быть выведено изъ разложенія синуса:

$$Sin\,z = z\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4^2\pi^2}\right)\cdots\cdots,$$

положивъ въ немъ $z = \frac{\pi}{2}$.

Брункеръ, изобрѣтатель непрерывныхъ дробей, нашелъ слѣдующее выраженіе для величины π:

$$\frac{1}{4}\pi = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \text{ и проч.}}}}}}}$$

Смот. CONTINUE (FRACTION) §§ 1 и 10.

Иванъ Бернулли, разсматривая логариѳмы мнимыхъ количествъ, былъ приведенъ къ примѣчательному выраженію

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{log\,(\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}},$$

которое легко выводится изъ извѣстной формулы [Смот. COTES (THÉORÊME DE)]

$$e^{x\sqrt{-1}} = Cos\,x + \sqrt{-1}.Sin\,x;$$

дѣйствительно, взявъ Неперовъ логариѳмъ обѣихъ частей, получимъ

$$x\sqrt{-1} = log\,(Cos\,x + \sqrt{-1}.Sin\,x);$$

полагая $x = \frac{\pi}{2}$ въ этомъ уравненіи, находимъ формулу Ивана Бернулли.

Читатели, желающіе болѣе ознакомиться съ этимъ предметомъ, найдутъ любопытныя подробности въ превосходномъ сочиненіи *Эйлера*: *Introductio in analysin infinitorum.*

CIRCONFÉRENCE. ОЧЕРТАНІЕ, ОКРУЖІЕ, ОБМѢРЪ, обводъ какой ни есть сомкнутой кривой линіи. Смот. PÉRIMÈTRE.

CIRCONFÉRENCE (ANGLE A LA). УГОЛЪ ПРИ ОКРУЖНОСТИ. Смот. ANGLE.

CIRCONSCRIPTION. (Геом.) **ОПИСАНІЕ.** *Circonscription d'un polygone à un cercle. Описаніе многоугольника около круга.* Смот. ниже.

CIRCONSCRIRE. (Геом.) **ОПИСАТЬ.** Въ начальной Геометріи значитъ начертить правильную фигуру около круга такимъ образомъ, чтобы каждая изъ ея сторонъ была касательною къ окружности сего самаго круга. *Описать кругъ около многоугольника*, т. е. начертить кругъ такимъ образомъ, чтобы всѣ стороны многоугольника были хордами сего круга. Въ этомъ смыслѣ, преимущественно говорятъ, что многоугольникъ *вписанъ* (*inscrit*) въ кругѣ. *Circonscrire un pentagone, un hexagone autour d'un cercle* или *au cercle*; *описать пятиугольникъ, шестиугольникъ около круга.*

CIRCONSCRIT. ОПИСАННЫЙ. *Polygone circonscrit à un cercle. Многоугольникъ описанный около круга.* См. выше.

CIRCONSCRITE (HYPERBOLE). ОПИСАННАЯ ИПЕРБОЛА. Такъ называется ипербола третьяго порядка, пересѣкающая свои ассимптоты, и обнимающая своими вѣтвями отсѣченныя части сихъ самыхъ ассимптотъ. Эта кривая изображена на черт. 2 (Листъ IV).

Вѣтви *DE* и *FG* обнимаютъ соотвѣтственныя имъ ассимптоты *AB* и *AC*, и пересѣкаютъ ихъ въ точкахъ *i* и *k*.

CIRCONSTANCES DU MOUVEMENT. (Мех.) **ОБСТОЯТЕЛЬСТВА, СВОЙСТВА, ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ДВИЖЕНІЯ.** *Déterminer les circonstances du mouvement d'un projectile dans le vide*; *опредѣлить обстоятельства движенія тяжелаго тѣла брошеннаго въ безвоздушномъ пространствѣ*, то есть, найти видъ описываемый тѣломъ траекторіи, положеніе и скорость его по истеченіи извѣстнаго времени и пр.

CIRCONVOLUTION. (Геом.) **ВРАЩЕНІЕ, ОБРАЩЕНІЕ.** *Axe de circonvolution, ось вращенія,* См. RÉVOLUTION.

CIRCUIT, CONTOUR, PÉRIMÈTRE. (Геом.) **ПЕРИМЕТРЪ, ОЧЕРТАНІЕ, ОБМѢРЪ** фигуры.

CIRCULAIRE. (Геом.) **КРУГОВОЙ;** относящійся къ кругу. *Arc circulaire, круговая дуга. Ligne circulaire*; *круговая линія,* то есть *кругъ*; Смот. CERCLE. *Fonctions circulaires, круговыя, угловыя функціи,* напримѣръ $arc\,sin\,x$, $arc\,cos\,x$, $arctang\,x$, и пр. См. TRIGONOMÉTRIQUES (FONCTIONS). *Mouvement circulaire, круговое движеніе, движеніе по кругу.*

NOMBRES CIRCULAIRES. КРУГЛЫЯ ЧИСЛА. Числа, коихъ степени оканчиваются тою же цифрою, какъ и корень. Таковы числа 5 и 6; ибо $5^2 = 25$, $5^3 = 125$; и проч. также $6^2 = 36$, $6^3 = 216$ и проч.

CIRCULANTE (FRACTION DÉCIMALE). (Ариѳ.) **ПЕРІОДИЧЕСКАЯ ДЕСЯТИЧНАЯ ДРОБЬ.** Нынѣ слово *circulante* не употребляется, а говорятъ *fraction décimale periodique.* Смот. DÉCIMALE (FRACTION).

CIRCULATION (VOIE DE). (Геом.) **ПУТЬ ВРАЩЕНІЯ.** Такъ назвалъ Гюльденъ прямую или кривую линію, описываемую центромъ тяжести какой нибудь линіи или площади, которыя своимъ движеніемъ образуютъ поверхность или тѣло. Въ статьѣ: CENTROBARIQUE (MÉTHODE) показано употребленіе *пути вращенія* при разысканіи *поверхностей* и *объёмовъ тѣлъ.* — CIRCULATION. ОБРАЩЕНІЕ, ВРАЩЕНІЕ.

CIRCULATOIRE. (Мех.) Уст. слов. **ВРАЩАТЕЛЬНЫЙ.** *Mouvement, vitesse circulatoire. Вращательное движеніе, скорость вращенія.* Такъ называются движеніе и скорость тѣла, обращающагося около одной точки. Смот. ROTATION.

CIRCULER. (Мех.) Уст. слово. **ОБРАЩАТЬСЯ, ВРАЩАТЬСЯ.** Собственно изображаетъ *круговое движеніе*; однакоже подъ симъ словомъ разумѣютъ и всякое другое *криволинейное движеніе*, напримѣръ, *эллиптическое движеніе планетъ* около солнца. Вообще симъ глаголомъ выражаютъ всякое движеніе, происходящее по *сомкнутой кривой линіи*.

CISSOIDE. (Геом.) **ЦИССОИДА.** Кривая, изобрѣтенная Греческимъ геометромъ *Діоклом*ъ (жившимъ въ V столѣтіи по Р. Х.), почему она и называется обыкновенно *Діокловою циссоидою* (*cissoïde de Dioclès*).

Начертимъ кругъ $ANBI$ (черт. 3 Листъ IV), и изъ конца B діаметра AB возставимъ перпендикуляръ BD, который продолжимъ неопредѣленно въ обѣ стороны; потомъ, изъ точки A проведемъ подъ произвольнымъ угломъ съ AB линію AD, и отъ точки D отложимъ линію $DM = AN$. Точка M будетъ принадлежать *циссоидѣ*. Для вывода уравненія этой кривой, пусть будетъ a радіусъ круга производящаго; изъ точки M опустимъ на діаметръ AB перпендикуляръ MP, и положимъ $AP = x$, $PM = y$, относя кривую къ прямоугольнымъ осямъ AX, AY; опустимъ также изъ точки N перпендикуляръ Nh, а изъ M проведемъ линію MQ, параллельную AB. Треугольники ANh, MDQ будутъ равны, ибо $AN = MD$; слѣдовательно $Ah = MQ = PB$, или $Ah = PB = 2a - x$; изъ подобія двухъ треугольниковъ ANh и AMP выводимъ $\frac{MP}{AP} = \frac{Nh}{Ah}$; но такъ какъ Nh есть ордината круга, то и найдется $Nh = \sqrt{Ah \times hB} = \sqrt{(2a - x)x}$; подставляя въ уравненіе $\frac{MP}{AP} = \frac{Nh}{Ah}$ вмѣсто линій MP, AP, Nh и Ah равныя имъ величины, найдемъ

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{(2a-x)x}}{2a-x};$$

возвышая въ квадратъ получимъ по сокращеніи

$$y^2 = \frac{x^3}{2a-x}.$$

Вотъ уравненіе циссоиды, отнесенной къ прямоугольнымъ координатнымъ осямъ AX, AY. Разборъ этого уравненія покажетъ, что циссоида состоитъ изъ двухъ равныхъ вѣтвей AMH и AIK, имѣющихъ каждая свою ассимптоту, первая, прямую BD, а вторая, прямую BE; эти двѣ вѣтви образуютъ въ началѣ координатъ A точку возврата.

Посредствомъ Интегральнаго Исчисленія не трудно доказать, что ассимптотическое пространство, то есть площадь, заключающаяся между двумя безконечными вѣтвями KIA, ANH и неопредѣленною прямою EBD, равна утроенной площади круга производящаго $ANBI$. Изобразимъ искомую площадь чрезъ u; получимъ (Смот. AIRE)

$$u = 2\int y dx = 2\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2ax - x^2}},$$

ибо, для циссоиды, $y = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2a - x}} = \frac{x^2}{\sqrt{2ax - x^2}}$. Мы помножили предыдущій интегралъ на 2 для того, чтобы получить полное ассимптотическое пространство, состоящее изъ двухъ равныхъ площадей, одной, находящейся надъ діаметромъ AB, и другой, подъ нимъ; ибо, очевидно, что эти площади равны между собою, и что каждая изъ нихъ $= \int y dx$. Взявъ предыдущій интегралъ между предѣлами 0 и $2a$, найдется полная ассимптотическая площадь; и такъ

$$u = 2\int_0^{2a} \frac{x^2 dx}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Опредѣливъ этотъ интегралъ по обыкновеннымъ правиламъ [См. BINOMES (DIFFÉRENTIELLES)] получимъ, какъ сказано было выше, $u = 3\pi a^2$.

Древніе геометры употребляли циссоиду для нахожденія двухъ среднихъ пропорціональныхъ между данными двумя линіями. Вотъ какимъ образомъ эта задача рѣшается посредствомъ циссоиды:

Пусть будутъ a и b линіи, между которыми ищемъ двѣ среднія пропорціональныя, и положимъ что $a > b$. Строимъ циссоиду $HMAIK$ (черт. 3 листъ IV), принимая a за радіусъ круга производящаго. Очевидно, что если изъ центра C возставимъ перпендикуляръ CR, и продолжимъ его до встрѣчи съ окружностію, то точка R будетъ принадлежать и циссоидѣ по свойству этой кривой; теперь, отъ точки C по линіи $CR = a$, откладываемъ часть $Ck = b$, и проводимъ прямую чрезъ B и k до встрѣчи съ циссоидою въ точкѣ m; соединяемъ точки A и m прямою, которую продолжаемъ до встрѣчи съ радіусомъ CR, то есть, до n. Линія Cn есть одна изъ искомыхъ двухъ среднихъ пропорціональныхъ; для опредѣленія другой, стоитъ только изъ точки n возставить перпендикуляръ nq къ линіи An, и часть Cq будетъ другая средняя пропорціональная.

Чтобы доказать это строеніе, найдемъ величину линіи Cn. Уравненіе прямой Bm, отнесенной къ тѣмъ же осямъ AX, AY, опредѣляется условіями, что эта прямая проходитъ чрезъ точки k и B, коихъ координаты суть соотвѣтственно (a, b) и $(2a, o)$; слѣдовательно, изобразивъ чрезъ X и Y перемѣнныя координаты этой прямой, уравненіе ея будетъ

$$Y = \frac{b}{a}(2a - X).$$

Для опредѣленія координатъ точки m, стоитъ только положить $Y = y$, $X = x$, разумѣя подъ x и y координаты циссоиды; слѣдовательно

$$y = \frac{b}{a}(2a - x);$$

но, съ другой стороны,

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x},$$

почему и будетъ

$$\frac{b^2}{a^2}(2a - x)^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

откуда

$$x = \frac{2a}{1 + \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}},$$

и слѣдовательно

$$y = \frac{2b\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}}{1 + \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}}.$$

Теперь ищемъ уравненіе прямой An по условіямъ, что она должна проходить чрезъ начало координатъ A и чрезъ точку m, коей координаты суть

$$Aa = \frac{2a}{1 + \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}}, \quad am = \frac{2b\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}}{1 + \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}}.$$

Изобразивъ чрезъ X и Y перемѣнныя координаты разсматриваемой прямой, найдемъ

$$Y = \frac{b}{a}\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}} \cdot X.$$

Для полученія длины Cn, стоитъ только положить $X = AC = a$, и тогда получится $Y = Cn$; слѣдовательно

$$Cn = b\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}} = \sqrt[3]{a^2 b}.$$

Вотъ одна изъ искомыхъ двухъ среднихъ пропорціональныхъ; другая, какъ сказано выше, будетъ линія Cq, равная $\sqrt[3]{ab^2}$; и дѣйствительно имѣемъ

$$a : \sqrt[3]{a^2 b} :: \sqrt[3]{a^2 b} : \sqrt[3]{ab^2}$$

$$\sqrt[3]{a^2 b} : \sqrt[3]{ab^2} :: \sqrt[3]{ab^2} : b.$$

Если положимъ $b = \frac{1}{2}a$, то $Cq = \sqrt[3]{\frac{1}{4}a^3} = \sqrt[3]{2(\frac{1}{2}a)^3}$ а это показываетъ, что Cq будетъ стороною такого куба, коего объёмъ вдвое болѣе противъ объёма $(\frac{1}{2}a)^3$ другаго, даннаго куба; эта задача извѣстна подъ наименованіемъ *задачи объ удвоеніи куба*, и она рѣшается, какъ мы сей-часъ показали, весьма просто посредствомъ циссоиды. Смот. DUPLICATION DU CUBE.

Между многими математиками, занимавшимися изслѣдованіями свойствъ циссоиды, назовемъ *Нютона*, который предложилъ черченіе этой кривой, посредствомъ непрерывнаго движенія. Читатели найдутъ этотъ графическій способъ въ *Histoire des Mathématiques, par I. F. Montucla*, Nouvelle édition, Paris, an VII, Tome 1. стр. 340.

CL.

CLAIR-OBSCUR. ТЬМО-СВѢТЪ, ПРОЗРАЧНО-ТЕМНОЕ. Смот. PERSPECTIVE AÉRIENNE.

CLAPET. (Прикл. Мех.) **ЗАХЛОПКА.** Небольшой клапанъ утвержденный на шарнерѣ, и употребляемый иногда въ насосахъ. *Захлопка* состоитъ вообще изъ кожанаго кружка, покрытаго сверху металлическою круглою бляжкою; иногда же этотъ кружокъ помѣщается между двумя бляжками, и тогда верхняя дѣлается больше нижней. Вода, давленіемъ своимъ, попеременно то открываетъ то закрываетъ захлопку, свободно обращающуюся около своего шарнера. См. SOUPAPE.

CLASSES. КЛАССЫ, РАЗРЯДЫ. Этимъ словомъ въ Математикѣ выражаютъ вообще порядокъ, по которому распредѣляются какія либо величины, какъ то: отвлеченныя количества, линіи, поверхности и проч. *Infiniment petits de la* 1ère, 2de, 3ème ..... *classe; безконечно малыя величины* 1аго, 2аго, 3аго ..... *класса*. См. INFINIMENT PETIT.

CLEF D'UNE VOUTE. (Разр. Камн.) **КЛЮЧЪ, ЗАМОКЪ, ЗАМОЧНЫЙ КАМЕНЬ.** Верхній камень свода.

CLEPSIDRE или **HORLOGE D'EAU.** (Мех.) **ВОДЯНЫЕ ЧАСЫ, КЛЕПСИДРА.** Отъ Греческ. *κλεπτειν, прятать, скрывать*, и *ὕδωρ, вода*. Часы бывшіе въ употребленіи у древнихъ. Клепсидру существенно составлялъ сосудъ, изъ котораго вытекала вода, и количество вытекшей воды измѣряло время. На корабляхъ еще и теперь употребляютъ *песочные часы* или *стклянки* (*sabliers, horloges de sable*), основанные на одномъ началѣ съ водяными часами.

Клепсидры, какъ думаютъ, были изобрѣтены въ Египтѣ во время владычества Птоломеевъ. Въ Римѣ онѣ введены въ употребленіе *Сципіономъ Назика* жившимъ за 200 лѣтъ до Р. Х.

Древніе, затѣйливымъ устроеніемъ клепсидръ, нерѣдко выражали мысли философическія, или поэтическія; такъ напримѣръ въ клепсидрѣ *Ктезибія (Ctésibius)*, механика Александрійскаго, жившаго за 150 лѣтъ до Р. Х., изображены два младенца, и у одного изъ нихъ, вода, въ видѣ слезъ, каплетъ изъ глазъ; онъ, какъ бы оплакиваетъ скоротечность времени, между тѣмъ какъ другой младенецъ, указываетъ жезломъ на часы дня. Въ той же клепсидрѣ вытекающая вода приводитъ въ движеніе механизмъ, посредствомъ котораго стрѣлка показываетъ на раздѣленномъ кругѣ мѣсяцъ и число въ продолженіе цѣлаго года. Другія подробности объ этомъ предметѣ, читатели могутъ почерпнуть въ книгѣ: *Dictionnaire universel de Mathématique et de Physique*, par *Saverien*, *Paris* 1753. Объ водяныхъ часахъ, писали между прочими слѣдующіе авторы: *Витрувій*, *Перро (Perrault)*, *Кирхеръ*, *Шотъ*, *Вариньонъ*, *Иванъ* и *Даніилъ Бернулли*.

Главная задача, относящаяся къ устроенію клепсидръ, состоитъ въ опредѣленіи вида сосуда, въ которомъ пониженіе воды въ равныя времена было бы одинаково. Если допустимъ, что скорость воды, вытекающей вертикально сверху внизъ изъ весьма малаго отверстія, находящагося въ сосудѣ, равна скорости, которую бы тѣло пріобрѣло свободно падая въ пустотѣ съ высоты уровня воды надъ симъ отверстіемъ, то легко будетъ рѣшить упомянутую задачу. Смот. HYDRODYNAMIQUE, PARALLÉLISME DES TRANCHES (HYPOTHÈSE DU).

Дѣйствительно, пусть будетъ h первоначальная высота уровня воды въ сосудѣ надъ отверстіемъ, z пониженіе воды по истеченіи времени t, и a ея скорость, которая, по условію вопроса, должна быть постоянная; $h-z$ изобразитъ высоту воды надъ отверстіемъ, соотвѣтствующую времени t, а $\sqrt{2g(h-z)}$, въ слѣдствіе сказаннаго выше, будетъ означать скорость вытекающей изъ отверстія воды. Если изобразимъ чрезъ Ω площадь горизонтальнаго сѣченія сосуда при высотѣ $h-z$ отъ отверстія, а чрезъ ω площадь сего послѣдняго, то получимъ

$$\Omega a = \omega \sqrt{2g(h-z)},$$

ибо, очевидно, что по причинѣ несжимаемости воды, скорости ея, при двухъ различныхъ горизонтальныхъ сѣченіяхъ сосуда, должны быть въ обратномъ отношеніи площадей сихъ самыхъ сѣченій.

Замѣтимъ, что отношеніе между Ω и z совершенно произвольное. И такъ, предположивъ что сосудъ имѣетъ симетрическій видъ относительно вертикальной оси z, и взявъ $\Omega = f(x)$, гдѣ подъ x разумѣемъ горизонтальную абсциссу, получимъ уравненіе

$$af(x) = \omega \sqrt{2g(h-z)},$$

принадлежащее вертикальному сѣченію.

Напримѣръ, если желаемъ чтобъ горизонтальныя сѣченія сосуда были прямоугольники, то возьмемъ $\Omega = lx = f(x)$ разумѣя подъ l постоянную длину. Вертикальное сѣченіе опредѣлится уравненіемъ

$$alx = \omega \sqrt{2g(h-z)} \text{ или } x^2 = \frac{2g\omega^2}{a^2l^2}(h-z),$$

которое очевидно принадлежитъ обыкновенной параболѣ, имѣющей свою вершину при отверстіи сосуда.

CLIMAT. (Геогр.) **КЛИМАТЪ.** Древніе раздѣляли земную поверхность на климаты, то есть на поясы, кругами, параллельными экватору, такъ, что должайшій день въ лѣтнее солнцестояніе при параллели, ограничивающей одинъ поясъ, разнился отъ должайшаго дня въ смежномъ съ нимъ поясѣ, постояннымъ промежуткомъ времени. Когда примемъ этотъ промежутокъ равнымъ получасу, то отъ экватора до полярнаго круга получимъ 24 климата; въ первомъ изъ нихъ, считая отъ экватора, должайшій день будетъ $12\frac{1}{2}$ час., во второмъ 13 ч., въ третьемъ $13\frac{1}{2}$ ч. и такъ далѣе до полярнаго круга, при которомъ должайшій день равенъ 24 часамъ. Эти 24 климата назывались *часовыми (climats d'heures)*. Далѣе, пространство отъ полярнаго круга до самаго полюса раздѣляли на 6 климатовъ, именуемыхъ *мѣсячными (climats de mois)* потому, что разность между должайшими днями въ двухъ смежныхъ климатахъ составляетъ цѣлый мѣсяцъ, и у полюса, какъ извѣстно, должайшій день равенъ шести мѣсяцамъ. Это раздѣленіе относится какъ къ сѣверному, такъ и къ южному полушарію, и слѣдовательно вся земная поверхность раздѣляется такимъ образомъ на 60 климатовъ. Впрочемъ, должно замѣтить, что древніе географы, считали только 7 сѣверныхъ климатовъ, которые называли именами примѣчательнѣйшихъ мѣстъ, въ нихъ находящихся. Впослѣдствіи, *Птолемей* прибавилъ еще 7 климатовъ, также сѣверныхъ; въ позднѣйшія уже времена сдѣлано то раздѣленіе, которое приведено выше. Климаты въ древней Географіи имѣли то же назначеніе, какое нынѣ имѣютъ широты при опредѣленіи положенія мѣстъ.

CO.

CO-AMPLITUDE. Смот. AMPLITUDE.

COAPPLIQUÉES. (Геом.) Уст. слово. **КООРДИНАТЫ, СОПРИЛОЖЕННЫЯ.** Абсцисса и ордината разсматриваемыя вмѣстѣ. См. ABSCISSE, ORDONNÉE, COORDONNÉES.

COCHLEA. (Мех.) **ВИНТЪ, ЩУРУПЪ.** См. VIS.

CŒCI (REGULA). (Теор. Чис.) Латинское названіе правила для рѣшенія совокупныхъ неопредѣленныхъ уравненій первой степени. Напримѣръ, слѣдующій вопросъ относится къ сему правилу:

Найти три цѣлыя положительныя числа такого свойства, что если первое изъ нихъ помножимъ на 2, *второе на* 3, *а третье на* 4, *то сумма произведеній будетъ равна* 71; *а если первое умножимъ на* 5, *второе на* 10, *третье на* 7, *то эта сумма* $= 165$?

Изобразивъ чрезъ x, y, z искомыя три числа, получимъ слѣдующія два уравненія:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 71 \\ 5x + 10y + 7z &= 165. \end{aligned}\right.$$

Исключая изъ нихъ y, найдемъ

$$(2)\qquad 5x + 19z = 215.$$

Общія рѣшенія этого неопредѣленнаго уравненія будутъ:

$$x = 4 \times 215 - 19K$$
$$z = -215 + 5K,$$

гдѣ K изображаетъ цѣлое положительное число. См. *О рѣшеніи неопредѣленныхъ уравненій первой степени* въ статьѣ: CONTINUE (FRACTION).

Но такъ какъ x и z должны быть положительныя числа, то

$$4 \times 215 - 19K > 0$$
$$-215 + 5K > 0,$$

откуда $K =$ или < 45, и $K =$ или > 43; слѣдовательно $K = 43$, 44 и 45, что доставляетъ для x и z три системы величинъ

$$x = 43,\quad z = 0,$$
$$x = 24,\quad z = 5,$$
$$x = 5,\quad z = 10,$$

которымъ, въ силу уравн. (1), будутъ соотвѣтствовать слѣдующія величины y:

$$y = -\frac{25}{3},$$
$$y = 1,$$
$$y = 7,$$

Но такъ какъ первая изъ этихъ величинъ дробная, и сверхъ того отрицательная, то остаются только два рѣшенія предложенныхъ уравненій (1), именно:

1-ое $\quad x = 24,\ y = 1,\ z = 5;$

2-ое $\quad x = 5,\ y = 7,\ z = 10.$

Сего примѣра достаточно, чтобы усмотрѣть какимъ образомъ должно будетъ поступать при бо́льшемъ числѣ уравненій и неизвѣстныхъ.

COËFFICIENT. (Алг.) **КОЭФФИЦЕНТЪ, СОМНОЖИТЕЛЬ, ПРЕДСТОЯЩЕЕ, ПРИЧЛЕНЪ.** Такъ называется въ Алгебрѣ число или постоянное количество, на которое помножена неизвѣстная или перемѣнная величина, или еще, нѣкоторая функція той или другой. Напримѣръ, въ выраженіяхъ $5x$, $-7a^2x^3$, $\frac{1}{2\cdot 3}Sin x$, 5 есть коэффиціентъ количества x, $-7a^2$ коэффиціентъ x^3, $\frac{1}{2\cdot 3}$ коэффиціентъ $Sin x$. *Coëfficient d'une quantité*; *коэффиціентъ количества, у количества.*

Méthode des coefficiens indéterminés. Способъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ. Способъ, придуманный Декартомъ, и употребляемый иногда съ выгодою въ различныхъ теоріяхъ, какъ то: въ разложеніи функцій въ ряды, въ теоріи уравненій, въ Интегральномъ Исчисленіи и проч. Для объясненія сего способа, пусть будетъ уравненіе $F(x, y) = 0$, изъ котораго желаемъ опредѣлить величину y посредствомъ x. Положимъ, что, какимъ либо образомъ мы нашли, что y можетъ быть выраженъ рядомъ $a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots$, въ которомъ коэффиціенты $a, b, c, d\ldots$ неизвѣстны. Подставимъ сію величину для y въ уравненіе $F(x,y)=0$, и положимъ, что оно послѣ подстановленія обращается въ слѣдующее:

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots=0,$$

гдѣ $A, B, C, D, \ldots$ составлены изъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ $a, b, c, d, \ldots$ и количествъ извѣстныхъ, входящихъ въ $F(x,y)$.

Такъ какъ уравненіе $A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots=0$ должно быть *тождественное*, т. е. должно имѣть мѣсто для всѣхъ возможныхъ значеній величины x, то очевидно будетъ $A=0, B=0, C=0, D=0, \ldots$ Смот. IDENTIQUE. Изъ сихъ уравненій, коихъ число будетъ вообще равняться числу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, выведемъ неизвѣстныя $a, b, c, d, \ldots$ и подставивъ найденныя такимъ образомъ ихъ величины въ уравненіе $y=a+bx+cx^2+dx^3+\ldots$, получимъ y въ функціи x.

Для ясности, приложимъ сказанное о способѣ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ къ примѣру.

Положимъ, что требуется разложить показательное количество a^x въ рядъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ перемѣнной x. Пусть будетъ

$$(1)\quad a^x=1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\ldots$$

гдѣ $A, B, C, D\ldots$ изображаютъ *неопредѣленные коэффиціенты*, независящіе отъ x; что касается до постояннаго члена въ разложеніи, то онъ очевидно будетъ равняться 1, ибо, при $x=0$, функція a^x обращается въ единицу. Теперь, для опредѣленія величинъ $A, B, C, D\ldots$ мы должны выразить аналитическое отличительное свойство показательнаго количества a^x; простѣйшее выраженіе этого свойства заключается въ уравненіи $a^x\times a^y=a^{x+y}$, или $\frac{a^y}{a^x}=a^{y-x}$, разумѣя подъ y совершенно произвольную величину. Но такъ какъ

$$a^y=1+Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+\ldots$$

то и получимъ вычитая изъ этого уравненія формулу (1),

$$a^y-a^x=a^x(a^{y-x}-1)=A(y-x)+B(y^2-x^2)+C(y^3-x^3)+D(y^4-x^4)+\ldots$$

Съ другой стороны имѣемъ

$$a^{y-x}=1+A(y-x)+B(y-x)^2+C(y-x)^3+\ldots,$$

слѣдовательно

$$a^x[A(y-x)+B(y-x)^2+C(y-x)^3+\ldots]=A(y-x)+B(y^2-x^2)+C(y^3-x^3)+D(y^4-x^4)+\ldots$$

и сокращая на $y-x$

$$a^x[A+B(y-x)+C(y-x)^2+\ldots]=A+B(y+x)+C(y^2+yx+x^2)+D(y^3+y^2x+yx^2+x^3)+\ldots$$

Положивъ $y=x$, и замѣнивъ a^x разложеніемъ (1), найдемъ

$$A+A^2x+ABx^2+ACx^3+\ldots=A+2Bx+3Cx^2+4Dx^3+\ldots$$

Такъ какъ это уравненіе должно быть тождественно по причинѣ что x совершенно произвольная величина, то и получимъ

$$A=A,\ A^2=2B,\ AB=3C,\ AC=4D,\ldots$$

и слѣдовательно

$$A=A,\ B=\frac{A^2}{2},\ C=\frac{A^3}{2.3},\ D=\frac{A^4}{2.3.4},\ldots$$

Подставляя эти величины въ формулу (1), найдется

$$a^x=1+\frac{Ax}{1}+\frac{A^2x^2}{1.2}+\frac{A^3x^3}{1.2.3}+\frac{A^4x^4}{1.2.3.4}+\ldots$$

Для опредѣленія величины A, положимъ $Ax=1$ или $x=\frac{1}{A}$; получимъ

$$a^{\frac{1}{A}}=1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots;$$

означивъ чрезъ e сумму ряда $1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots$ которая есть не иное что, какъ основаніе Неперовой системы логариѳмовъ (Смот. LOGARITHME), найдемъ

$$a^{\frac{1}{A}}=e,\text{ откуда } A=\log a,$$

разумѣя подъ знакомъ $\log$. Неперовъ логариѳмъ. И такъ

$$a^x=1+\frac{\log a\,.\,x}{1}+\frac{\log^2 a\,.\,x^2}{1.2}+\frac{\log^3 a\,.\,x^3}{1.2.3}+\frac{\log^4 a\,.\,x^4}{1.2.3.4}+\ldots$$

Замѣтимъ, что способъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ не всегда можетъ привести къ предполагаемому разложенію. Вообще онъ долженъ быть употребляемъ съ большою осмотрительностію, ибо нерѣдко случается, что ряды, къ которымъ онъ приводитъ, бываютъ расходящіеся. Смот. SÉRIE, CONVERGENCE D'UNE SÉRIE.

COËFFICIENT DIFFÉRENTIEL. (Диф. Исч.) **ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЙ КОЭФФИЦІЕНТЪ, СОМНОЖИТЕЛЬ, ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОЕ ПРЕДСТОЯЩЕЕ, ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОЕ ОТНОШЕНІЕ.** Дифференціальнымъ коэффиціентомъ функціи $y=f(x)$ называется коэффиціентъ, находящійся у первой степени приращенія h въ разложенной функціи $f(x+h)$. И такъ, если положимъ:

$$f(x+h)=f(x)+ph+q\frac{h^2}{1.2}+r\frac{h^3}{1.2.3}+\cdots,$$

то p изобразитъ *дифференціальный коэффиціентъ* функціи y; q называется *дифференціальнымъ коэффиціентомъ втораго порядка*, r *дифференціальнымъ коэффиціентомъ третьяго порядка* и такъ далѣе. Дифференціальные коэффиціенты и производныя функціи одно и то же. Смот. DÉRIVÉE, DIFFÉRENTIEL.

COËFFICIENT. (Физ.) **КОЭФФИЦІЕНТЪ.** Такъ называется въ Физикѣ численная величина, входящая въ аналитическую формулу, выражающую законъ какого либо явленія. Коэффиціенты, о которыхъ говоримъ, опредѣляются обыкновенно изъ опытовъ. Читатели могутъ найти тому примѣры во многихъ статьяхъ сего Лексикона, между прочими въ словѣ: BAROMÉTRIQUE (FORMULE).

COERCIBLE. СЖИМАЕМЫЙ.

COERCIBILITÉ. (Физ.) **СЖИМАЕМОСТЬ.** Смот. IMPÉNÉTRABILITÉ.

CŒUR. (Геом.) **СЕРДЦЕОБРАЗНОЕ ТѢЛО.** Такъ назвали нѣкоторые математики, между прочими *Вариньонъ* (*Mémoires de l'Académie des sciences* 1692), тѣло, происходящее отъ обращенія полу-эллипса около одного изъ его діаметровъ, отличнаго отъ осей. Это названіе произошло отъ нѣкотораго сходства сего тѣла съ видомъ сердца.

COEXISTANCE DES PETITES OSCILLATIONS. (Мех.) **СОВМѢСТНОСТЬ МАЛЫХЪ КОЛЕБАНІЙ.** Когда въ какой ни есть срединѣ, въ особенности же въ упругой, возбуждаемъ какимъ либо образомъ весьма малыя сотрясенія или колебанія, то замѣчаемъ что эти колебанія совокупляются между собою по *наложенію*, не причиняя никакого помѣшательства однѣ другимъ, то есть, *полное* колебаніе равно суммѣ *частныхъ* колебаній, производимыхъ каждое дѣйствіемъ отдѣльной причины. Первый, сдѣлавшій это замѣчаніе, былъ *Даніилъ Бернулли*. Нынѣ извѣстно, что совмѣстность малыхъ колебаній происходитъ именно отъ ихъ малости, ибо малыя колебанія, или лучше сказать количества, которыми они опредѣляются, даны посредствомъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, коихъ вторыя части зависятъ отъ возмутительныхъ причинъ. Изъ теоріи же линейныхъ уравненій слѣдуетъ, что если во вторыхъ частяхъ сихъ уравненій сохранимъ сперва членъ относящійся къ одной возмутительной силѣ, потомъ къ другой, далѣе, къ третей и проч., то сумма интеграловъ измѣненныхъ такимъ образомъ дифференціальныхъ уравненій, изобразитъ интегралы первоначальныхъ уравненій, то есть тѣхъ, которыя заключаютъ въ себѣ члены, вводимые всѣми возмутительными силами. Въ этомъ-то и состоитъ, въ самомъ общемъ видѣ, теорія *совмѣстности* или совокупленія посредствомъ наложенія малыхъ колебаній.

Замѣтимъ однакожъ, что совмѣстность малыхъ колебаній должно принимать только за приближенную теорію, ибо уравненія, опредѣляющія величины ихъ, бываютъ линейными только отъ того, что откидываемъ нѣкоторыя количества, предполагаемыя весьма малыми; но если бы желали сохранить въ вычисленіи совершенную точность, то уравненія, о которыхъ говоримъ, не были бы вообще линейными, и теорія совмѣстности колебаній не имѣла бы уже мѣста. Впрочемъ, такъ какъ наблюденія почти всегда подтверждаютъ эту теорію, то мы въ правѣ заключить, что отбрасываемыя величины должны быть на самомъ дѣлѣ весьма малы.

Для поясненія примѣромъ предыдущей теоріи, разсмотримъ рядъ матеріальныхъ частицъ, расположенныхъ по прямой линіи, и которыя, предполагаемъ, были весьма мало отклонены отъ равновѣснаго ихъ положенія.

Чтобы удобнѣе представить себѣ эту систему, положимъ, что частицы составляютъ струну AB (черт. 4, листъ IV), которая первоначально находится въ равновѣсіи. Положимъ, что конецъ A утвержденъ неподвижно, а за другой конецъ B натягиваютъ слегка струну, такъ что она, получивъ весьма малое удлинненіе, приняла положеніе AC. Если отпустятъ потомъ конецъ C, и въ то же время сообщатъ всѣмъ частицамъ струны скорости весьма малыя, коихъ направленія не выходятъ изъ прямой AC, то струна получитъ нѣкоторое колебательное движеніе, которое требуется опредѣлить.

Пусть будетъ $AD=a$ разстояніе какой нибудь точки m струны, находящейся въ равновѣсномъ состоянiи, отъ неподвижной точки A, а $AE = a + \alpha f(a)$ разстоянiе той же частицы, но въ то время, когда струна натянута, и слѣдовательно имѣетъ длину AC; α изображаетъ здѣсь количество весьма малое, а $f(a)$ произвольную функцiю отъ a. Означимъ чрезъ $a + \alpha x$ разстоянiе AM разсматриваемой частицы m отъ A по истеченiи какого ни есть времени t, считаемаго отъ того мгновенiя, когда конецъ C струны былъ отпущенъ. Если изобразимъ чрезъ ω сѣченiе струны, перпендикулярное къ ея оси, чрезъ ϱ ея плотность а чрезъ Dx длину MN частицы m, то масса Dm этой частицы, опредѣлится произведенiемъ $\omega\varrho Dx$; и слѣдовательно выраженiе движущей силы, дѣйствующей на частицу m, будетъ $\alpha\omega\varrho \frac{d^2x}{dt^2} Dx = \alpha Dm \frac{d^2x}{dt^2}$. Теперь надобно найти другое выраженiе этой самой силы; для этого, разсмотримъ другую частицу $M'N' = m'$, и представимъ чрезъ z ея разстоянiе отъ m. Взаимодѣйствiе двухъ частицъ m и m' изобразится чрезъ $mm'\varphi(z)$; взявъ сумму всѣхъ подобныхъ дѣйствiй, раждающихся отъ частицъ смежныхъ съ m, получимъ $\alpha \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma m'\varphi(z)$, разумѣя подъ Σ суммовой знакъ.

Для употребленiя найденнаго уравненiя, надобно найти разложенiе суммы $\Sigma m\varphi'(z)$. Замѣтимъ, что она должна зависѣть только отъ положенiя частицы m, то есть отъ количества $a + \alpha x$. Пусть будетъ $\varphi(a + \alpha x)$ величина этой суммы. Такъ какъ, до напряженiя струны, всѣ дѣйствiя взаимно уничтожаются, ибо она находится тогда въ равновѣсiи, то $\varphi(a) = 0$; слѣдовательно, сумма $\varphi(a + \alpha x)$, для какого ни есть мгновенiя, будетъ

$$\varphi(a) + \varphi'(a)\alpha x + \varphi''(a)\frac{\alpha^2x^2}{1.2} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \varphi'(a)\alpha x + \varphi''(a)\frac{\alpha^2x^2}{1.2} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Полагая $\varphi'(a) = -k^2$, и откидывая степени величины α превышающiя первую, получимъ

$$\varphi(a + \alpha x) = \Sigma m'\varphi(z) = -k^2\alpha x.$$

И такъ, вышеприведенное уравненiе приметъ видъ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0,$$

и, сверхъ того, при $t = 0$, должны имѣть $x = f(a)$.

Изобразимъ теперь чрезъ $\alpha F(a)$ весьма малую начальную скорость, сообщаемую частицѣ m; получимъ $\frac{dx}{dt} = F(a)$ для $t = 0$, ибо скорость точки m будетъ $\frac{d(a+\alpha x)}{dt} = \alpha\frac{dx}{dt}$; слѣдовательно при $t = 0$, должно быть $\alpha\frac{dx}{dt} = \alpha F(a)$, то есть $\frac{dx}{dt} = F(a)$.

И такъ, надобно опредѣлить x изъ уравненiй

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0 \\ \left.\begin{aligned} x &= f(a) \\ \dfrac{dx}{dt} &= F(a) \end{aligned}\right\} \text{когда } t = 0. \end{cases}$$

Вотъ условiя для опредѣленiя x; въ разсматриваемомъ нами случаѣ, колебанiя струны происходятъ отъ двухъ причинъ: во первыхъ, отъ ея напряженiя, чрезъ что вводится членъ $f(a)$, а во вторыхъ, отъ сообщенной всѣмъ ея точкамъ начальной скорости $F(a)$. Если не будемъ сперва принимать въ соображенiе скорости $F(a)$, то получимъ уравненiя

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0 \\ \left.\begin{aligned} x &= f(a) \\ \dfrac{dx}{dt} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{когда } t = 0. \end{cases}$$

Откидывая же членъ $f(a)$, относящiйся къ удлинненiю струны, найдется

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0 \\ \left.\begin{aligned} x &= 0 \\ \dfrac{dx}{dt} &= F(a) \end{aligned}\right\} \text{когда } t = 0. \end{cases}$$

Сумма интеграловъ уравненiй (2) и (3) изобразитъ интегралъ уравн. (1). Дѣйствительно, интегралъ перваго изъ уравн. (2) будетъ

$$x = A\,Cos\,kt + B\,Sin\,kt,$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = -kA\,Sin\,kt + kB\,Cos\,kt;$$

полагая $t = 0$, находимъ

$$f(a) = A$$
$$o = kB;$$

такъ какъ k не нуль, то $B = 0$, и слѣдовательно

$$x = f(a)\,Cos\,kt.$$

Интегралъ перваго изъ уравн. (3) будетъ также

$$x = A'\,Cos\,kt + B'\,Sin\,kt,$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = -kA'\,Sin\,kt + kB'\,Cos\,kt;$$

полагая $t = 0$, найдется

$$0 = A'$$
$$F(a) = kB';$$
слѣдовательно $x = \frac{F(a) \, Sin \, kt}{k}$.

Сумма величинъ $f(a) \, Cos \, kt$ и $\frac{F(a) \, Sin \, kt}{k}$ опредѣлитъ, какъ сказано выше, полный интегралъ уравн. (1), и искомая величина для x будетъ
$$x = f(a) \, Cos \, kt + \frac{F(a) \, Sin \, kt}{k}.$$

Эта формула показываетъ, что колебанія струны, происходящія отъ первоначальнаго ея удлинненія, и тѣ, которыя она получила отъ сообщенныхъ ея точкамъ начальныхъ скоростей, производятъ полныя колебанія, и совокупляются посредствомъ наложенія, не производя помѣшательства однѣ въ движеніи другихъ. И такъ, здѣсь какъ и вообще, полное колебаніе, то есть, колебаніе происходящее отъ совокупнаго дѣйствія причинъ, равно суммѣ колебаній, получаемыхъ при разсматриваніи каждой причины отдѣльно.

COHÉRENCE. (Физ.) Уст. сл. То же что **COHÉSION.**

COHÉSION или **ADHÉRENCE.** (Физ.) **СЦѢПЛЕНІЕ.** Когда пытаемся отдѣлить однѣ отъ другихъ частицы тѣла, преимущественно твердаго, то встрѣчаемъ нѣкоторое сопротивленіе; это сопротивленіе или сила, соединяющая частицы тѣла между собою, называется *силою сцѣпленія.*

Сила сцѣпленія обнаруживаетъ свое дѣйствіе и въ томъ случаѣ, когда тѣло раздроблено на мелкія части, приводимыя въ соприкосновеніе; частицы стремятся тогда къ взаимному соединенію, хотя бы онѣ и были разнородныя. Такое свойство называютъ *прилипаемостію* (*adhésion*). Между силами сцѣпленія и прилипанія нѣкоторые физики полагаютъ различіе, состоящее въ томъ, что первая обнаруживается только между частицами однородными, а вторая существуетъ, какъ между однородными такъ и разнородными частицами. Для дальнѣйшихъ подробностей о семъ предметѣ, отсылаемъ читателей къ курсамъ Физики, а также къ словамъ: ATOME, MOLÉCULE, FORCE, CORPS.

COIN. (Геом.) **ДВУГРАННЫЙ УГОЛЪ.** *Лежандръ*, въ своей Геометріи, предлагаетъ наименованіе *coin* (*клинъ*) для угла, образуемаго двумя плоскостями; пересѣченіе же сихъ двухъ плоскостей онъ называетъ *faîte* или *arête* (*ребро*). И такъ *coin droit* (*прямой двугранный уголъ*) будетъ означать уголъ, составляемый двумя взаимно перпендикулярными плоскостями. Двугранный уголъ можетъ быть изображенъ четырьмя буквами, изъ коихъ двѣ среднія принадлежатъ ребру.

COIN. (Геом.) Смот. ONGLET SPHÉRIQUE.

COIN CONOIDE. (Геом.) **КОНОИДАЛЬНЫЙ КЛИНЪ.** Такъ называютъ нѣкоторый родъ *косой* поверхности, которую разсматривалъ *Вальисъ* (*Wallis*) и назвалъ *cono-cuneus*; образованіе коноидальнаго клина слѣдующее: положимъ, что $BDFE$ (черт. 5, листъ IV) изображаетъ четверть круга, коего плоскость перпендикулярна къ плоскости $ABCD$, и вмѣстѣ съ тѣмъ параллельна линіи AC. Если станемъ двигать другую плоскость GFH такъ, чтобы она, въ продолженіи всего движенія, оставалась непрестанно перпендикулярна къ линіи AC, и соединимъ потомъ линіями $GF, G'F' \ldots$ точки, въ которыхъ эта плоскость встрѣчаетъ прямую AC и круговую дугу $EF'FD$, то совокупность прямыхъ линій $CD, GF, G'F' \ldots AE$ образуетъ поверхность, именуемую *коноидальнымъ клиномъ.*

Очевидно впрочемъ, что полная поверхность коноидальнаго клина, будетъ состоять изъ восьми частей, подобныхъ той, коей образованіе мы сей-часъ показали; дѣйствительно, вмѣсто четверти круга $EFDB$, должно будетъ принять цѣлый кругъ, и сверхъ того продолжить *производящія* $CD, GF, G'F' \ldots AE$ неопредѣленно въ обѣ стороны. Смот. GAUCHE (SURFACE). —

Вмѣсто круга, можно разсматривать другую направляющую кривую, и получится поверхность, которая также называется *коноидальнымъ клиномъ.*

COIN. (Мех.) **КЛИНЪ.** Трехсторонняя призма, большею частію металлическая, которая острымъ ребромъ, называемымъ *остріемъ* (*tranchant*), вкладывается въ разщелину тѣла; ударами въ противоположную сторону, именуемую *обухомъ* (*tête du coin*), вгоняютъ клинъ въ тѣло, чрезъ что части сего послѣдняго отдѣляются одна отъ другой. Клинъ употребляется для раскалыванія тѣлъ, для произведенія большихъ давленій, для подъёма тяжестей, для натягиванія веревокъ и проч. Ножи, топоры, бритвы, буравы, однимъ словомъ всѣ острыя и остроконечныя орудія относятся къ клину.

При разсматриваніи дѣйствія клина, мы не можемъ, какъ для другихъ машинъ, опредѣлить отношеніе силы къ сопротивленію, ибо сопротивленіе, изъявляемое частицами тѣла къ взаимному отдѣленію, намъ мало извѣстно. И такъ, ограничимся опредѣленіемъ усилій, производимыхъ дѣйствіемъ силы на обухъ, перпендикулярно къ двумъ ребрамъ или сторонамъ клина. Замѣтимъ сперва, что каково бы ни было направленіе этой силы, оно всегда можетъ быть принимаемо перпендикулярнымъ къ обуху, ибо, въ противномъ случаѣ, стоило бы только разложить силу на двѣ другія, одну перпендикулярную, а другую, дѣйствующую въ плоскости обуха; вторая не произвела бы никакого дѣйствія, между тѣмъ какъ осталась бы только перпендикулярная.

Пусть будетъ MN (черт. 6 Листъ IV) направленіе силы, по предположенію перпендикулярное къ плоскости обуха. Чрезъ эту линію проводимъ плоскость, перпендикулярную къ острію клина. Сѣченіе сего послѣдняго этою плоскостію будетъ треугольникъ ABC. Изъ точки N, гдѣ сила встрѣчаетъ обухъ BC, опускаемъ перпендикуляры NK, NL къ сторонамъ BA, CA клина. Разложимъ силу, дѣйствующую по MN, и которую изобразимъ чрезъ R, на двѣ другія P и Q по направленіямъ NK и NL. Для этого, беремъ на продолженіи линіи MN произвольную длину Nn, и изъ точки n проводимъ линіи nl, nk параллельно NK, NL. Очевидно, что силы R, P, Q будутъ находиться между собою въ отношеніи трехъ линій Nn, Nk, $Nl = kn$, то есть,

$$\frac{R}{\overline{Nn}} = \frac{P}{\overline{Nk}} = \frac{Q}{\overline{kn}}.$$

Но такъ какъ треугольники ABC и kNn подобны по причинѣ взаимной перпендикулярности ихъ сторонъ, то получимъ также

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{Nn}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{Nk}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{kn}}.$$

Совокупляя эти равенства съ прежде выведенными, найдемъ

$$\frac{R}{\overline{BC}} = \frac{P}{\overline{AB}} = \frac{Q}{\overline{AC}}.$$

И такъ, если означимъ силу R длиною $\overline{BC}$ обуха, то усилія P и Q будутъ соотвѣтственно изображаться сторонами AB и AC клина. Ясно, что дѣйствіе клина будетъ тѣмъ значительнѣе, чѣмъ длина обуха, въ соразмѣрности съ его сторонами, будетъ менѣе.

COINCIDENCE. (Геом.) **СОВПАДЕНІЕ, СОВПАДАЕМОСТЬ, СОВМѢЩЕНІЕ.** Говорится о сравниваемыхъ между собою линіяхъ, фигурахъ, поверхностяхъ и тѣлахъ, когда всѣ части разсматриваемыхъ двухъ изъ нихъ равны между собою.

COINCIDER. (Геом.) **СОВПАДАТЬ, СОВМѢЩАТЬСЯ.** Двѣ фигуры *совпадаютъ*, когда, по наложеніи одной на другую, онѣ сливаются, то есть покрываютъ совершенно другъ друга. Этотъ глаголъ употребляется иногда и въ Анализѣ; напримѣръ, говорится: *ces deux formules coincident entr'elles*; *сіи двѣ формулы равнозначущи, тождественны.*

COLLIMATION (LIGNE DE). (Астр.) **КОЛЛИМАЦІОННАЯ ЛИНІЯ,** *линія зрѣнія.* Направленіе зрительнаго луча, когда наблюдаютъ какой либо предметъ сквозь діоптры угломѣрнаго инструмента. — О п т и ч е с к а я о с ь т р у б ы, то есть линія, проходящая чрезъ центры стеколъ трубы. — *Erreur de collimation; коллимаціонная погрѣшность.* Въ угломѣрномъ инструментѣ погрѣшность, происходящая отъ несовпаденія точки нуля съ линіею, отъ которой считаются измѣряемые углы; также, уголъ составляемый линіею зрѣнія съ линіею, перпендикулярною къ оси вращенія трубы.

COLLISION. (Мех.) **СОУДАРЕНІЕ.** Смот. CHOC.

COLONNE. СТОЛБЕЦЪ, СТОЛБЪ. Совокупность цифръ, расположенныхъ въ одинъ рядъ въ какихъ либо таблицахъ, напримѣръ, въ логариѳмическихъ; также, совокупность членовъ, такимъ же образомъ расположенныхъ въ какой либо формулѣ или въ безконечномъ ряду. — *Colonne atmosphérique, colonne de mercure*; *атмосферическій, ртутный столбецъ.*

COLONNE. (Алг.) **СТОЛБЕЦЪ.** Наименованіе употребленное *Роллемъ* въ его Алгебрѣ *), и которымъ онъ означаетъ нѣкоторый порядокъ при рѣшеніи уравненій со многими неизвѣстными.

Положимъ, напримѣръ, что даны четыре уравненія

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x + y + v = 7 \\ x + z + v = 8 \\ y + z + v = 9. \end{array}\right.$$

---

*) *Traité d'Algèbre, par M. Rolle.* Paris 1690.

Для рѣшенія сихъ уравненій по способу Ролля, беремъ которое нибудь изъ нихъ, напримѣръ 1-ое, и выводимъ изъ него

(*a*) $x = 6 - y - z$;

подставляя эту величину въ остальныя изъ уравненій (1), получаемъ

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} v - z &= 1 \\ v - y &= 2 \\ y + z + v &= 9. \end{aligned}\right.$$

Поступаемъ такимъ же образомъ съ уравненіемъ (2), напримѣръ, выводимъ изъ перваго

(*b*) $v = 1 + z$,

и, подставляя въ остальныя два, получаемъ

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} z - y &= 1 \\ y + 2z &= 8, \end{aligned}\right.$$

откуда

(*c*) $z = 1 + y$;

слѣдовательно

(4) $3y = 6$

и наконецъ

(*d*) $y = 2$.

Уравненія (1), (2), (3) и (4) составляютъ такъ называемый Роллемъ *столбецъ направленія* (*colonne de direction*), а каждая купа уравненій (1), (2), (3), (4), особый *классъ*. Уравненія (*d*), (*c*), (*b*), (*a*), составляютъ первый классъ *столбца возврата*; изъ сего перваго класса выводится второй классъ, потомъ третій, и наконецъ, въ разсматриваемомъ случаѣ, четвертый классъ. Изъ столбца возврата выписываютъ особенно величины неизвѣстныхъ y, z, v, x, и получаютъ *конечный столбецъ* (*colonne finale*). Приводимъ здѣсь расположеніе этихъ столбцовъ въ томъ видѣ, въ какомъ Ролль писалъ ихъ:

Столбецъ направленія.	*Столбецъ возврата.*
Первый классъ:	Первый классъ:
$x + y + z = 6$	$y = 2$
$x + y + v = 7$	$z = 1 + y$
$x + z + v = 8$	$v = 1 + z$
$y + z + v = 9$	$x = 6 - y - z$.
Второй классъ:	Второй классъ:
$v - z = 1$	$z = 3$
$v - y = 2$	$v = 1 + z$
$y + z + v = 9$	$x = 4 - z$.
Третій классъ:	Третій классъ:
$z - y = 1$	$v = 4$
$y + 2z = 8$	$x = 1$.
Четвертый классъ:	Четвертый классъ:
$3y = 6$	$x = 1$.

Конечный столбецъ.

$$y = 2$$
$$z = 3$$
$$v = 4$$
$$x = 1.$$

Если, при употребленіи этого способа, окажется что не всѣ неизвѣстныя опредѣлились въ столбцѣ возврата, то заключаемъ, что предложенный вопросъ относился къ роду *неопредѣленныхъ*. Равнымъ образомъ, если которое нибудь изъ уравненій, составляющихъ столбцы направленія или возврата, будетъ заключать въ себѣ какое либо противорѣчіе, то должно заключить изъ этого, что вопросъ невозможенъ.

Для сличенія отсылаемъ читателей къ статьѣ: CASCADES (MÉTHODE DES), въ которой объяснены наименованія: *древо возврата* и *древо направленія*, имѣющія связь съ приведеннымъ здѣсь способомъ.

COLURES. (Астр.) **КОЛЮРЫ.** Два большіе круга, взаимно перпендикулярные, и проходящіе чрезъ полюсы міра, одинъ, чрезъ точки равноденственныя, а другой, чрезъ точки солнцестоянія. *Colure d'équinoxe, de solstice*; *колюръ равноденствій, солнцестоянія*; *кругъ равноденственный, солнцестоятельный.*

COMBINAISON. (Анал.) **СОЕДИНЕНІЕ.** Такъ называютъ вообще всякаго рода совокупленія нѣсколькихъ вещей, изъ многихъ данныхъ. Вещи могутъ быть какія угодно, напримѣръ: карты, шары различныхъ цвѣтовъ, слова, буквы, числа и проч. — Въ тѣсномъ смыслѣ, подъ *соединеніями*, разумѣютъ совокупленія нѣсколькихъ буквъ *пò-двѣ*, *пò-три* и т. д., дающія произведенія различныя между собою. Напримѣръ, четыре буквы a, b, c, d, совокупляемыя пò-двѣ, даютъ *шесть соединеній*, именно: ab, ac, ad, bc, bd, cd; пò-три, три слѣдующія: abc, acd bcd.

THÉORIE DES COMBINAISONS. ТЕОРІЯ СОЕДИНЕНІЙ. Въ этой теоріи разсматриваются различныхъ родовъ совокупленія, и предлагаются правила для опредѣленія числа всѣхъ соединеній, допускаемыхъ требованіями вопроса. Войдемъ въ нѣкоторыя подробности по сему предмету.

Предложимъ себѣ сперва слѣдующую задачу: *Даны m буквъ a, b, c, d.....; спрашивается, сколько переложеній можно сдѣлать со всѣми этими буквами, переставляя ихъ всѣми возможными образами?*

Замѣтимъ, что если бы даны были двѣ буквы a и b, то получили бы только $2 = 1.2$ перемѣщенія, именно ab и ba. Три буквы a, b и c допускаютъ $6 = 1.2.3$ переложеній abc, acb, bac, bca, cab, cba. Вообще, легко видѣть, что при m буквахъ число переложеній будетъ $1.2.3\ldots m$. Дѣйствительно, положимъ, что разсматриваемъ 4 буквы a, b, c, d; каждая изъ нихъ можетъ занимать первое мѣсто, между тѣмъ какъ остальныя три перемѣщаются всѣми возможными образами; но мы видѣли выше, что число перемѣщеній, относящихся къ 3 буквамъ, равно $6 = 1.2.3$; и такъ, помноживъ это послѣднее число на 4, получимъ число всѣхъ перемѣщеній для 4 буквъ, то есть 24, именно:

$$a\left\{\begin{array}{l} bcd\\ bdc\\ cbd\\ cdb\\ dbc\\ dcb \end{array}\right. \quad b\left\{\begin{array}{l} acd\\ adc\\ cad\\ cda\\ dac\\ dca \end{array}\right. \quad c\left\{\begin{array}{l} abd\\ adb\\ bad\\ bda\\ dab\\ dba \end{array}\right. \quad d\left\{\begin{array}{l} abc\\ acb\\ bac\\ bca\\ cab\\ cba. \end{array}\right.$$

Такого рода перемѣщенія называются обыкновенно *перестановленіями* или *переложеніями* (*permutations, arrangements*).

Когда совокупляемъ извѣстное число буквъ по̀-двѣ, по̀-три..., то такого рода соединенія называются *сочетаніями* или *измѣненіями* (*variations*). Напримѣръ, совокупляя три буквы a, b, c, по̀-двѣ, получимъ шесть сочетаній: ab, ac, ba, bc, ca и cb. Положимъ, что имѣемъ вообще m буквъ, которыя совокупляемъ по̀-двѣ, и желаемъ найти число всѣхъ сочетаній. Такъ какъ каждая изъ предложенныхъ m буквъ совокупляется съ $(m-1)$-ою изъ остальныхъ, то очевидно, что искомое число сочетаній будетъ $m(m-1)$.

Если бы тѣ же m буквъ соединялись по̀-три, то ясно, что каждая изъ нихъ, оставаясь на первомъ мѣстѣ, совокуплялась бы съ сочетаніями по̀-2 остальныхъ $(m-1)$ буквъ; но такъ какъ сочетаній по̀-2 для $(m-1)$ буквъ будетъ $(m-1)(m-2)$, то очевидно, что число сочетаній для m буквъ, совокупляемыхъ по̀-три, изобразится произведеніемъ $m(m-1)(m-2)$.

Вообще, легко заключить, что число сочетаній m буквъ по̀-n опредѣлится произведеніемъ $m(m-1)(m-2)\ldots(m-\overline{n-1})$.

Собственно, подъ *соединеніями* (*combinaisons, produits différents*) разумѣютъ совокупность тѣхъ сочетаній которыя даютъ произведенія различныя, предполагая что буквы, входящія въ нихъ, сохраняютъ совершенную независимость между собою. И такъ, три буквы a, b, c, совокупляемыя по̀-двѣ, даютъ 6 сочетаній ab, ac, ba, bc, ca и cb, а только три соединенія ab, ac, bc, ибо сочетанія ab и ba, ac и ca, bc и cb, разсматриваемыя какъ произведенія, равны между собою.

Чтобы получить число соединеній, очевидно стоитъ только раздѣлить число всѣхъ сочетаній на совокупность перестановленій. И такъ, изобразивъ чрезъ m число всѣхъ буквъ, совокупляемыхъ по̀-n, число сочетаній будетъ $\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-\overline{n-1})}{1\cdot2\cdot3\cdots n}$. Напримѣръ, 5 буквъ a, b, c, d, e, совокупляемыя по̀-три, даютъ $\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3} = 10$ соединеній, именно:

abc abd abe acd ace
ade bcd bce bde cde.

Отсюда легко заключить, что число различныхъ произведеній, которыя можно составить изъ m буквъ, бравъ ихъ по̀-двѣ, по̀-три, по̀-четыре и проч. опредѣлится формулою

$$\frac{m(m-1)}{1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}+\cdots+1.$$

Но такъ какъ [C. BINOMIAUX (COEFFICIENTS)]

$$2^m = 1+m+\frac{m(m-1)}{1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}+\cdots\cdots,$$

то искомое число будетъ

$$2^m - m - 1.$$

Напримѣръ, имѣя четыре простыя числа 2, 3, 5 и 7, получили бы 11 произведеній

$2.3 = 6$, $2.5 = 10$, $2.7 = 14$, $3.5 = 15$,
$3.7 = 21$, $5.7 = 35$, $2.3.5 = 30$, $2.3.7 = 42$,
$2.5.7 = 70$, $3.5.7 = 105$, $2.3.5.7 = 210$.

Всѣ эти произведенія суть дѣлители числа $2.3.5.7 = 210$; если прибавимъ къ нимъ предложенныя числа, то получимъ всего 15 дѣлителей.

Разсмотримъ теперь перестановленія нѣсколькихъ буквъ, изъ которыхъ нѣкоторыя повторяются. Напримѣръ, опредѣлимъ совокупность переложеній сложности $aaabbc$. Если бы всѣ 6 буквъ были различны между собою, то число перестановленій равнялось бы $1.2.3.4.5.6 = 720$; но такъ какъ имѣемъ въ этомъ числѣ одинаковыя буквы, то въ числѣ 720 получатся одинаковыя переложенія. Легко усмотрѣть, что такъ какъ въ настоящемъ случаѣ имѣемъ 3 буквы a, то полное число переложеній должно во первыхъ раздѣлить на произведеніе 1.2.3, изображающее число перемѣщеній трехъ буквъ; равнымъ образомъ, число всѣхъ переложеній должно быть раздѣлено и на 1.2 по той причинѣ, что въ сложности $aaabbc$ имѣемъ еще двѣ одинаковыя буквы b. И такъ, искомое число перестановленій изобразится чрезъ $\frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.1.2} = 60$.

Вообще, пусть будетъ въ данной сложности α буквъ a, β буквъ b, γ буквъ c, ... ; положивъ $\alpha + \beta + \gamma + \ldots\ldots = m$, число переложеній сложности $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ изобразится формулою

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots m}{1.2.3\ldots\alpha.1.2.3\ldots\beta.1.2.3\ldots\gamma\ldots}.$$

Разсмотримъ еще *сочетанія съ повтореніемъ* (*variations à répétition*). Двѣ буквы a, b, совокупляемыя по-двѣ, доставляютъ четыре сочетанія съ повтореніемъ, именно: aa, ab, ba, bb; три буквы a, b, c даютъ 9 таковыхъ сочетаній: aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc. Вообще, легко видѣть, что m буквъ, совокупляемыя по-двѣ, даютъ m^2 сочетаній съ повтореніемъ, ибо каждая изъ m буквъ совокупляется съ каждою изъ тѣхъ же самыхъ m буквъ, что̀ и составитъ всего $m \times m$ или m^2 сочетаній. Для совокупленія m буквъ по̀-три, надобно будетъ каждую изъ нихъ совокупить со всѣми сочетаніями по̀-2, которыхъ, какъ мы сей-часъ видѣли, будетъ числомъ m^2. Слѣдовательно, число сочетаній по̀-3 опредѣлится произведеніемъ $m \times m^2 = m^3$. И вообще, число сочетаній съ повтореніемъ для m буквъ, совокупляемыхъ по̀-n, изобразится степенью m^n. Такъ, напримѣръ, совокупляя четыре буквы a, b, c, d по̀-три, получимъ $4^3 = 64$ сочетанія съ повтореніемъ, именно:

aaa	*aab*	*aac*	*aad*	*aba*	*abb*	*abc*	*abd*
aca	*acb*	*acc*	*acd*	*ada*	*adb*	*adc*	*add*
baa	*bab*	*bac*	*bad*	*bba*	*bbb*	*bbc*	*bbd*
bca	*bcb*	*bcc*	*bcd*	*bda*	*bdb*	*bdc*	*bdd*
caa	*cab*	*cac*	*cad*	*cba*	*cbb*	*cbc*	*cbd*
cca	*ccb*	*ccc*	*ccd*	*cda*	*cdb*	*cdc*	*cdd*
daa	*dab*	*dac*	*dad*	*dba*	*dbb*	*dbc*	*dbd*
dca	*dcb*	*dcc*	*dcd*	*dda*	*ddb*	*ddc*	*ddd.*

Теорія соединеній есть одна изъ отраслей математическаго Анализа, которою наиболѣе заимствуется Исчисленіе Вѣроятностей. Смот. PROBABILITÉS (CALCUL DES). *Яковъ Бернулли* въ своемъ *Ars conjectandi*, а *Монтморъ* (*Montmort*) въ *Analyse des jeux de hasard*, предложили много изслѣдованій по этому предмету. Предѣлы нашего Лексикона не позволяютъ намъ входить въ дальнѣйшія подробности о соединеніяхъ; но читатели найдутъ во многихъ статьяхъ, относящихся къ Анализу Вѣроятностей, приложенія этой теоріи. Отсылаемъ также къ непосредственно слѣдующей статьѣ ANALYSE COMBINATOIRE, которая отчасти послужитъ дополненіемъ сказанному здѣсь о теоріи соединеній.

COMBINATOIRE (ANALYSE). СОЕДИНИТЕЛЬНЫЙ, КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗЪ. Сія особенная отрасль Математики занимается: 1° изслѣдованіемъ различныхъ образовъ измѣненія *порядка* или *мѣстъ* вещей, подлежащихъ или неподлежащихъ опредѣленной взаимной зависимости; 2° разысканіемъ законовъ, по которымъ эти измѣненія или перемѣщенія могутъ быть изображены и исчислены; наконецъ 3° приложеніемъ выводимыхъ такимъ образомъ слѣдствій къ другимъ отраслямъ математическаго Анализа. —

Когда, въ Соединительномъ Анализѣ, вещи или количества разсматриваются единственно въ отношеніи ихъ порядка или занимаемыхъ ими мѣстъ, то они называются *элементами* (*éléments*). Въ этомъ смыслѣ собраніе нѣсколькихъ элементовъ именуется *сложностію* (*complexion*, *σύνταξις*). Впрочемъ, элементы, подобно величинамъ алгебрическимъ, обозначаются буквами или цифрами.

Сложности называются *амбами*, *тернами*, *кватернами*, *кинами* и проч. смотря по числу элементовъ, входящихъ въ нихъ. Иногда принимаютъ въ соображеніе одинъ только элементъ, и, по аналогіи, называютъ такую сложность *одиночною* (*extrait*, Union). Также различаютъ сложности *съ повтореніемъ* (*à répétition*) и *безъ повторенія* (*sans répétition*). Послѣдними именуются такія, въ которыхъ каждый элементъ входитъ только одинъ разъ, какъ напримѣръ $adcptx$; напротивъ того, $abbhccc$ изображаетъ сложность съ повтореніемъ. Въ сложностяхъ съ повтореніемъ условились употреблять показателей, которые въ такомъ случаѣ и называются *показателями повторенія* (*exposans de répétition*, Wiederholungs-Exponenten), и очевидно не имѣютъ ничего общаго съ показателями, употребляемыми въ Алгебрѣ для означенія степеней. И такъ, предыдущая сложность может быть написана въ видѣ ab^2hc^3.

Подъ *указателемъ* (*indice*) ряда сложностей разумѣютъ совокупность элементовъ, изъ которыхъ эти сложности должны быть составлены. Указатель часто обозначаетъ нѣкоторый порядокъ относительно элементовъ, и мы называемъ сложность *порядочною* (*bien ordonnée, rite ordinata*, wohlgeordnet), когда элементы, входящіе въ нее, слѣдуютъ одинъ за другимъ въ порядкѣ, предписываемомъ указателемъ. Ежели элементы изображены буквами или цифрами, и нѣтъ собственно даннаго указателя, то сложность должно считать *порядочною*, когда элементы слѣдуютъ одни за другими въ алфавитномъ порядкѣ, или по порядку натуральныхъ чиселъ.

Въ Соединительномъ Анализѣ различаютъ три главныхъ рода соединеній элементовъ: 1) *переложеніе* или *перестановленіе* (*la permutation*); 2) собственно говоря *соединеніе* (*combinaison*); 3) *сочетаніе* или *соединительное измѣненіе* (*variation combinatoire*).

Переложеніе данной сложности состоитъ въ измѣненіи всѣми возможными образами мѣстъ ея элементовъ, такъ что каждая получаемая сложность заключаетъ всѣ элементы, какъ и первообразная, но только въ другомъ порядкѣ. Переложенія бываютъ 2-го, 3-го, 4-го ... класса, смотря по тому, будетъ ли сложность состоять изъ 2-хъ, 3-хъ, 4-хъ ..... элементовъ. Совокупность перестановленій какого ни есть класса обозначаютъ буквою P, поставленною передъ указателемъ, а надъ буквою P пишутъ нумеръ класса. Такъ напримѣръ $\overset{6}{P}(aabccc)$ означаетъ 6-ой классъ переложеній элементовъ a, a, b, c, c, c.

Подъ *сочетаніемъ* или *измѣненіемъ* (соединительнымъ) разумѣютъ всякое совокупленіе элементовъ, входящихъ въ составъ указателя, и вмѣстѣ съ тѣмъ такое, что элементы соединяются между собою по-два, по-три, и проч. всѣми возможными образами. И такъ, сочетанія распредѣляются также по *классамъ*, и подраздѣляются на сочетанія *съ повтореніемъ* и *безъ повторенія*. Сочетанія безъ повторенія обозначаются буквою V. Указатель пишется снизу, а нумеръ класса сверху. Если желаемъ означить сочетанія съ повтореніемъ, то надъ буквою V ставимъ знакъ тяжкаго ударенія.

Такъ напримѣръ $\underset{(a,b,c)}{\overset{2}{V}}$ изображаетъ совокупность сложностей ab, ac, ba, bc, ca, cb; а $\underset{(a,b,c)}{\overset{2}{V^{\backprime}}}$ совокупность сложностей aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc. Иногда разсматривается и *первый классъ* сочетаній.

Если отъ всѣхъ сочетаній данныхъ элементовъ отдѣлимъ порядочныя сложности, то сіи послѣднія составятъ *соединенія* тѣхъ же элементовъ. Знакъ соединеній n-го класса съ повтореніемъ есть слѣдующій: $\underset{(a,b,c....)}{\overset{n}{C^{\backprime}}}$; безъ повторенія: $\underset{(a,b,c...)}{\overset{n}{C}}$. И такъ, знакоположеніе $\underset{(a,b,c)}{\overset{2}{C^{\backprime}}}$ означаетъ совокупность сложностей aa, ab, ac, bb, bc, cc; а знакоположеніе $\underset{(a,b,c)}{\overset{2}{C}}$ слѣдующихъ: ab, ac, bc.

Если нужно означить только *число* переложеній, сочетаній или соединеній какого либо рода, то передъ присвоенными имъ знаками пишутъ буквы Ns (numerus specierum). И такъ, если, слѣдуя *Крампу*, изобразимъ чрезъ $m!$ произведеніе $1.2.3....m$, чрезъ $m^{n|d}$ (Смот. FACTORIELLE) произведеніе $m(m+d)(m+2d).....(m+(n-1)d)$, и чрезъ m_n биноміальный коэффиціентъ $(n+1)$-го члена, то для каждаго изъ приведенныхъ выше случаевъ, и для m элементовъ, получимъ слѣдующія формулы (Смот. предыдущую статью):

$$Ns\,.\,\overset{m}{P}(a,b,c,\ldots) = m!$$

$$Ns\,.\,\overset{m}{P^{\backprime}}(a^{\alpha},b^{\beta},c^{\gamma},\ldots) = \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots.}$$

$$Ns\,.\,\underset{(a,b,c,\ldots)}{\overset{n}{V}} = m^{n|-1} = (m-(n-1))^{n|1}$$

$$Ns\,.\,\underset{(a,b,c,\ldots)}{\overset{n}{V^{\backprime}}} = m^n$$

$$Ns\,.\,\underset{(a,b,c,\ldots)}{\overset{n}{C}} = \frac{m^{n|-1}}{n!} = m_n$$

$$Ns\,.\,\underset{(a,b,c\ldots)}{\overset{n}{C^{\backprime}}} = \frac{m^{n|1}}{n!} = (m+n-1)_n.$$

Когда указатель составленъ изъ численныхъ элементовъ 0, 1, 2, 3 и проч., то подъ наименованіемъ *сочетаній* или *соединеній опредѣленной суммы* (*variations, combinaisons de somme déterminée, complexiones numeri propositi*, Variationen oder Combinationen zu bestimmten Summen) разумѣютъ такія, въ которыхъ сумма элементовъ равна данному числу. Сочетанія и соединенія опредѣленной суммы m обозначаются чрезъ $^{m}\overset{n}{V}$, $^{m}\overset{n}{C}$, $^{m}\overset{n}{V^{\backprime}}$, $^{m}\overset{n}{C^{\backprime}}$.

Слѣдующее разложеніе выраженія ${}^{3}\overset{4}{V}_{(0,\,1,\,2,\,3)}$ послужитъ примѣромъ способа, который *Гинденбургъ* назвалъ *инволюціею* (*involution*) потому что способъ сей доставляетъ, сверхъ сложностей разсматриваемаго класса, всѣ сложности низшихъ классовъ, для коихъ сумма одинакова:

0	0	0	3
0	0	1	2
0	0	2	1
0	0	3	0
0	1	0	2
0	1	1	1
0	1	2	0
0	2	0	1
0	2	1	0
0	3	0	0
1	0	0	2
1	0	1	1
1	0	2	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	2	0	0
2	0	0	1
2	0	1	0
2	1	0	0
3	0	0	0

Прямые углы отдѣляютъ сложности низшихъ классовъ.

Очевидно, что правила, проистекающія изъ изслѣдованій такого рода, могутъ служить для разрѣшенія неопредѣленныхъ уравненій вида

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots\ldots + \mu = m$$
$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots\ldots + m\mu = n,$$

въ которыхъ m и n изображаютъ данныя числа, цѣлыя и положительныя, и гдѣ неизвѣстныя α, β, $\gamma \ldots \mu$ не могутъ имѣть другихъ значеній, какъ только 0, 1, 2, 3 и проч.

Віетъ, *Гарріотъ*, *Пасхаль*, *Мерсенъ*, *Лейбницъ*, *Вальисъ*, *Яковъ Бернулли* (во второй части своего сочиненія: *Ars conjectandi*), *Эйлеръ* (въ XIII томѣ *Commentariis Academiae Petropolitana*) и многіе другіе математики 16-го, 17-го и 18-го столѣтій занимались уже изслѣдованіями и задачами, относящимися къ теоріи соединеній; они предложили множество приложеній этой теоріи къ Исчисленію Вѣроятностей, заимствующему изъ ней опредѣленіе числа всѣхъ возможныхъ и всѣхъ благопріятныхъ случаевъ, а также къ доказательству различныхъ теоремъ изъ Анализа, какъ напримѣръ, разложеніе степени двучленнаго количества. *Гинденбургъ* (*Hindenburg*), Профессоръ Лейпцигскаго Университета, первый возъимѣлъ мысль соединить въ одно цѣлое все̂ то̂, что̂ относилось къ упомянутой теоріи; въ нѣсколькихъ сочиненіяхъ, изданныхъ имъ въ концѣ прошедшаго столѣтія, онъ положилъ основаніе Совокупительнаго Анализа. Изъ числа ревностныхъ сотрудниковъ и преемниковъ Гинденбурга, бо̂льшею частію Германскихъ математиковъ, были: *Эшенбахъ* (*Eschenbach*), *Ротъ* (*Rothe*), *Крампъ* (*Kramp*), *Пфафъ* (*Pfaff*), *Тибо* (*Thibaut*), *Швейнсъ* (*Schweins*), *Шталь* (*Stahl*), *Вейнгертнеръ* (*Weingärtner*) и многіе другіе, почти всѣ ученики его. Теорія, развитая Гинденбургомъ, и бывшая предметомъ постоянныхъ занятій Крампа, навела сего послѣдняго на выраженія особеннаго рода, которыя онъ назвалъ *совокупительными интегралами*; но истинная ихъ теорія предложена только въ 1820 году въ сочиненіи подъ заглавіемъ: *Theorie der combinatorischen Integrale*, математикомъ *Роте*, Профессоромъ въ Эрлангенѣ. Наименованіе совокупительныхъ интеграловъ замѣнили впослѣдствіи другимъ, болѣе свойственнымъ, и назвали ихъ *совокупительными аггрегатами* (*aggrégats combinatoires*).

Совокупительный аггрегатъ есть выраженіе вида $S[f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \ldots.)]$, изображающее сумму ряда, конечнаго или безконечнаго, коего общій членъ есть функція $f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots)$; изъ этой функціи составляются всѣ члены сказаннаго ряда чрезъ послѣдовательное подстановленіе на мѣсто нѣмецкихъ буквъ $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ …, именуемыхъ *совокупительными перемѣнными* (*variables combinatoires*), чиселъ: 0, 1, 2, 3 и проч. Если нѣтъ никакихъ особенныхъ условій, ограничивающихъ всеобщность величинъ сихъ перемѣнныхъ, то совокупительный аггрегатъ изобразитъ безконечный рядъ. Такъ напримѣръ уравненіе

$$F(x+h) = S\left[\frac{h^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}\,\frac{d^{\mathfrak{a}}Fx}{dx^{\mathfrak{a}}}\right] \text{ или } S\left[\frac{h^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}\,F^{(\mathfrak{a})}x\right],$$

гдѣ должно принять $0! = 1$ а $F^{(0)}x = Fx$, выражаетъ *Тайлорову* теорему при одной перемѣнной, а формула

$$Fx = S\left[\frac{F^{(\mathfrak{a})}0}{\mathfrak{a}!}\,x^{\mathfrak{a}}\right]$$

Маклоренов рядъ; подобнымъ образомъ уравненіе

$$F(x+h,\,y+k) = S\left[\frac{h^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}\cdot\frac{k^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!}\;\frac{d^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}F(x,y)}{dx^{\mathfrak{a}}dy^{\mathfrak{b}}}\right]$$

изображаетъ Тайлорову теорему, распространенную на случай двухъ перемѣнныхъ независимыхъ величинъ.

Если, напротивъ того, рядъ долженъ состоять изъ конечнаго числа членовъ, то есть, если величины $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и проч. не должны превышать нѣкоторый предѣлъ, то къ аггрегату необходимо присовокупить одно или нѣсколько *условныхъ уравненій*, которыя пишутся подъ самымъ аггрегатомъ. Напримѣръ, еслибы значеніе буквы $\mathfrak{a}$ не могло превышать 10, то такое условіе изобразили бы уравненіемъ $\mathfrak{a}+\mathfrak{m}=10$, гдѣ нѣмецкія буквы, въ настоящемъ случаѣ $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{m}$, не могутъ допускать иныхъ значеній, какъ только равныхъ нулю и числамъ цѣлымъ положительнымъ. Подобнымъ образомъ, еслибы требовалось выразить, что буква $\mathfrak{a}$ не можетъ быть менѣе извѣстнаго предѣла, напримѣръ 3-хъ, то стоило бы только написать уравненіе $\mathfrak{a}=\mathfrak{m}+3$, гдѣ уже $\mathfrak{m}$ можетъ принять всѣ значенія 0, 1, 2, 3 и проч.

Такъ, напримѣръ, формула *Нютоновой биноміи*, для показателя цѣлаго и положительнаго, выражается уравненіемъ

$$(a+b)^n = S\left[n_{\mathfrak{a}}a^{n-\mathfrak{a}}b^{\mathfrak{a}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n} \text{ или } S\left[\frac{n!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!}\,a^{\mathfrak{a}}b^{\mathfrak{b}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n},$$

гдѣ впрочемъ можно откинуть уравненіе $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n$, наблюдая что коэффиціентъ $n_{\mathfrak{a}}$ обращается въ нуль для $\mathfrak{a}>n$.

Равнымъ образомъ, разложеніе степени многочленнаго количества представляется въ видѣ:

$$(a+b+c+d+\ldots.)^n = S\left[\frac{n!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!\,\mathfrak{c}!\,\mathfrak{d}!\ldots}\,a^{\mathfrak{a}}b^{\mathfrak{b}}c^{\mathfrak{c}}d^{\mathfrak{d}}\ldots\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+\ldots=n.}$$

Чтобы предложить другаго рода примѣръ, положимъ въ предыдущей формулѣ $b=a_1x$, $c=a_2x^2$, $d=a_3x^3$ и проч., гдѣ подъ a_1, a_2, $a_3\ldots$ разумѣемъ какіе ни есть коэффиціенты; получимъ

$$(a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots.)^n$$
$$= S\left[\frac{n!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!\,\mathfrak{c}!\,\mathfrak{d}!\ldots}\,a^{\mathfrak{a}}(a_1x)^{\mathfrak{b}}(a_2x^2)^{\mathfrak{c}}(a_3x^2)^{\mathfrak{d}}\ldots.\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+\ldots=n}$$
$$= S\left[\frac{n!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!\,\mathfrak{c}!\,\mathfrak{d}!\ldots}\,a^{\mathfrak{a}}a_1^{\mathfrak{b}}a_2^{\mathfrak{c}}a_3^{\mathfrak{d}}\ldots.x^{\mathfrak{b}+2\mathfrak{c}+3\mathfrak{d}+\cdots}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+\ldots=n}$$

Чтобы соединить всѣ члены, заключающіе одну и ту же степень перемѣнной x, стоитъ только написать

$$(a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)^n = S\left[\frac{n!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!\,\mathfrak{c}!\ldots}\,a^{\mathfrak{a}}a_1^{\mathfrak{b}}a_2^{\mathfrak{c}}\ldots.x^{m}\right]_{\substack{\mathfrak{b}+2\mathfrak{c}+3\mathfrak{d}+\cdots=m\\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+\ldots=n.}}$$

Еслибы, напримѣръ, желали получить, независимо отъ другихъ членовъ, только коэффиціентъ предъ x^5 въ разложеніи $(a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4)^3$, то этотъ коэффиціентъ получился бы посредствомъ формулы

$$S\left[\frac{3!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!\,\mathfrak{c}!\,\mathfrak{d}!\,\mathfrak{e}!}\,a^{\mathfrak{a}}a_1^{\mathfrak{b}}a_2^{\mathfrak{c}}a_3^{\mathfrak{d}}a_4^{\mathfrak{e}}\right]_{\substack{\mathfrak{b}+2\mathfrak{c}+3\mathfrak{d}+4\mathfrak{e}=5\\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+\mathfrak{e}=3.}}$$

Рѣшеніе этихъ двухъ условныхъ уравненій приводитъ къ слѣдующимъ соотвѣтственнымъ величинамъ совокупительныхъ перемѣнныхъ:

$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{e}$
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
0	1	2	0	0
0	2	0	1	0

слѣдовательно, искомый коэффиціентъ предъ x^5 будетъ

$$\frac{3!}{1!\,0!\,1!\,1!\,0!}\,aa_2a_3+\frac{3!}{1!\,1!\,0!\,0!\,1!}\,aa_1a_4+\frac{3!}{0!\,1!\,2!\,0!\,0!}\,a_1a_2^2$$
$$+\frac{3!}{0!\,2!\,0!\,1!\,0!}\,a_1^2a_3 = 6aa_2a_3+6aa_1a_4+3a_1a_2^2+3a_1^2a_3.$$

Роте, въ приведенномъ выше сочиненіи, изложилъ весьма удовлетворительнымъ образомъ Исчисленіе совокупительныхъ аггрегатовъ, котораго и самое изобрѣтеніе, по справедливости, принадлежитъ ему. Такъ какъ этого рода Анализъ приводитъ всѣ дѣйствія надъ рядами, конечными или безконечными, какого угодно вида, къ вычисленію однихъ только общихъ членовъ сихъ рядовъ, то ясно, что такое пособіе должно быть весьма полезно какъ для практическихъ выкладокъ, такъ и для доказательства различныхъ разложеній, встрѣчающихся во многихъ аналитическихъ изслѣдованіяхъ.

Вотъ, для примѣра, такого рода доказательство *Нютоновой биноміи*, основанное на томъ свойствѣ, что когда n изображаетъ число цѣлое положительное, то $n_{p+1}=(n-1)_{p+1}+(n-1)_p$, $0_n=0$ а $0_0=1$.

$$S[n_{\mathfrak{a}}a^{n-\mathfrak{a}}b^{\mathfrak{a}}] = a^n + S[n_{\mathfrak{a}+1}a^{n-\mathfrak{a}-1}b^{\mathfrak{a}+1}]$$
$$= a^n + S[(n-1)_{\mathfrak{a}+1}a^{n-\mathfrak{a}-1}b^{\mathfrak{a}+1}] + S[(n-1)_{\mathfrak{a}}a^{n-\mathfrak{a}-1}b^{\mathfrak{a}+1}]$$
$$= S[(n-1)_{\mathfrak{a}}a^{n-\mathfrak{a}}b^{\mathfrak{a}}] + S[(n-1)_{\mathfrak{a}}a^{n-\mathfrak{a}-1}b^{\mathfrak{a}+1}]$$
$$= S[(n-1)_{\mathfrak{a}}a^{n-1-\mathfrak{a}}b^{\mathfrak{a}}(a+b)] = (a+b)S[(n-1)_{\mathfrak{a}}a^{n-1-\mathfrak{a}}b^{\mathfrak{a}}]$$
$$= \text{(точно такимъ образомъ) } (a+b)^2 S[(n-2)_{\mathfrak{a}}a^{n-2-\mathfrak{a}}b^{\mathfrak{a}}]$$
$$= (a+b)^3 S[(n-3)_{\mathfrak{a}}a^{n-3-\mathfrak{a}}b^{\mathfrak{a}}] = \ldots\ldots\ldots$$
$$= (a+b)^k S[(n-k)_{\mathfrak{a}}a^{n-k-\mathfrak{a}}b^{\mathfrak{a}}] = \ldots\ldots\ldots$$
$$= (a+b)^{n-1} S[1_{\mathfrak{a}}a^{1-\mathfrak{a}}b^{\mathfrak{a}}] = (a+b)^n.$$

Г. *Омъ (Ohm)*, Профессоръ Берлинскаго Университета, въ особенности способствовалъ своими трудами къ развитію и распространенію теоріи Рота, и обогатилъ ее примѣчательными приложеніями, изложенными въ издаваемомъ имъ сочиненіи: „Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik", котораго уже вышло семь частей.

COMBINER. (Анал.) **СОЕДИНЯТЬ, СОВОКУПЛЯТЬ.** Смот. выше. — *Combiner des équations entr'elles*; *соединять, совокуплять уравненія между собою.*

COMÈTE. (Астр.) **КОМЕТА.** (Отъ Греч. *χομη*, *волосы*). Свѣтлое, неясно и неправильно окраенное тѣло, на короткое время являющееся въ небѣ, и имѣющее собственное движеніе, подобное движенію планетъ.

Кометы отличаются отъ планетъ весьма слабо ограниченнымъ, неправильнымъ видомъ, большимъ эксцентрицитетомъ своихъ путей, имѣющихъ наклоненія къ эклиптикѣ отъ 0° до 180°, въ которыхъ онѣ движутся по всѣмъ возможнымъ направленіямъ: однѣ, отъ запада къ востоку, другія, отъ востока къ западу, иныя отъ юга къ сѣверу и т. д. — Сначала кометы являются въ видѣ туманныхъ свѣтлыхъ пятенъ. Разсматривая ихъ посредствомъ зрительныхъ трубъ, часто замѣчаютъ въ нихъ свѣтлое ядро, окруженное туманною оболочкою или атмосферою, которая современемъ принимаетъ видъ мычки, хвоста, воронки или опахала, обращенныхъ въ противную сторону солнца, и столь прозрачныхъ, что можно сквозь нихъ видѣть весьма ясно мерцаніе самыхъ малыхъ звѣздъ, несмотря на то, что эти мычки и опахалы, какъ наблюденія показываютъ, нетолько освѣщены солнцемъ, но еще имѣютъ по видимому свой собственный свѣтъ; они часто простираются на нѣсколько милліоновъ миль въ длину, и покрываютъ иногда большую часть неба. Наибольшая ихъ величина бываетъ вскорѣ послѣ прохожденія кометы чрезъ свой перигелій. —

По наружному виду, прежде кометы раздѣлялись на три класса: брадатыя, косматыя и съ хвостомъ; но это раздѣленіе несправедливо, потому что кометы бываютъ иногда безъ бороды космъ и хвоста. Въ новѣйшей Астрономіи разсматриваются три части кометы: *голова*, — широкая и блестящая масса тѣла, но весьма неясно ограниченная; *ядро* — самая свѣтлая и явственно окраенная часть кометы, находящаяся въ серединѣ головы; *хвостъ* — свѣтлая полоса, болѣе или менѣе широкая и длинная, выходящая изъ головы по направленію, противоположенному солнцу, и которая раздѣляется на многія отрасли. Часто кометы являются или безъ ядра, или безъ хвоста, а иногда безъ того и другаго.

Древніе имѣли весьма различныя, и, по-большей части ошибочныя понятія о кометахъ. Одни полагали, что кометы ничто иное, какъ свѣтъ солнца, отраженный къ землѣ отъ тверди небесной. Другіе думали, что кометы суть оптическія явленія, произведенныя свѣтомъ двухъ планетъ, находящихся въ соединеніи между собою; нѣкоторые полагали, что это души великихъ людей, парящія въ тріумфѣ. *Гераклидъ Понтійскій* утверждалъ, что кометы суть облака, освѣщенныя солнцемъ и другими планетами; *Ксенофонтъ* считалъ ихъ горящими облаками. *Аристотель* полагалъ, что кометы составляются изъ сухихъ горючихъ паровъ, извергаемыхъ вулканами изъ внутренности земной; эти пары, подымаясь въ верхніе слои атмосферы, сгущаются тамъ отъ скорости суточнаго вращенія около земли, воспламеняются и горятъ тѣмъ долѣе, чѣмъ больше находятъ питанія въ воздухѣ, или чѣмъ болѣе освобождается ихъ изъ земли. Кометы, по его мнѣнію, движутся въ ту сторону, гдѣ находятъ питаніе; онѣ могутъ изсушить воздухъ и произвести на землѣ бурю, засуху и наконецъ голодъ.

Однакожъ и въ самой древности были философы, особенно Пифагоровой секты, которые почитали кометы планетами, показывающимися весьма рѣдко и на короткое время, какъ Меркурій.

Анаксагоръ, Демокритъ и нѣкоторые другіе думали, что кромѣ семи планетъ, тогда извѣстныхъ, много есть такихъ, которыя, по причинѣ весьма малой величины, невидимы, но скопившись въ одну группу, и въ достаточномъ числѣ, дѣлаются видимыми, и составляютъ комету. *Аполлоній Мидійскій* полагалъ, что кометы не иное что, какъ планеты, удаляющіяся отъ земли на весьма великія разстоянія; онѣ бываютъ видимы тогда только, когда нисходятъ къ намъ по законамъ, имъ предписаннымъ, и пропадаютъ для насъ, когда возвращаются въ свою страну, или погружаются въ бездну эѳира. *Сенека* защищалъ это мнѣніе весьма краснорѣчиво, и подтверждалъ его доводами, какіе только могло доставить ему состояніе наукъ того времени, въ которое онъ жилъ; Сенека предсказалъ даже, что современемъ явится великій умъ, который откроетъ пути кометъ, опредѣлитъ ихъ величины и свойства.

Вскорѣ послѣ смерти Римскаго философа процвѣталъ въ Александріи знаменитый астрономъ *Клавдій Птолемей,* основатель системы міра съ твердыми и непроницаемыми небесами, которыя могли бы быть разбиты, еслибъ кометы двигались по всѣмъ направленіямъ въ безпредѣльномъ пространствѣ. Птолемей имѣлъ много учениковъ, которые, вмѣсто того чтобы самимъ испытывать природу, почитали Аристотелево и его ученіе непреложными, и всѣ познанія астрономическія почерпали въ ихъ сочиненіяхъ. Все что укрылось отъ познанія сихъ двухъ великихъ мужей, они объявили ложнымъ, смѣшнымъ и безбожнымъ, и такимъ образомъ истинныя понятія Аполлонія и Сенеки о кометахъ осудили на тысяча шесть сотъ лѣтнее молчаніе. Съ этого времени кометы почитались метеорами, или свѣтящимися явленіями въ земной атмосферѣ; по этому и не дѣлали надъ ними никакихъ астрономическихъ наблюденій, и, можетъ быть, никогда бы объ нихъ и не упомянули, еслибъ къ этому ложному понятію объ нихъ не присовокупилось слѣпое суевѣріе, что онѣ являются предвѣстницами великихъ народныхъ бѣдствій, или возвѣщаютъ близкую смерть какого либо Монарха.

Въ половинѣ 16 вѣка мнѣнія о кометахъ были столь различны и несообразны, что наконецъ знаменитѣйшіе астрономы рѣшились изучить свойство и природу сихъ тѣлъ посредствомъ собственныхъ наблюденій. *Регіомонтанъ* оставилъ намъ описаніе кометы 1472 года, въ которомъ означилъ при каждомъ наблюденіи мѣсто кометы. *Петръ Аппіанъ (Appian),* астрономъ Императора Карла V-го, наблюдалъ кометы съ 1531 до 1539 года, и замѣтилъ, что хвосты кометъ всегда имѣютъ направленіе, противоположенное солнцу, откуда заключилъ, что комета не горитъ, но что она есть тѣло плотное, отражающее солнечный свѣтъ. Знаменитый *Тихобрагъ,* наблюдая комету 1577 года, нашелъ, что 9 Ноября параллаксъ ея былъ 19′52″, а 26 Января 1578 года, онъ былъ не болѣе 2′, и изъ этого заключилъ, что комета была отъ земли далѣе чѣмъ луна, и потому не могла составиться изъ земныхъ паровъ; также, что она болѣе и болѣе удалялась отъ земли, и что слѣдовательно небеса не тверды, какъ допускали перипатетики. Основываясь на своихъ наблюденіяхъ, Тихобрагъ предположилъ, что солнце сообщаетъ движеніе кометамъ точно такъ, какъ и планетамъ своей системы, и что кометы двигаются около солнца въ кругѣ.

Наблюденія *Местлина, Корнелія Геммы, Христофа Роттмана* подтвердили, что кометы 1577, 1580, 1582, 1585, 1593 и 1596 были выше луны. — Но главное мнѣніе о кометахъ было тогда: что онѣ бываютъ двухъ свойствъ, *подъ-лунныя и надъ-лунныя.* Первыя суть метеоры, произведенныя испареніями земли, — вторыя происходятъ отъ сгущенія чистѣйшихъ частицъ небесной матеріи. — *Кеплеръ,* которому суждено было ускорить торжество истинной Астрономіи открытіемъ трехъ главнѣйшихъ законовъ природы, также наблюдалъ кометы 1607 и 1618 годовъ, и изложилъ въ своемъ сочиненіи *De cometis libelli tres* какъ собственныя наблюденія надъ этими кометами, такъ и вообще свое мнѣніе о сихъ небесныхъ тѣлахъ. Онъ довольно удачно объяснилъ явленія кометы 1607 г. посредствомъ прямолинейнаго движенія по касательной къ кругу съ увеличивающеюся скоростію, подобно частямъ касательной къ кругу, соотвѣтствующимъ равнымъ дугамъ; изъ этого онъ заключилъ, что кометы двигаются по прямой линіи. Что касается до происхожденія кометъ, то онѣ полагалъ, что онѣ составляются изъ небесной матеріи, которая не всегда чиста. Эта грубая матерія, потемняющая иногда свѣтъ солнца и звѣздъ, собирается въ видѣ сферической фигуры; солнце бросаетъ на нее свои лучи, которые, проходя сквозь нее, уносятъ часть ея матеріи, отъ чего образуется хвостъ кометы, который разсѣевается въ пространствѣ, и такимъ образомъ комета, такъ сказать выдыхая свой хвостъ, истребляется. *Гевеллій*, достойный ученикъ Кеплера, съ неутомимымъ тщаніемъ наблюдалъ и вычислилъ кометы 1652, 1661, 1664 и 1665 годовъ. Явленія кометы 1652 г. привели его къ изобрѣтенію новой системы кометъ. Онъ первый утверждалъ, что путь кометъ нѣсколько изогнутъ къ солнцу, но что онъ имѣетъ сходство съ параболою или гиперболою. *Дорфель*, наблюдавшій комету 1680 года, положительно утверждалъ, что ея орбита была параболическая, въ фокусѣ которой находилось солнце, и что всѣ кометы движутся въ подобныхъ орбитахъ. Наконецъ *Нютонъ*, творецъ физической Астрономіи, включилъ кометы въ число тѣлъ солнечной системы, повинующихся закону всеобщаго тяготѣнія, и показалъ весьма простой способъ опредѣлять ихъ пути. Такъ какъ кометы, по его системѣ, описываютъ весьма продолговатые эллипсы, и какъ онѣ бываютъ нами видимы только тогда, когда подходятъ близко къ солнцу, то Нютонъ предложилъ ту часть эллипса, которую комета описываетъ въ продолженіи своего явленія землѣ, разсматривать какъ часть параболы. Такое предположеніе позволительно, и весьма выгодно; дѣйствительно, часть продолговатаго эллипса, находящаяся близъ фокуса, весьма мало разнится отъ подобной части параболы, а вычисленіе параболическаго пути, какъ извѣстно, гораздо легче нежели вычисленіе орбиты эллиптической, и, сверхъ того, для эллипса находится безконечное множество видовъ, а для параболы только одинъ. По способу Нютона выбираютъ три наблюденія кометы, и изъ двухъ ложныхъ предположеній ищутъ положеніе параболы, которая удовлетворяла бы этимъ тремъ наблюденіямъ. Такимъ образомъ опредѣленная парабола представитъ приближенно истинный путь, по которому двигалась комета въ продолженіи своего явленія. Повѣрка этого способа весьма проста. Если опредѣленная теперь орбита есть истинная, то она должна представлять всѣ наблюденія, сколько бы ихъ сдѣлано ни было. По этому способу *Галлей*, другъ Нютона, вычислилъ пути 24 кометъ, и узналъ, что кометы 1682, 1607, 1531 и 1456 годовъ слѣдовали почти по одному и тому же пути; сверхъ того, такъ какъ промежутки времени, прошедшихъ между послѣдовательными явленіями этихъ кометъ были почти равны, то Галлей увѣрился, что это была одна и та же комета, и что ея возвращенія должно ожидать въ концѣ 1758 или въ началѣ 1759 г. Въ самомъ дѣлѣ, комета прошла чрезъ свой перигелій въ Мартѣ 1759 года. Ближайшее возвращеніе этой кометы въ 1835 году было вычислено *Понтекуланомъ*, *Дамуазо* и *Розенбергеромъ*. Первый нашелъ, что комета пройдетъ чрезъ свой перигелій 16, а второй, 7 Ноября.

Кромѣ этихъ кометъ видѣли еще много другихъ, и даже вычислили болѣе 140; но такъ какъ онѣ были видимы только въ весьма малой части своихъ путей, то весьма трудно, и даже невозможно, показать, хотя съ небольшею точностію, времена ихъ обращенія, которыя по большей части весьма продолжительны, и могутъ быть опредѣлены только послѣ вторичнаго явленія одной и той же кометы.

Доселѣ намъ извѣстны только четыре кометы, которыя, при возвратѣ ихъ, можемъ объявить уже бывшими на нашемъ горизонтѣ.

Первая изъ нихъ та, о которой мы сей-часъ упомянули. Она была наблюдаема уже пять разъ, и названа *Галлеевою кометою*. Время ея обращенія содержитъ 76 лѣтъ.

Вторая комета открыта *Ольберсомъ* 6 Марта 1815 года. *Бессель* нашелъ, что время ея обращенія содержитъ 74,049 года; она должна явиться въ 1887 году. Удивительно, что между кометами, прежде наблюденными, не нашлось ни одной, которая бы имѣла одинакіе элементы съ кометою Ольберса.

Третья комета открыта *Понсомъ (Pons)* 26 Ноября 1818 года. *Энке* нашелъ посредствомъ вычисленія, что она имѣетъ весьма короткое время обращенія, 3,315 года; она была уже наблюдаема 7 разъ: въ 1828, 1825, 1822, 1819, 1805, 1795 и 1786 годахъ, и названа кометою *Понсъ-Энке*. Замѣчательно, что время ея обращенія дѣлается короче.

Четвертую комету открылъ *Біелла* 27 Февраля 1826 г. и первый показалъ время ея обращенія, равное 6,74 года. Она была наблюдаема два раза: въ 1805 и 1772 годахъ, и названа *кометою Біеллы.*

Когда кометы приближаются къ планетамъ солнечной системы, то претерпѣваютъ отъ нихъ возмущеніе, которое должно вычислять другимъ образомъ, нежели взаимное возмущеніе планетъ, ибо, по причинѣ большаго эксцентрицитета ихъ путей, нельзя дѣлать тѣхъ сокращеній, которыя при планетахъ приносятъ большое удобство. Уже Галлею извѣстно было значительное дѣйствіе возмущеній на ту комету, которой онъ предсказалъ возвращеніе; отъ этихъ возмущеній послѣдующія времена обращенія разнились болѣе, нежели на цѣлый годъ. *Клеро,* основываясь на своемъ рѣшеніи задачи о трехъ тѣлахъ, нашелъ, въ 1758 году, что возвращеніе Галлеевой кометы къ перигелію, отъ дѣйствія Сатурна, замедлилось на 100 дней, а отъ дѣйствія Юпитера на 518 дней, и что она пройдетъ чрезъ свой перигелій 13 Апрѣля 1759 г. Еще значительнѣе были возмущенія отъ планетъ на комету, которая прошла чрезъ свой перигелій 13 Августа 1770 г. — *Лексель* нашелъ, что время обращенія ея равно $5\frac{1}{2}$ годамъ, и подробныя вычисленія *Букгардта* подтвердили этотъ выводъ; но не могли объяснить, отчего путь этой кометы не имѣетъ сходства ни съ однимъ изъ путей прежде наблюденныхъ и вычисленныхъ кометъ, и отчего она послѣ не явилась. *Лапласъ* нашелъ, что въ 1767 году, когда она была близка къ Юпитеру, путь ея, вѣроятно бывшій прежде весьма эксцентрическимъ, перемѣнился такъ, что время обращенія ея сдѣлалось $5\frac{1}{2}$ лѣтъ, и что ее опять увидѣли бы въ 1776 году, еслибъ она, во время прохожденія чрезъ перигелій, была надъ горизонтомъ ночью; и что потомъ, въ 1779 году, когда она во второй разъ проходила очень близко отъ Юпитера, путь ея опять перемѣнился въ весьма эксцентрическій, и потому она еще и теперь находится отъ насъ въ великомъ удаленіи. Эта комета, въ 1770 году, прошла почти чрезъ середину системы Юпитеровыхъ спутниковъ, и перваго Іюля того же года находилась отъ земли только въ шесть разъ далѣе луны; но она не произвела ни въ системѣ четырехъ спутниковъ, ни въ движеніи земли ни малѣйшаго возмущенія. Изъ этого можно заключить, что плотность кометъ вообще чрезвычайно мала, и что слѣдовательно, при меньшемъ еще ихъ разстояніи отъ земли, близость ихъ не должна причинять намъ никакого опасенія.

Вѣроятно, что пространство, которое отдѣляетъ тѣла нашей солнечной системы одно отъ другаго, наполнено чрезвычайно тонкою и прозрачною матеріею, и что тѣла въ этомъ эфирѣ движущіяся, претерпѣваютъ отъ него сопротивленіе. При планетахъ — тѣлахъ плотныхъ и твердыхъ — это сопротивленіе должно быть весьма незначительно, потому что до сихъ поръ никакія наблюденія надъ движеніемъ планетъ не показали существованія подобнаго сопротивленія; но кометы — тѣла чрезвычайно разширенныя, и состоящія изъ клочковатой ткани, безъ сомнѣнія претерпѣваютъ отъ этой средины гораздо бо́льшее сопротивленіе. Такого рода движеніе подвергли анализу, и нашли, что если средина имѣетъ весьма малую плотность, а путь кометы весьма малый эксцентрицитетъ, то большая ось эллипса всегда будетъ уменьшаться, а время обращенія кометы дѣлаться короче, между тѣмъ какъ угловая скорость ея будетъ возрастать. Отъ такого уменьшенія большой оси, комета безпрерывно должна приближаться къ солнцу, и наконецъ упасть на него. *Энке* въ самомъ дѣлѣ замѣтилъ уменьшеніе времени обращенія кометы, названной его именемъ, и этимъ самымъ заставилъ впредь обратить вниманіе на обстоятельство, которое прежде совершенно выпускали изъ виду.

Физики и астрономы изобрѣли разныя ипотезы для объясненія происхожденія кометныхъ хвостовъ. Предѣлы нашего Лексикона не позволяютъ намъ изложить ихъ даже въ сокращенномъ видѣ; ограничиваемся указаніемъ на главнѣйшія сочиненія, въ которыхъ можно почерпнуть обширныя познанія о кометахъ: *Pingré, Cométographie; Laplace, Mécanique céleste; Lagrange, Mécanique analytique; Olbers, Abhandlung über die leichteste und bequemste Art, die Bahn eines Cometen* etc. *Delambre, Astronomie; Bode, Considérations générales sur les orbites des planètes et des comètes; Schubert, Astronomie; Littrow, Astronomie;* die Wunder des Himmels;

Arago, Annuaire du bureau des longitudes 1832; Olbers, Kometen-Verzeichniß и пр.

COMÉTOGRAPHIE. КОМЕТОГРАФІЯ. Отрасль Астрономіи, занимающаяся описаніемъ кометъ. Смот. предыдущую статью.

COMMENSURABILITÉ. (Ариѳ. и Геом.) **СОИЗМѢРИМОСТЬ.** Смот. ниже.

COMMENSURABLE. (Ариѳ. и Геом.) **СОИЗМѢРИМЫЙ.** *Соизмѣримыми величинами* называются такія, которыя имѣютъ общую мѣру. См. MESURE, INCOMMENSURABLE. И такъ, числа 9 и 15 *соизмѣримы* между собою, ибо каждое изъ нихъ дѣлится безъ остатка на 3, и это число будетъ общею ихъ мѣрою. Аршинъ и Россійскій (Англійскій) футъ также *соизмѣримы*, потому что имѣютъ общую мѣру, именно, дюймъ; дѣйствительно, аршинъ заключаетъ въ себѣ 28 дюймовъ, а футъ, 12. — Всѣ цѣлыя числа соизмѣримы между собою, и за общую ихъ мѣру можно принимать *единицу*. Напротивъ того, $\sqrt{2}$ будетъ величина несоизмѣримая относительно всякаго цѣлаго числа или дроби, у которой какъ числитель такъ и знаменатель, цѣлыя числа.

C o m m e n s u r a b l e e n p u i s s a n c e. С о и з м ѣ р и м ы й в ъ с т е п е н и, в ъ к в а д р а т ѣ. См. BIMÉDIAL.

N o m b r e s s o u r d s c o m m e n s u r a b l e s. И р р а ц і о н а л ь н ы я, г л у х і я ч и с л а с о и з м ѣ р и м ы я м е ж д у с о б о ю. Такія числа, коихъ взаимное отношеніе опредѣляется дробью раціональною. См. RATIONNEL, IRRATIONNEL. Таковы количества $5\sqrt{5}$ и $2\sqrt{5}$, которыя содержатся одно къ другому какъ 5 къ 2.

Дроби, у которыхъ числитель и знаменатель цѣлыя числа, должны также быть принимаемы за соизмѣримыя; дѣйствительно, одна изъ нихъ будетъ относится къ другой, такъ какъ цѣлое число къ другому, также цѣлому. Напримѣръ, дроби $\frac{5}{7}$ и $\frac{4}{5}$ относятся первая ко второй, какъ 25 къ 28.

COMMOTION ÉLECTRIQUE. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ СОТРЯСЕНІЕ, электрическій ударъ.

COMMUN. (Геом.) **ОБЩІЙ.** Когда уголъ, линія, площадь и проч. принадлежатъ въ одно время двумъ фигурамъ, то говорится, что тотъ уголъ, та линія, та площадь *общіе* имъ обѣимъ. Напримѣръ: *deux triangles ayant un côté commun; два треугольника имѣющіе общую сторону.* — Посредствомъ *общихъ* частей часто доказываютъ равенство площадей двухъ различныхъ фигуръ, напримѣръ, въ квадратурѣ *Гиппократовыхъ луночекъ.* См. LUNULE. — Въ Ариѳметикѣ и Алгебрѣ: *commun diviseur, общій дѣлитель.* Смот. DIVISEUR.

COMMUNICATION DE MOUVEMENT. (Мех.) **СООБЩЕНІЕ ДВИЖЕНІЯ.** При взаимномъ соудареніи тѣла сообщаютъ движеніе одно другому, и, послѣ удара, движеніе ихъ перемѣняется. Что касается до законовъ, по которымъ происходитъ сообщеніе движенія, то отсылаемъ читателей къ статьѣ CHOC.

COMMUNIQUANS (VASES, TUBES, TUYAUX). СООБЩИТЕЛЬНЫЕ СОСУДЫ, ТРУБКИ, ТРУБЫ.

COMMUTATION (ANGLE DE). (Астр.) **УГОЛЪ ИЗМѢНЕНІЯ.** Смот. ANGLE.

COMMUTATIVES (FONCTIONS). (Анал.) **ОБМѢННЫЯ ФУНКЦІИ.** Такъ назвалъ Г. *Сервуа* (*Servois*) [Смот. *Annales de Mathématiques*, Tome V] двѣ функціи f и F такого свойства, что

$$F[\mathrm{f}(u)] = \mathrm{f}[F(u)],$$

разумѣя подъ u какое ни есть количество. И такъ, извѣстныя формулы

$$d\Delta u = \Delta du,\quad d\Sigma u = \Sigma du$$

представляютъ примѣры *обмѣнныхъ функцій.*

Тотъ же математикъ называетъ *распредѣлительными функціями (fonctions distributives)* такія, которыя опредѣляются формулою

$$F(u+v) = F(u) + F(v),$$

гдѣ u и v изображаютъ какія ни есть количества. Таковы напримѣръ извѣстныя формулы изъ Исчисленія Разностей

$$\Delta(u+v) = \Delta u + \Delta v,\quad \Sigma(u+v) = \Sigma u + \Sigma v.$$

Читатели могутъ найти въ Разсужденіи Г-на Сервуа, помѣщенномъ какъ мы уже сказали выше въ *Annales de Mathématiques* Tome V, приложенія сихъ двухъ родовъ функцій къ разнымъ статьямъ Дифференціальнаго и Интегральнаго Исчисленія.

COMPAGNE DE LA CYCLOIDE, PETITE CYCLOIDE, TROCHOIDE. (Геом.) **СПУТНИЦА ЦИКЛОИДЫ, МАЛАЯ ЦИКЛОИДА, ТРО-**

ХОИДА. Трансцендентная кривая, слѣдующаго образованія: пусть будетъ кругъ $AFGH$ (черт. 7 листъ IV), AF его діаметръ, и C его центръ. Если каждую ординату pn круга продолжимъ, и возьмемъ pm равнымъ дугѣ An, то точка m будетъ принадлежать *трохоидѣ*; такимъ образомъ получится кривая линія вида $DLAKE$. Прямая DE очевидно равная окружности круга производящаго $AFGH$, называется *основаніемъ* трохоиды.

Чтобы вывести уравненіе трохоиды, положимъ $CA = r$, $Ap = x$, $pm = y$; такъ какъ по самому опредѣленію этой кривой $pm = y =$ *дугѣ* An, то надлежитъ найти выраженіе для дуги An. Если изобразимъ уголъ ACn чрезъ φ, то получимъ

$$\text{дуга } An = r\varphi \quad \text{и} \quad r - x = r \operatorname{Cos} \varphi;$$

слѣдовательно

$$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{Cos} \frac{r-x}{r},$$

и наконецъ

$$y = r . \operatorname{arc} \operatorname{Cos} \frac{r-x}{r} \quad \text{или} \quad x = r - r \operatorname{Cos} \frac{y}{r}.$$

Вотъ уравненіе *трохоиды* въ прямоугольныхъ координатахъ. Легко усмотрѣть изъ него, что въ точкахъ K и L кривая изъ вогнутаго состоянія переходитъ въ выпуклое, и слѣдовательно, что K и L суть точки изгиба. Смот. INFLEXION (POINT D').

Чтобы получить площадь, заключающуюся между діаметромъ AF, полу-основаніемъ FE, и частію AKE трохоиды, стоитъ только взять интегралъ $\int y dx = r \int \operatorname{arc} \operatorname{Cos} \frac{r-x}{r} \cdot dx$ между предѣлами $x = 0$ и $x = 2r$ (Смот. AIRE); интегрируя по частямъ, найдемъ

$$r \int \operatorname{arc} \operatorname{Cos} \frac{r-x}{r} \cdot dx = r^2 \sqrt{1 - \left(\frac{r-x}{r}\right)^2} - r(r-x) \operatorname{arc} \operatorname{Cos} \frac{r-x}{r};$$

если же возьмемъ этотъ интегралъ отъ $x = 0$ до $x = 2r$, то получимъ для искомой площади полу-трохоиды выраженіе

$$r^2 . \operatorname{arc} \operatorname{Cos}(-1) = \pi r^2.$$

И такъ, *полная площадь трохоиды $DLAKEF$ равна удвоенной площади круга производящаго $AFGH$.*

Что касается до пространства $ACKmA$, то легко видѣть, что оно сплощадимо; и дѣйствительно, для полученія его, стоитъ только предыдущій интегралъ взять между предѣлами $x = 0$ и $x = r$, и тогда получимъ просто r^2. Слѣдовательно, *площадь $ACKmA$ равна квадрату, построенному на радіусѣ круга производящаго.*

Такъ какъ *трохоида*, по своему образованію, имѣетъ большое сходство съ *циклоидою*, то для сличенія сихъ двухъ кривыхъ отсылаемъ читателей къ статьѣ: CYCLOIDE.

COMPAGNIE (RÈGLE DE) или **RÈGLE DE SOCIÉTÉ.** (Алг.) **ПРАВИЛО ТОВАРИЩЕСТВА.** Это правило имѣетъ предметомъ раздѣленіе даннаго числа на части, пропорціональныя даннымъ числамъ. Его названіе произошло отъ того, что въ задачахъ, относящихся къ нему, обыкновенно требуется раздѣлить прибыль или убытокъ между нѣсколькими купцами, или *товарищами* по торгу, положившими различные капиталы для совершенія какого либо торговаго оборота.

Обыкновенныя задачи, относящіяся къ правилу товарищества, приводятъ къ рѣшенію уравненій первой степени или къ пропорціямъ. Напримѣръ:

n купцовъ заключили между собою общій торгъ, и составили капиталъ c; первый положилъ сумму a', второй a'', третій a''', и такъ далѣе. Этотъ капиталъ принесъ чистой прибыли сумму b; спрашивается, какую часть каждый купецъ долженъ получить изъ суммы b?

Означивъ чрезъ x', x'', x'''.... эти части, и замѣтивъ что онѣ должны быть соотвѣтственно пропорціональны суммамъ a', a'', a''',... очевидно получимъ уравненія

$$a' + a'' + a''' + \ldots = c, \quad x' + x'' + x''' + \ldots = b,$$

$$\frac{x'}{a'} = \frac{x''}{a''} = \frac{x'''}{a'''} = \ldots\ldots = \frac{x' + x'' + x''' + \ldots\ldots}{a' + a'' + a''' + \ldots\ldots} = \frac{b}{c};$$

слѣдовательно

$$x' = \frac{ba'}{c}, \quad x'' = \frac{ba''}{c}, \quad x''' = \frac{ba'''}{c} \ldots\ldots$$

Но когда время обращенія вкладочныхъ суммъ предполагается не одинаковымъ для всѣхъ вкладчиковъ, и сверхъ того принимаютъ въ соображеніе сложные проценты, то задача дѣлается гораздо сложнѣе, и рѣшеніе ея уже зависитъ отъ опредѣленія корня уравненія высшей степени. Правило, служащее для рѣшенія такого рода задачъ, называется *правиломъ товарищества съ расчётомъ времени (règle de compagnie à temps).* Вотъ примѣръ:

Два купца, для совершенія извѣстнаго торговаго оборота, составили капиталъ положивъ съ самаго начала: первый, сумму a', а второй, b'; по истеченіи одного года, первый купецъ внесъ въ общій капиталъ сумму a''; по истеченіи двухъ лѣтъ, второй купецъ положилъ сумму b''; по истеченіи трехъ лѣтъ, вклады купцовъ были: перваго a''', а втораго, b'''. Въ концѣ четвертаго года оказалось, что чистая прибыль отъ сего предпріятія равна суммѣ d; спрашивается, сколько приходится на долю каждаго изъ двухъ купцовъ?

Для рѣшенія этого вопроса со всею строгостію, надлежитъ опредѣлить настоящее значеніе каждой изъ суммъ a', b', a'' и проч. то есть, разсматривать эти суммы со дня поступленія ихъ въ общій капиталъ, до дня раздѣла прибыли. Слѣдовательно, каждый изъ вкладовъ долженъ быть разсматриваемъ, какъ еслибъ онъ былъ внесенъ для обращенія изъ процентовъ съ присовокупленіемъ ихъ къ капиталу; такса же процентовъ, зависящая отъ прибыли, должна быть одинакова для обоихъ вкладчиковъ. Пусть будетъ x эта такса. Такъ какъ суммы a' и b' обращаются четыре года, то, по прошествіи этого времени, онѣ должны доставить соотвѣтственно (Смот. INTÉRÊT)

$$(A) \qquad a'[(1+x)^4-1]$$

$$(B) \qquad b'[(1+x)^4-1];$$

сумма a'', обращающаяся три года, доставитъ

$$(A') \qquad a''[(1+x)^3-1];$$

сумма b'', обращающаяся два года, доставитъ

$$(B') \qquad b''[(1+x)^2-1];$$

наконецъ, суммы a''', b''', обращающіяся одинъ годъ, доставятъ соотвѣтственно

$$(A'') \qquad a'''[(1+x)-1]=a'''x$$

$$(B'') \qquad b'''[(1+x)-1]=b'''x.$$

Сложивъ величины (A), (A') и (A''), получимъ долю перваго купца, а сумма величинъ (B), (B') и (B'') изобразитъ долю втораго. Но такъ какъ полная прибыль равна d, то и найдется уравненіе

$$(1) \quad (a'+b')[(1+x)^4-1]+a''[(1+x)^3-1] + b''[(1+x)^2-1]+(a'''+b''')x=d.$$

Вотъ уравненіе 4-ой степени, опредѣляющее x. Когда найдемъ изъ него величину x, то доли купцовъ въ прибыли будутъ соотвѣтственно:

$$a'[(1+x)^4-1]+a''[(1+x)^3-1]+a'''x$$

$$b'[(1+x)^4-1]+b''[(1+x)^2-1]+b'''x$$

Если въ рѣшенной сей-часъ задачѣ, не будемъ принимать въ расчетъ сложныхъ процентовъ (что обыкновенно и дѣлаютъ), то рѣшеніе упрощается значительнымъ образомъ, и вопросъ приводится къ уравненію первой степени. Дѣйствительно, тогда, вмѣсто членовъ $a'[(1+x)^4-1]$, $b'[(1+x)^4-1]$, $a''[(1+x)^3-1]$, ... войдутъ величины $4a'x$, $4b'x$, $3a''x$, ... и уравненіе (1) приметъ видъ

$$4(a'+b')x+3a''x+2b''x+(a'''+b''')x=d,$$

изъ котораго выведемъ

$$x=\frac{d}{4(a'+b')+3a''+2b''+a'''+b'''};$$

слѣдовательно, доли купцовъ будутъ:

$$\frac{(4a'+3a''+a''')d}{4(a'+b')+3a''+2b''+a'''+b'''},$$

$$\frac{(4b'+2b''+b''')d}{4(a'+b')+3a''+2b''+a'''+b'''}.$$

Сказанное нами о *правилѣ товарищества* достаточно для того, чтобы читатели видѣли, какимъ образомъ поступать при рѣшеніи задачъ болѣе сложныхъ, относящихся къ тому же правилу; но для полнаго уразумѣнія сего предмета, необходимо прочитать всю статью INTÉRÊT.

COMPAGNIES D'ASSURANCES. Смот. ASSURANCES.

COMPARAISON. СРАВНЕНІЕ, СЛИЧЕНІЕ. *La comparaison de ces deux équations nous montre que* и проч. *Изъ сличенія сихъ двухъ уравненій, видимъ, что* и пр. *La comparaison de ces deux figures conduit à la conséquence* и проч. *Сравненіе сихъ двухъ фигуръ приводитъ къ заключенію* и проч.

COMPARER. СРАВНИВАТЬ, СЛИЧАТЬ. *En comparant ces deux figures, ces deux triangles, on voit .... Сличая эти двѣ формулы, сравнивая эти два треугольника, видимъ......*

COMPAS. (Геом.) **ЦИРКУЛЬ; КРУЖАЛО.** Инструментъ служащій для черченія круговъ и для измѣренія линій. Изобрѣтеніе циркуля приписываютъ *Талаю*, племяннику *Дедала*, извѣстнаго въ баснословныя времена Греціи устроеніемъ Критскаго лабиринта. — Нѣтъ никакого сомнѣнія, что мысль объ инструментѣ столь простомъ, каковъ циркуль, должна принадлежать временамъ, въ которыя родились первоначальныя геометрическія соображенія, и слѣдовательно, давность сего изобрѣтенія сливается съ началомъ самой Геометріи. — Приведемъ здѣсь названія нѣкоторыхъ родовъ циркулей, которые были, или еще и теперь въ употребленіи.

COMPAS A TROIS BRANCHES. Циркуль о трехъ ножкахъ. Циркуль, посредствомъ котораго переносятъ разомъ три точки, или, что̀ всё равно, треугольникъ съ одного листа бумаги на другой.

COMPAS A VERGE. Циркуль съ полосою, служащій для черченія большихъ круговъ и измѣренія линій, значительной длины.

COMPAS D'ARTISAN или COMPAS A ARC. Циркуль съ дугою, кружало; употребляется ремесленниками для вырѣзыванія круговъ на картузной бумагѣ, на мѣдныхъ листахъ, на жести, на деревѣ и проч.

COMPAS A L'ALLEMANDE. Нѣмецкій циркуль; кривой, кронъ-циркуль; циркуль съ ножками нѣсколько вогнутыми.

COMPAS A POINTES CHANGEANTES. Циркуль съ выдвижными ножками. Такъ называется циркуль, у котораго одна ножка вынимается, и можетъ быть замѣнена другими.

COMPAS A RESSORT. Циркуль съ пружиною, служащій для измѣренія малыхъ линій.

COMPAS A POINTES TOURNANTES. Циркуль съ тремя ножками. Обыкновенный циркуль съ тою только разницею, что одна изъ трехъ ножекъ оканчивается трубочкой для карандаша, а другая, чертежнымъ перомъ.

COMPAS DE PROPORTION. Геометрическая шкала; пропорціональный циркуль. Англичане называютъ этотъ инструментъ *секторомъ*. Онъ состоитъ изъ двухъ равныхъ линеекъ (обыкновенно мѣдныхъ), соединенныхъ однимъ концомъ посредствомъ шарнера, около котораго линейки могутъ обращаться. На линейкахъ начерчены разныя линіи, изъ коихъ главныя суть: *линія равныхъ частей, линія хордъ, линія синусовъ, тангенсовъ* и *секансовъ, линія многоугольниковъ, линія калибровъ орудій, вѣсъ ядеръ* и пр. Подробное описаніе пропорціональнаго циркуля и употребленія его читатели найдутъ въ *Encyclopédie métodique, Mathématiques*, статья: COMPAS DE PROPORTION.

Нѣкоторые авторы приписывали изобрѣтеніе пропорціональнаго циркуля Нѣмецкому математику *Юсту Биргу (Juste Byrge)*; но, какъ замѣчаетъ *Монтюкла* въ своей *Histoire des Mathématiques*, инструментъ, изобрѣтенный Биргомъ, былъ циркуль совсѣмъ другаго рода, и служилъ только для раздѣленія линій на равныя части. Онъ состоялъ изъ двухъ линеекъ, соединенныхъ между собою посредствомъ шарнера, и обращающихся около него въ видѣ креста. Отъ передвиженія этого шарнера, отверстія линеекъ, снабженныхъ на концахъ своихъ остріями, получали желаемыя отношенія, напримѣръ, разстоянія между двумя верхними шпильками могло равняться $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ и проч. линіи, измѣряемой нижними остріями линеекъ. Кажется, изобрѣтателемъ пропорціональнаго циркуля можно почитать *Галилея*, который, въ 1607 году, издалъ трактатъ объ употребленіи сего инструмента; заглавіе этого сочиненія: *Operazioni del compasso geometrico è militare*. Сіе изобрѣтеніе подало поводъ къ жаркому пренію между Галилеемъ и Неаполитанцемъ *Балтазаромъ Капра*. Послѣдній, въ изданномъ имъ сочиненіи на Латинскомъ языкѣ подъ заглавіемъ: *Balthasaris Capra, usus et fabrica circini proportionum* (1607 in-4°), того же года и о томъ же предметѣ, приписывалъ себѣ открытіе упомянутаго инструмента. Читатели могутъ найти домогательства обѣихъ сторонъ по сему спору въ третьемъ томѣ сочиненій Галилея.

COMPAS A COULISSE, или COMPAS DE RÉDUCTION. Циркуль съ пазами, циркуль для уменьшенія размѣровъ. Инструментъ, изобрѣтенный *Юстомъ Биргомъ*, и служащій для раздѣленія линій на равныя части, для вписанія въ кругѣ правильныхъ многоугольниковъ и проч. Смот.-выше.

COMPAS DE RÉDUCTION AVEC LES LIGNES DU COMPAS DE PROPORTION. Циркуль съ пазами, строеніемъ своимъ нѣсколько совершеннѣе предыдущаго, и на которомъ начерчены нѣкоторыя изъ линій, помѣщаемыхъ на пропорціональномъ циркулѣ.

COMPAS SPHÉRIQUE или D'ÉPAISSEUR. Вогнутый циркуль, шаромѣръ, крумъ-циркуль. — Бомбомѣръ, Ядромѣръ. Циркуль, посредствомъ котораго измѣряются діаметры бомбъ, ядеръ, трубъ, калибры орудій и проч.

COMPAS ÉLLIPTIQUES. Эллиптическіе циркули. Циркули употребляемые для черченія эллипсовъ.

Compas de trissection. Особаго рода циркуль, служащій для раздѣленія угла на три равныя части. Этотъ инструментъ придуманъ Г. *Таррагономъ (Tarragon)*. Читатели найдутъ описаніе его въ *Journal des Savants* за 1688 годъ въ Сентябрьской книжкѣ и въ *Dictionnaire universel de Mathématique et de Physique, par M. Saverien* (Paris 1753), 1-ый Том. стр. 199.

COMPAS DE MER или **COMPAS DE ROUTE. КОМПАСЪ, СТАВОКЪ, МАТКА.** Смот. BOUSSOLE.

Compas de variation. Компасъ измѣненія. Обыкновенный компасъ снабженный алидадою съ діоптрами, и посредствомъ котораго опредѣляютъ измѣненія въ направленіи магнитной стрѣлки.

Compas azimutal. Азимутальный компасъ. Компасъ измѣненія, но въ которомъ, для большей точности, сверхъ компаснаго кружка съ румбами вѣтровъ, находится мѣдный кругъ, раздѣленный на градусы, а иногда и на части градуса. Посредствомъ азимутальнаго компаса находимъ магнитный азимутъ какого либо свѣтила, напримѣръ солнца, а чрезъ сравненіе магнитнаго съ земнымъ азимутомъ, опредѣляемъ измѣненіе компаса. Изобрѣтеніе этого инструмента принадлежитъ *Галлею*. Для подробностей объ этомъ предметѣ отсылаемъ читателей къ трактатамъ о Навигаціи и къ Морскимъ Словарямъ.

COMPENSATEUR или **PENDULE A COMPENSATION. УРАВНИТЕЛЬНЫЙ, ПОСТОЯННЫЙ, НЕИЗМѢННЫЙ МАЯТНИКЪ, КОНПЕНСАТОРЪ.** Маятникъ не подверженный вліянію температуры; этотъ приборъ придуманъ въ 1730 году извѣстнымъ Англійскимъ механикомъ *Гаррисономъ*.

Всѣ тѣла, отъ дѣйствія тепла расширяются, а отъ холода сжимаются. И такъ, въ первомъ случаѣ, обыкновенный часовой маятникъ дѣлается длиннѣе, и слѣдовательно качанія его замедляются, а во второмъ, напротивъ того, они ускоряются. Для отвращенія этой причины неправильности хода часовъ, придумали устраивать *постоянные маятники*, то есть такіе, въ которыхъ разстояніе центра качанія отъ оси привѣшанія не измѣняется, какова бы ни была температура окружающаго воздуха.

Для достиженія этой цѣли, обыкновенно дѣлаютъ маятники изъ нѣсколькихъ металлическихъ прутьевъ, причемъ употребляютъ металлы различной расширяемости, обыкновенно желѣзо и мѣдь. Снарядъ устраиваютъ такъ, чтобы при удлинненіи маятника отъ увеличенія температуры, чечевица поднималась, а съ укороченіемъ его отъ пониженія температуры, чечевица опускалась; если, при такомъ устроеніи, центръ качанія маятника съ перемѣною температуры не будетъ перемѣнять своего разстоянія отъ оси привѣса, то качанія будутъ равновременны, и слѣдовательно получится неизмѣнный маятникъ.

Стеклянная трубка, въ которую налито извѣстное количество ртути, можетъ также служить уравнительнымъ маятникомъ. Дѣйствительно, стеклянная трубка будетъ удлинняться отъ теплоты и укорачиваться отъ холода; но между тѣмъ ртуть, заключающаяся въ нижней части трубки, расширяется или сжимается въ большемъ содержаніи противъ стекла, и въ противную сторону; слѣдовательно, центръ качанія прибора будетъ опускаться отъ одной причины, а подыматься отъ другой, и легко понять, что соразмѣряя надлежащимъ образомъ количество ртути, достигнемъ наконецъ до того, что центръ качанія прибора останется неизмѣннымъ, и тогда получимъ маятникъ, не подверженный уже вліянію температуры.

Уравнительные маятники употребляются преимущественно въ астрономическихъ часахъ и карманныхъ хронометрахъ; но такъ какъ въ сихъ послѣднихъ маятникъ круглый, и приводится въ движеніе спиральнымъ волоскомъ, то описанное выше устроеніе уравнителя должно быть нѣсколько измѣнено. Читатели найдутъ въ курсахъ Физики по этому предмету желаемыя подробности, которыя, по свойству нашего Лексикона, не могутъ быть предложены въ немъ.

COMPENSATION. Смот. выше.

COMPLANATION DES SURFACES, то же что QUADRATURE DES SURFACES (Смот.).

COMPLÉMENT. ДОПОЛНЕНІЕ. Такъ называется вообще величина, которая будучи приложена къ другой, составляетъ одно, какое нибудь условное цѣлое. И такъ это слово заключаетъ въ себѣ понятіе относительное.

Complément arithmétique. Ариѳметическое дополненіе. Когда вычтемъ какое нибудь цѣлое число N изъ другаго, выраженнаго единицею съ столькими нулями, сколько N содержитъ въ себѣ цыфръ, то получимъ разность, которая называется *ариѳметическимъ дополненіемъ* даннаго числа N. Такъ напримѣръ, ариѳметическое дополненіе числа 5397 будетъ 4603, ибо $10000 - 5397 = 4603$. Употребленіе ариѳметическихъ дополненій сокращаетъ численныя выкладки тѣмъ, что *вычитанія* замѣняются *сложеніями*.

Complément d'une fraction. Дополненіе дроби. Разность между единицею, и предложенною дробью, которая предполагается правильною. Напримѣръ, дополненіе дроби $\frac{5}{7}$ есть $\frac{2}{7}$ потому что $1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$.

Complément d'un logarithme. Логариѳмическое дополненіе, дополненіе логариѳма. Логариѳмическимъ дополненіемъ числа называется логариѳмъ числа ему обратнаго. Обратными числами именуются такія, коихъ произведеніе равно единицѣ. Напримѣръ $\frac{7}{11}$ и $\frac{11}{7}$ суть *числа обратныя*, ибо $\frac{7}{11} \times \frac{11}{7} = 1$. И такъ дополненіе логариѳма какого угодно числа a, будетъ равняться логариѳму дроби $\frac{1}{a}$. Означивъ чрезъ L логариѳмъ, а чрезъ L' дополненіе логариѳма, получимъ $L'(a) = L\left(\frac{1}{a}\right) = -L(a)$, слѣдовательно также $L\left(\frac{b}{a}\right) = L(b) + L'(a)$. Положимъ напримѣръ, что ищемъ дополненіе $L(54321)$; будетъ $L(54321) = 4{,}7349678$; слѣдовательно $L'(54321) = -4{,}7349678 = -5 + (1 - 0{,}7349678) = -5 + 0{,}2650322$. Это дополненіе обыкновенно пишется такъ: $\bar{5}{,}2650322$; знакъ $-$, поставленный надъ характеристикой, относится только къ ней, а десятичная дробь удерживаетъ положительный знакъ. И такъ, еслибы требовалось опредѣлить логариѳмъ дроби $\frac{100000}{54321}$, то, въ силу сказаннаго выше, имѣли бы

$$L\left(\frac{100000}{54321}\right) = L(100000) + L'(54321) = 5 + \bar{5}{,}2650322$$
$$= 0{,}2650322.$$

Употребленіе логариѳмическихъ дополненій, какъ видно изъ приведеннаго примѣра, представляетъ ту выгоду что вычитаніе десятичныхъ дробей приводится къ ихъ *сложенію*.

Complément arithmétique d'un logarithme. Ариѳметическое дополненіе логариѳма. Разность между какимъ ни есть цѣлымъ числомъ, напримѣръ 10-ю, и даннымъ логариѳмомъ. И такъ, ариѳметическое дополненіе логариѳма $L(54321) = 4{,}7349678$, равняется $10 - 4{,}7349678 = 5{,}2650322$. Смот. Complément arithmétique.

COMPLÉMENT. (Геом.) **ДОПОЛНЕНІЕ.** *Complément d'un angle* или *d'un arc*. *Дополненіе угла* или *дуги*. Избытокъ прямаго угла или 90^0 предъ даннымъ угломъ или дугою. Напримѣръ, дополненіе угла или дуги въ 36^0 есть уголъ въ 54^0, ибо $90^0 - 36^0 = 54^0$. — Въ стоградусномъ дѣленіи, *дополненіе угла* есть избытокъ 100^0 предъ даннымъ угломъ

Complément d'un angle a 180^0, или просто, *supplément d'un angle*. *Дополненіе угла къ* 180^0, или, *добавленіе*. Разность между 180^0 (или, 200^0 въ стоградусномъ дѣленіи) и даннымъ угломъ. Напримѣръ, дополненіе угла въ 85^0 къ 180^0, есть 95^0, ибо $180^0 - 85^0 = 95^0$.

Sinus complément; то же что COSINUS (См.).

COMPLÉMENT D'UN PARALLÉLOGRAMME. ДОПОЛНЕНІЕ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА. Когда въ какомъ не есть параллелограммѣ $ABCD$ (черт. 8 Листъ IV), чрезъ какую угодно точку O діагонали AD, проведутся двѣ линіи EF и GH, параллельныя сторонамъ AB и BD параллелограмма $ABCD$, то получатся два параллелограмма $CEGO$ и $HBFO$, не пересѣкаемые діагональю AD. Эти два параллелограмма и называются *дополненіями даннаго*. Параллелограммы $CEGO$ и $HBFO$ имѣютъ то свойство, что площади ихъ равны; и дѣйствительно, такъ какъ $L + \beta + \gamma = M + \alpha + \delta$, то по причинѣ $\beta = \alpha$ и $\gamma = \delta$, будетъ $L = M$.

COMPLÉMENTAIRE (ARC). ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ДУГА, ДОПОЛНЕНІЕ. Избытокъ дуги въ 90^0 предъ данною дугою; напримѣръ, если данная дуга 30^0, то *дополнительная дуга* будетъ 60^0. Смот. COMPLÉMENT.

COMPLÉMENTAIRE (FONCTION). (Инт. Исч.) **ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ФУНКЦІЯ.** *Лейбницъ*, занимаясь изложеніемъ началъ Диѳѳеренціальнаго Исчисленія, замѣтилъ примѣчательную аналогію между степенями и диѳѳеренціалами. См. ANALOGIE DES DIFFÉRENCES AVEC LES PUISSANCES. Это самое привело его къ разсматриванію диѳѳеренціаловъ отрицательнаго порядка, принимая ихъ за интегралы; онъ даже предвидѣлъ возможность извлечь пользу изъ диѳѳеренціаловъ какого ни есть порядка, то есть: дробнаго, ирраціональнаго и даже мнимаго. Но извѣстно, что когда диѳѳеренцируемъ ѳункцію $-n$ разъ, то есть, когда интегрируемъ ее n разъ, то, для дополненія этого диѳѳеренціала $-n^{\text{го}}$ порядка, надлежитъ прибавить къ нему цѣлую раціональную ѳункцію степени $n-1$. Эта ѳункція, обращающаяся въ постоянное количество въ случаѣ $n=1$, называется *дополнительною.* И такъ, если возьмемъ диѳѳеренціалъ $-3^{\text{го}}$ порядка количества x, то получимъ $\frac{x^4}{2.3.4}$, а дополнительная ѳункція этого диѳѳеренціала будетъ $Cx^2+C'x+C''$. Вообще, если означимъ чрезъ $f(x)$ ѳункцію, для которой ищется диѳѳеренціалъ какого ни есть порядка i, то, для дополненія диѳѳеренціала $d^i f(x)$, надлежитъ прибавить къ нему нѣкоторую ѳункцію, именуемую *дополнительною.* Эта ѳункція очевидно должна быть такова, чтобы ея диѳѳеренціалъ порядка $-i$ равнялся нулю. И такъ, изобразивъ чрезъ $\varphi(x)$ ѳункцію, удовлетворяющую условію $d^{-i}\varphi(x)=0$, получимъ для полнаго диѳѳеренціала $i^{\text{го}}$ порядка ѳункціи $f(x)$ слѣдующую сумму: $d^i f(x)+\varphi(x)$. Смот. DIFFÉRENTIEL (CALCUL), INTÉGRAL (CALCUL).

Нѣкоторые математики утверждаютъ, что дополнительная ѳункція $\varphi(x)$ будетъ, во всѣхъ случаяхъ, цѣлая раціональная ѳункція перемѣнной x; но доказательство, на которомъ они основываютъ это предложеніе, кажется, не совсѣмъ удовлетворительно.

COMPLET. ПОЛНЫЙ. *Carré, cube complet; полный квадратъ, кубъ. Intégrale complète; полный интегралъ.* Интегралъ диѳѳеренціальной ѳункціи, или диѳѳеренціальнаго уравненія, съ присовокупленіемъ къ нему одного или нѣсколькихъ постоянныхъ произвольныхъ величинъ. См. INTÉGRAL (CALCUL), DIFFÉRENTIELLES (ÉQUATIONS).

COMPLÉTIF. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ, ДОБАВОЧНЫЙ. *Quantité complétive; добавочное, дополнительное количество.*

COMPLÉTER. ДОПОЛНИТЬ. *Compléter un carré, дополнить квадратъ.*

COMPLEXE. МНОГОЧЛЕННЫЙ, СЛОЖНЫЙ. *Quantité complexe; многочленное, сложное количество.* Количество состоящее изъ нѣсколькихъ частей, отдѣленныхъ знаками $+$ и $-$; таково, напримѣръ, количество $a+b-c$. *Nombre complexe; смѣшанная дробь,* то есть цѣлое число съ дробью, напримѣръ $5\frac{3}{7}$; также *именованное число,* напримѣръ 3 саж. 2 арш. 5 вер. 5 дю. 8 час. 40 мин. 15 сек. и проч.

COMPLECTION. СЛОЖНОСТЬ. Смот. COMBINATOIRE (ANALYSE).

COMPLICATION. МНОГОСЛОЖНОСТЬ. *Extrême complication des formules, des calculs numériques; чрезвычайная многосложность формулъ, численныхъ выкладокъ.*

COMPLIQUÉ. СЛОЖНЫЙ. *Construction géométrique compliquée; сложное геометрическое построеніе. Formules compliquées, сложныя формулы. Ces calculs sont très compliqués; эти выкладки очень сложны. Problème très compliqué; многосложная задача.*

COMPONENDO. Смот. COMPOSITION.

COMPOSANT (COUPLE). СОСТАВЛЯЮЩАЯ ПАРА. Смот. COUPLE.

COMPOSANTE. (Мех.) **СОСТАВЛЯЮЩАЯ.** *Составляющими* называются силы, происходящія отъ разложенія другой какой ни есть силы по произвольнымъ направленіямъ. *Composantes horizontales, composante verticale; горизонтальныя составляющія, составляющая вертикальная.* См. PARALLÉLOGRAMME DES FORCES, FORCE.

COMPOSANTE DE LA VITESSE. СОСТАВЛЯЮЩАЯ СКОРОСТИ. См. PARALLÉLOGRAMME DES VITESSES.

COMPOSÉ. (Ариѳ.) **СЛОЖНЫЙ, СОСТАВНОЙ.** *Nombre composé; сложное, составное число.* Такъ называется всякое цѣлое число, составленное изъ произведенія двухъ или большаго числа множителей, изъ коихъ исключается единица. Напримѣръ, числа 35 и 56 суть *сложныя,* ибо первое изъ нихъ равно произведенію 5×7, а второе $2^3.7$. Смот. FACTEUR, DIVISEUR.

Nombres composés entr'eux, или, употребительнѣе: *nombres qui ont un diviseur commun.* Числа имѣющія общаго дѣлителя; таковы между собою приведенныя два числа 35 и 56; общій дѣлитель ихъ есть 7. Смот. NOMBRE PREMIER, DIVISEUR.

Raison composée или rapport composé. Сложное содержаніе. Содержаніе, получаемое чрезъ перемноженіе нѣсколькихъ простыхъ содержаній. Напримѣръ дробь $\frac{10}{21}$ изображаетъ *сложное содержаніе* двухъ простыхъ $\frac{2}{3}$ и $\frac{5}{7}$. См. RAPPORT.

Règle de trois composée. Сложное тройное правило. Смот. TROIS (RÈGLE DE).

Quantités composées, complexes или multinomes. Смот. COMPLEXE.

Probabilité composée. Сложная вероятность. Смот. PROBABILITÉ.

COMPOSÉ (PENDULE). (Мех.) **СЛОЖНЫЙ МАЯТНИКЪ.** Всякое твердое тѣло, или неизмѣняемая система тѣлъ, приводимая въ движеніе силою тяжести около неподвижной оси или точки. Смот. PENDULE.

Mouvement composé. Сложное движеніе. Движеніе, производимое нѣсколькими силами, дѣйствующими на тѣло въ одно время, но по различнымъ направленіямъ. Всякое криволинейное движеніе есть *сложное.* См. MOUVEMENT.

COMPOSITION. (Ариѳ.) *Par composition de raison. Чрезъ сложеніе предыдущаго съ послѣдующимъ.* Дѣйствіе посредствомъ котораго изъ геометрической пропорціи $a : b = c : d$ выводятся слѣдующія: $a+b : a = c+d : c$ и $a+b : b = c+d : d$. Въ этомъ самомъ смыслѣ употребляется Латинскій терминъ *componendo.* Когда же составляемъ пропорціи *чрезъ вычитаніе* одного члена содержанія изъ другаго, какъ напримѣръ $a-b : a = c-d : c$ и $a-b : b = c-d : d$, то такое дѣйствіе выражаютъ Латинскимъ словомъ *dividendo.* — Когда же, напротивъ того, за послѣдующій каждаго содержанія принимаютъ сумму или разность предыдущаго и послѣдующаго первоначальной пропорціи, то такое дѣйствіе именуется *convertendo (par convertion de raison).* И такъ, изъ пропорціи $a : b = c : d$, выводимъ, *чрезъ превращеніе,* $a : a \pm b = c : c \pm d$.

COMPOSITION DES FORCES. (Мех.) **СОВОКУПЛЕНІЕ, СЛОЖЕНІЕ СИЛЪ.** Приведеніе нѣсколькихъ силъ, дѣйствующихъ на матеріальную точку или на твердое тѣло къ меньшему числу. Смот. FORCE, RÉSULTANTE, PARALLÉLOGRAMME DES FORCES, COUPLE и проч.

Здѣсь представляются два случая: 1°. Совокупленіе силъ дѣйствующихъ на одну точку; 2°. Совокупленіе силъ приложенныхъ къ нѣсколькимъ точкамъ, составляющимъ неизмѣняемую систему. Прежде нежели разсмотримъ эти два случая, приведемъ нѣкоторыя необходимыя предложенія, которыя могутъ быть приняты въ Механикѣ за аксіомы.

1°. *Двѣ силы равныя, приложенныя къ одной точкѣ по направленіямъ прямопротивуположнымъ, уравновѣшиваются между собою.*

2° *Такого же свойства силы, приложенныя къ двумъ точкамъ, которыя соединены между собою неизмѣняемымъ образомъ, также уравновѣшиваются.*

3° *Точка приложенія силы можетъ быть перенесена по направленію силы, въ какую угодно другую точку, лишь бы только эти двѣ точки были соединены между собою неизмѣняемымъ образомъ.*

4°. *Если двѣ силы P и Q дѣйствуютъ по одному направленію и въ одну сторону, то онѣ совокупляются въ одну силу, равную ихъ суммѣ $P + Q$.*

О Совокупленіи силъ, дѣйствующихъ на одну точку.

Если нѣсколько силъ P, Q, R,.... приложены къ одной точкѣ по одному направленію и въ одну сторону, то равнодѣйствующая ихъ будетъ равна суммѣ $P + Q + R + \ldots$, ибо разсматривая сперва только двѣ силы P и Q, получимъ, въ слѣдствіе предложенія 4-го, равнодѣйствующую $P + Q$; совокупляя силу $P + Q$ съ R, найдется равнодѣйствующая $P + Q + R$, и такъ далѣе.

Когда, при одинаковомъ направленіи силъ, однѣ будутъ дѣйствовать въ одну сторону, а другія въ противную, то равнодѣйствующая опредѣлится избыткомъ суммы силъ, дѣйствующихъ въ одну сторону, предъ суммою силъ, дѣйствующихъ въ противную, и будетъ направлена въ сторону силъ, для которыхъ получится бо́льшая сумма. Дѣйствительно, пусть силы P, Q, R.... дѣйствуютъ въ одну сторону, а P', Q', R'.... въ противную. Такъ какъ равнодѣйствующая первыхъ будетъ $P+Q+R+\ldots$ а вторыхъ $P'+Q'+R'+\ldots$, то, положивъ $P+Q+R+\ldots > P'+Q'+R'+\ldots$, и написавъ первую сумму въ видѣ $P'+Q'+R'+\ldots+(P+Q+R+\ldots - P'-Q'-R'-\ldots)$, получимъ двѣ силы $P'+Q'+R'+\ldots$ и $P'+Q'+R'+\ldots+(P+Q+R+\ldots-P'-Q'-R'-\ldots)$, дѣйствующія на точку по одному направленію, но въ противныя стороны. Двѣ силы равныя и прямопротивныя $P'+Q'+R'+\ldots$ уничтожатся взаимно въ слѣдствіе предложенія 1-аго, а останется, какъ сказано выше, равнодѣйствующая $P+Q+R+\ldots-P'-Q'-R'-\ldots$.

Разсмотримъ теперь общій случай. Положимъ, что нѣсколько силъ P, Q, R, S.... дѣйствуютъ на точку m по какимъ ни есть направленіямъ; для совокупленія этихъ силъ, откладываемъ по направленію каждой изъ нихъ, отъ точки m, длины p, q, r, s.... соотвѣтственно пропорціональныя величинамъ P, Q, R, S.... Такъ какъ равнодѣйствующая R' двухъ силъ P и Q изобразится по величинѣ и по направленію діагональю r' параллелограмма, построеннаго на линіяхъ p и q, пропорціональныхъ силамъ P и Q (См. PARALLÉLOGRAMME DES FORCES), то система силъ Q, R, S.... приведется къ силамъ R', R, S..... Совокупивъ точно такимъ образомъ силы R' и R, то есть, построивъ параллелограммъ на линіяхъ r' и r, и проведя діагональ, которой длину изобразимъ чрезъ r'', получимъ равнодѣйствующую R'' двухъ силъ R' и R; и такъ система первоначальныхъ силъ будетъ замѣнена силами R'', S... Продолжая это строеніе, найдемъ равнодѣйствующую R''' двухъ силъ R'', S... и такъ далѣе. Наконецъ, тѣмъ же путемъ достигнемъ до послѣдней изъ силъ P, Q, R, S..., и найдемъ равнодѣйствующую всѣхъ предложенныхъ силъ.

О совокупленіи силъ, дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему.

a) О совокупленіи силъ параллельныхъ.

Разсмотримъ сперва случай силъ параллельныхъ, приложенныхъ къ точкамъ, которыя соединены между собою неизмѣняемымъ образомъ. Для совокупленія таковыхъ силъ, мы будемъ основываться на слѣдующей теоремѣ.

Двѣ какія ни есть параллельныя силы P и Q (черт. 9 Листъ IV), дѣйствующія въ одну сторону, и приложенныя къ концамъ неизмѣняемой прямой AB, имѣютъ равнодѣйствующую; эта равнодѣйствующая 1°, равна суммѣ $P+Q$ составляющихъ силъ, 2°, параллельна имъ, направляется въ одну сторону съ ними, и заключается въ ихъ плоскости, и наконецъ 3°, раздѣляетъ прямую $\overline{AB}$ на двѣ части, обратно пропорціональныя силамъ P и Q, такъ что $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\frac{Q}{P}$.

Доказательство. Приложимъ къ концамъ A и B, по направленію AB, двѣ силы равныя и прямопротивныя S и T; дѣйствіе первоначальныхъ силъ P и Q не измѣнится, ибо, въ слѣдствіе предложенія 2-го, силы S и T будутъ уравновѣшиваться между собою. Если изобразимъ силу P линіею Ak, Q линіею Bm, а вводныя силы S и T равными длинами Al, Bn, то равнодѣйствующая двухъ силъ P и S выразится діагональю $\overline{Aa}$, а равнодѣйствующая силъ Q и T діагональю $\overline{Bb}$; пусть будетъ $\overline{Aa}=R'$, а $\overline{Bb}=R''$. Продолжимъ линіи $\overline{Aa}$ и $\overline{Bb}$ до общаго ихъ пересѣченія въ точкѣ C; можно перенести точки приложенія силъ R' и R'' изъ A и B въ C (предложеніе 3). Проведемъ теперь изъ точки C линію $\overline{CD}$, параллельную направленію силъ P и Q; очевидно, что разложивъ силу R', приложенную въ точкѣ C, на двѣ другія, одну по направленію CD, а другую, по линіи CS, параллельной прямой AB, получимъ составляющія P и S; сила R'', приложенная также къ точкѣ C, разложится на двѣ составляющія Q и T. Силы S и T, равныя и прямопротивныя, уничтожатся взаимно, и останутся только двѣ силы P и Q, дѣйствующія на точку C, обѣ по направленію CD; слѣдовательно, равнодѣйствующая ихъ равна суммѣ $P+Q$, направляется параллельно составляющимъ силамъ P и Q, и дѣйствуетъ въ одну сторону съ ними.

Остается теперь найти точку O, въ которой равнодѣйствующая $P+Q$ пересѣкаетъ прямую приложенія $\overline{AB}$. Для этого, замѣтимъ, что по строенію, треугольники aAk и ACO, также bBm и BCO подобны. Слѣдовательно

$$\frac{\overline{ak}}{\overline{kA}}=\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} \text{ и } \frac{\overline{bm}}{\overline{mB}}=\frac{\overline{OB}}{\overline{OC}};$$

но $\overline{ak} = \overline{bm}$, и сверхъ того $\frac{kA}{mB} = \frac{P}{Q}$, почему и найдется

$$\frac{\overline{ak}}{P} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} \text{ и } \frac{\overline{ak}}{Q} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}};$$

раздѣляя первое уравненіе на второе, получимъ

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{Q}{P},$$

что и имѣли въ виду доказать.

Для совокупленія двухъ параллельныхъ силъ въ томъ случаѣ, когда онѣ дѣйствуютъ въ противныя стороны, примемъ въ соображеніе систему трехъ параллельныхъ силъ P, Q, R (черт. 10, листъ IV), приложенныхъ къ точкамъ A, B, O неизмѣняемой прямой AB. Допустимъ, что эти три силы уравновѣшиваются между собою; въ такомъ случаѣ, въ слѣдствіе доказанной сей-часъ теоремы, сила R, равная и прямопротивная равнодѣйствующей силъ P и Q, должна равняться суммѣ $P + Q$, проходить чрезъ точку O, коей положеніе опредѣляется условіемъ $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{Q}{P}$, и наконецъ, должна быть направлена параллельно силамъ P и Q, но въ противную сторону. И такъ, если предположимъ, что даны силы P и R, дѣйствующія въ противныя стороны, то равнодѣйствующая ихъ изобразится силою Q, направленною отъ B къ C, ибо сила Q, направляющаяся отъ B къ b, приводитъ силы P и R въ равновѣсіе. Но такъ какъ $R = P + Q$, то $Q = R - P$; слѣдовательно, искомая равнодѣйствующая равняется разности $R - P$ составляющихъ силъ, имъ параллельна, и направлена въ одну сторону съ R, то есть съ бо̀льшею изъ двухъ составляющихъ силъ. Что касается до точки приложенія B равнодѣйствующей, то она будетъ находиться на продолженіи прямой приложенія $\overline{AO}$, и ближе къ наибольшей силѣ R. Если въ уравненіи $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{Q}{P}$ поставимъ $R - P$ вмѣсто Q, то, для опредѣленія точки B, получимъ

$$OB = \frac{P \times \overline{OA}}{R - P}.$$

Здѣсь надобно сдѣлать одно замѣчаніе: чѣмъ меньше будетъ разность между составляющими R и P, тѣмъ меньше будетъ и равнодѣйствующая ихъ Q, между тѣмъ какъ точка приложенія сей послѣдней будетъ болѣе и болѣе удаляться отъ прямой приложенія AO. Наконецъ, если положимъ, что силы R и P равны между собою, то равнодѣйствующая ихъ Q обратится въ *нуль*, а разстояніе ея точки приложенія B отъ O, то есть линія $\overline{OB} = \frac{P \times \overline{OA}}{0} =$ *безконечности*. Это самое приводитъ къ тому заключенію, что двѣ равныя параллельныя силы, приложенныя къ концамъ неизмѣняемой прямой, и дѣйствующія въ противныя стороны, не могутъ быть замѣнены одною силою. Такая совокупность двухъ силъ называется *парою*; См. COUPLE.

На этомъ основаніи весьма легко опредѣлить равнодѣйствующую сколькихъ угодно параллельныхъ силъ, дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему. Положимъ напримѣръ что имѣемъ четыре параллельныя силы P, Q, R, S (черт. 11 Листъ IV), всѣ направленныя въ одну сторону. Совокупляемъ сперва силы P и Q; ихъ равнодѣйствующая X равна суммѣ $P + Q$, и проходитъ чрезъ точку O, которую опредѣляемъ раздѣливъ прямую приложенія $\overline{AB}$ на двѣ части обратно пропорціональныя силамъ P и Q. Соединяемъ потомъ O съ точкою C, къ которой приложена третья сила R. Равнодѣйствующая двухъ силъ X и R, которую изобразимъ чрезъ X', будетъ равна суммѣ $X + R$ или $P + Q + R$, и направленіе ея пересѣчетъ прямую OC въ точкѣ O' такой, что $\frac{\overline{O'O}}{\overline{O'C}} = \frac{R}{X}$. Наконецъ, для совокупленія силы X' и послѣдней силы S, проводимъ линію $O'D$, и раздѣляемъ ее на двѣ части $\overline{O'O''}$, $\overline{O''D}$, обратно пропорціональныя силамъ X' и S. Точка O'' будетъ точкою приложенія равнодѣйствующей X'' силъ X' и S, и сверхъ того имѣемъ $X'' = X' + S = P + Q + R + S$. Слѣдовательно, равнодѣйствующая параллельныхъ силъ P, Q, R и S, направляющихся въ одну сторону, будетъ параллельна своимъ составляющимъ, и равна ихъ суммѣ. Точка O'', чрезъ которую проходитъ равнодѣйствующая X'', называется *центромъ параллельныхъ силъ* P, Q, R, S; См. CENTRE DES FORCES PARALLÈLES. Очевидно, что выведенное сей-часъ слѣдствіе, а равно и приведенное строеніе, можетъ быть приложено къ какому угодно числу параллельныхъ силъ, дѣйствующихъ въ одну сторону.

Если бы нѣкоторыя изъ данныхъ параллельныхъ силъ, напримѣръ $P, P', P''\ldots$ дѣйствовали въ одну сторону, а другія, Q, Q', Q''.... въ противную, то надлежало бы предварительно совокупить какъ силы P, P', P''...., такъ и силы Q, Q', Q''... Изобразимъ чрезъ X равнодѣйствующую силъ P, P', P''...., а чрезъ Y, равнодѣйствующую силъ Q, Q', Q''.... Такимъ образомъ система силъ P, P', P''.... и Q, Q', Q''... приведется къ двумъ параллельнымъ силамъ X и Y, дѣйствующимъ въ противныя стороны, и равнодѣйствующая ихъ опредѣлится по правилу, приведенному выше. Если случится, что силы X и Y равны между собою, то онѣ или взаимно уничтожатся, или составятъ пару, смотря по тому, будутъ ли эти силы прямопротивны, или нѣтъ.

b) О совокупленіи силъ, имѣющихъ какія ни есть направленія.

Пусть будутъ (черт. 12, листъ IV) силы P, Q, R....., приложенныя къ неизмѣняемой системѣ точекъ A, B, C......, и имѣющія какія ни есть направленія въ пространствѣ. Для совокупленія этихъ силъ беремъ произвольную точку O, и предполагаемъ, что она соединена неизмѣняемымъ образомъ съ системою точекъ A, B, C..... Къ точкѣ O, параллельно силѣ P, прикладываемъ двѣ силы прямопротивныя, изъ которыхъ каждая равна P; очевидно, что первоначальная система не измѣнится чрезъ введеніе этихъ двухъ силъ, взаимно уничтожающихся. И такъ, вмѣсто силы P, приложенной въ A, мы можемъ разсматривать силу P, приложенную въ точкѣ O, и пару силъ $(P, -P)$, дѣйствующую на прямую AO. Пару $(P, -P)$, для большей удобности, можемъ перенести въ какую ни есть плоскость, параллельную самой плоскости пары, и внѣ системы проходящую; тогда останется только сила P, приложенная въ точкѣ O, и какъ бы перенесенная параллельно самой себѣ изъ A въ O. Если поступимъ точно такимъ образомъ съ силами Q, R...., относительно той же точки O, то очевидно, что всѣ онѣ соединятся въ этой точкѣ O, въ которой будутъ дѣйствовать параллельно прежнимъ своимъ направленіямъ; сверхъ того получатся пары $(Q, -Q)$, $(R, -R)$..... Силы P, Q, R..., дѣйствующія на точку O, совокупятся въ одну силу X по правилу параллелограмма силъ; что касается до паръ $(P, -P)$, $(Q, -Q)$, $(R, -R)$..., то совокупность ихъ можетъ быть замѣнена одною равнодѣйствующею парою $(T, -T)$ (Смот. COUPLE), приложенною къ прямой HK. И такъ, система силъ P, Q, R......., приложенныхъ къ точкамъ A, B, C......, соединенныхъ между собою неизмѣняемымъ образомъ, приводится къ одной силѣ X и къ одной парѣ $(T, -T)$, вообще не заключающихся въ одной плоскости.

Для равновѣсія подобной системы, сила X и пара $(T, -T)$ должны порознь уничтожаться. Если сила X находится въ плоскости пары $(T, -T)$, или въ плоскости ей параллельной, то X и пара $(T, -T)$ совокупляются въ одну силу.

Для совершеннаго уразумѣнія этого предмета, читатели должны обратиться къ статьямъ: FORCE, ÉQUILIBRE, PARALLÉLOGRAMME DES FORCES, COUPLE.

COMPOSITION DES COUPLES. Совокупленіе паръ. Смот. COUPLE.

COMPOSITION DES VITESSES, DU MOUVEMENT. Совокупленіе скоростей, движеній. Такъ какъ совокупленіе скоростей или движеній производится по тѣмъ же правиламъ, какъ и совокупленіе силъ, то и отсылаемъ читателей къ статьѣ: COMPOSITION DES FORCES, а также къ PARALLÉLOGRAMME DES VITESSES, MOUVEMENT.

COMPOSITION DES ÉQUATIONS. (Алг.) **СОСТАВЛЕНІЕ УРАВНЕНІЙ.** Дѣйствіе, посредствомъ котораго составляются уравненія, когда корни предполагаются извѣстными, или дѣйствительно даны. Напримѣръ, если бы желали *составить* такое уравненіе, которое бы имѣло m корней равныхъ a, n корней равныхъ b, и два одиночные корня c и d, то изобразивъ чрезъ x неизвѣстную, получили бы уравненіе

$$(x-a)^m (x-b)^n (x-c) (x-d) = 0.$$

Совершивъ обозначенныя здѣсь умноженія, нашли бы искомое уравненіе, расположенное по нисходящимъ степенямъ неизвѣстной x.

COMPOST или **COMPOSTE.** Смот. COMPUT.

COMPRENDRE. (Геом. и Алг.) **ЗАКЛЮЧАТЬ.** *Deux côtés et l'angle qu'ils comprennent étant donnés, décrire le triangle; по даннымъ двумъ сторонамъ и углу между ними заключающемуся, построить треугольникъ. — Équation comprise dans une autre; уравненіе равнозначущее, тождественное съ дру-*

гимъ. Напримѣръ, уравненіе $5x-3y+6=0$, *равнозначуще* съ уравненіемъ $x+y=2+\frac{8x}{3}$.

COMPRESSIBILITÉ (Физ.) **СЖИМАЕМОСТЬ.** Одно изъ общихъ свойствъ тѣлъ. См. CORPS.

COMPRESSIBLE. СЖИМАЕМЫЙ; — УПРУГІЙ. *Fluide compressible*; *сжимаемая, упругая жидкость*. Смот. FLUIDE.

COMPRESSION. СЖИМАНІЕ, СЖАТІЕ. — СДАВЛИВАНІЕ, СГНЕТЕНІЕ, СТИСНЕНІЕ. Дѣйствіе, посредствомъ котораго уменьшаютъ объёмъ тѣла.

COMPRIMER. СЖАТЬ, СДАВИТЬ. — СГУСТИТЬ. *En comprimant un corps*; *сжимая тѣло*. *En comprimant l'air atmosphérique*; *сжимая, сгущая атмосферическій воздухъ*.

COMPTE-PAS или **ODOMÈTRE. ПУТЕМѢРЪ, ШАГОМѢРЪ, ОДОМЕТРЪ.** Инструментъ служащій для узнанія перейденнаго пути (числа шаговъ) пешеходомъ. *Одометръ* придѣлываютъ также иногда и къ повозкамъ для опредѣленія, посредствомъ числа оборотовъ колесъ, пути который она проѣхала.

COMPUT, COMPOST или **COMPOSTE ÉCLÉSIASTIQUE. СВЯТЦЫ, ЦЕРКОВНЫЙ КАЛЕНДАРЬ.** Говорится о календарѣ, употребляемомъ для нахожденія подвижныхъ праздниковъ.

CONCAVE. (Геом.) **ВОГНУТЫЙ.** Говорится о внутренней части кривой линіи или поверхности. *Courbe, surface concave*; *вогнутая кривая, вогнутая поверхность*. Собственно, это слово имѣетъ только значеніе относительное; ибо, если кривая линія или поверхность съ одной стороны *вогнута*, то съ другой будетъ *выпукла*. См. ниже.

CONCAVITÉ. (Геом.) **ВОГНУТОСТЬ.** Вогнутая часть кривой линіи или поверхности. *Вогнутая часть* кривой относительно прямой AB (черт. 15, листъ IV) находится въ углѣ BOT, составляемомъ прямою AB съ касательною MT, проведенною къ какой ни есть точки M сей части кривой; *выпуклая часть* или *выпуклость* кривой (*convexité*), напротивъ того, находится внѣ означеннаго угла (черт. 14. листъ IV). *Courbe tournant sa concavité* или *sa convexité vers l'axe des abscisses*; *кривая, обращенная своею вогнутостію* или *выпуклостію къ оси абсциссъ*. — Въ томъ же значеніи должно разумѣть вогнутость и выпуклость кривой поверхности; но, въ этомъ случаѣ, вмѣсто прямой AB, надлежитъ разсматривать плоскость, а вмѣсто касательной линіи MT, касательную плоскость къ кривой поверхности въ той точкѣ, въ сопредѣльности которой разсматривается поверхность. Смот. INFLEXION.

CONCENTRER. (Мех.) **СОСРЕДОТОЧИТЬ, КОНЦЕНТРИРОВАТЬ.** Когда тяжелое тѣло принимается за матеріальную точку, то предполагается, что вся масса его *сосредоточена* въ его центрѣ тяжести. — *Mettre une série sous une forme plus concentrée*; *представить рядъ въ видѣ болѣе сжатомъ*.

CONCENTRIQUE. (Геом.) **ОДНОЦЕНТРЕННЫЙ, КОНЦЕНТРИЧЕСКІЙ, СОЦЕНТРЕННЫЙ.** Такъ называются два, или нѣсколько круговъ, имѣющихъ общій центръ. Это слово употребляется также иногда и въ томъ случаѣ, когда говорится о другихъ кривыхъ линіяхъ, имѣющихъ общій центръ. *Ellipses concentriques*; *одноцентренные, концентрическіе эллипсы*.

CONCHILE. Такъ называли прежде *конхоиду*. См. ниже.

CONCHOIDE. (Геом.) **КОНХОИДА.** Алгебрическая кривая четвертой степени, изобрѣтенная *Никомедомъ*, и названная поэтому *Никомедовою конхоидою* (*conhoide de Nicomède*).

Положимъ, что чрезъ точку C, (черт. 15, 16 и 17, листъ IV) линіи AB проведенъ перпендикуляръ $\overline{EO}$. Пусть будетъ $\overline{CE}=a$ и $\overline{CO}=b$. Изъ точки O проводимъ произвольную прямую OH, и отъ точки F ея пересѣченія съ AB, откладываемъ $\overline{FM}=a$ и $\overline{FM'}=a$. Точки M и M' будутъ принадлежать *конхоидѣ*, первая, *верхней* ея вѣтви, а вторая, *нижней*.

Найдемъ теперь уравненіе конхоиды. Примемъ точку C за начало координатъ, а линіи AB, EO соотвѣтственно за координатныя оси; пусть будетъ $\overline{CP}=x$, $\overline{PM}=y$. Если изъ точки M опустимъ на линію CE перпендикуляръ $\overline{MQ}$, то треугольники OQM и MPF будутъ подобны; слѣдовательно

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{MQ}}=\frac{\overline{PM}}{\overline{FP}}.$$

Но $\overline{OQ}=\overline{CO}+\overline{PM}=b+y$, $\overline{MQ}=\overline{CP}=x$, $\overline{PM}=y$, $\overline{FP}=\sqrt{\overline{FM}^2-\overline{PM}^2}=\sqrt{a^2-y^2}$. И такъ, предыдущее уравненіе приметъ видъ

$$\frac{b+y}{x} = \frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}},$$

или

$$x^2y^2 = (b+y)^2(a^2-y^2).$$

Вотъ уравненіе *конхоиды*; изъ его разбора усмотримъ:

1-ое. Что когда $b > a$, то конхоида (черт. 15) будетъ имѣть *четыре точки изгиба* K, K', K''; и K'''.

2-ое. Когда $b = a$, то конхоида имѣетъ только *двѣ точки изгиба* K и K', и, сверхъ того, *одну точку возврата* въ O (черт. 16).

3-е. Когда $b < a$, то конхоида имѣетъ также *двѣ точки изгиба* K и K', *и одну двойную* въ O (черт. 17).

4-ое. Во всѣхъ случаяхъ неопредѣленно продолженная линія AB будетъ ассимптотою къ обѣимъ вѣтвямъ конхоиды.

Точка O называется *полюсомъ конхоиды* (*pôle de la conchoide*), а постоянная линія $\overline{CE} = a$ *высотою* (*hauteur* или *règle de la conchoide*).

Полярное уравненіе *конхоиды* весьма просто: если изобразимъ чрезъ r радіусъ векторъ $\overline{OM}$ верхней ея вѣтви, а чрезъ φ уголъ MOE, то изъ треугольника OMQ получимъ $\overline{OQ} = r.\, Cos\,\varphi$, но $\overline{OQ} = \overline{OC} + \overline{CQ} = b + \overline{MP}$, а $\overline{MP} = \overline{MF}.\, Cos\,\varphi$; слѣдовательно $\overline{OQ} = b + a.\, Cos\,\varphi$, и наконецъ $b + a.\, Cos\,\varphi = r.\, Cos\,\varphi$, или $r = \frac{b}{Cos\,\varphi} + a$; для нижней вѣтви конхоиды получили бы подобнымъ образомъ $r' = \frac{b}{Cos\,\varphi} - a$, гдѣ подъ r' разумѣемъ радіусъ векторъ $\overline{OM'}$.

Древніе геометры употребляли Никомедову конхоиду для нахожденія двухъ среднихъ пропорціональныхъ между двумя данными числами, а также для раздѣленія угла на три части. *Ньютонъ*, *Лагиръ*, *Ла Кондаминъ* и многіе другіе занимались изслѣдованіемъ свойствъ этой кривой. Объ конхоидѣ писаны были особые трактаты, между прочими: *C. Witte*, *Conchoidis Nicomedeae aequatio et indoles*; *Gött.* 1815 г., на Русскомъ языкѣ книга подъ заглавіемъ: *О геометрическомъ строеніи уравненій высшихъ степеней посредствомъ кривой линіи, называемой* конхоидою, *и проч. соч. Шуберта*; перевелъ *Н. Навроцкій*. С. П. Б. 1827 in-8°.

CONCHOIDE PARABOLIQUE. ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ КОНХОИДА. Такъ назвалъ *Декартъ* плоскую кривую третей степени, къ которой приводитъ рѣшеніе слѣдующей задачи: *Даны пять прямыхъ линій, неопредѣленно продолженныхъ, изъ которыхъ четыре A, B, C, D параллельны между собою, а пятая E перпендикулярна къ нимъ; найти такую точку M, чтобы произведеніе трехъ перпендикулярныхъ разстояній точки M отъ прямыхъ A, B и C, равнялось произведенію двухъ перпендикулярныхъ же разстояній M отъ D и отъ E, помноженному на третью постоянную линію.* Геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ, удовлетворяющихъ требуемому условію, будетъ *параболическая конхоида.* Можно также представить образованіе параболической конхоиды въ другомъ видѣ. Положимъ, что обыкновенная парабола движется по своей оси, и, при такомъ движеніи, увлекаетъ за собой прямую, проходящую чрезъ постоянную точку, именуемую *полюсомъ*, и чрезъ другую точку, которая находится на оси параболы, въ опредѣленномъ отъ вершины ея разстояніи. Послѣдовательныя пересѣченія движущейся параболы съ прямою линіею будутъ принадлежать параболической конхоидѣ.

Когда, вмѣсто параболы, будемъ разсматривать кругъ, и предположимъ, что прямая постоянно проходитъ чрезъ его центръ, то получимъ обыкновенную *конхоиду.* Основываясь на томъ или на другомъ изъ предложенныхъ здѣсь строеній параболической конхоиды, читатели безъ труда выведутъ уравненіе этой кривой.

CONCLURE. ЗАКЛЮЧИТЬ. *Conclure par analogie*; *заключить по аналогіи.*

CONCLUSION. ЗАКЛЮЧЕНІЕ, ВЫВОДЪ.

CONCOURANTES (FORCES или PUISSANCES). (Мех.) **СИЛЫ ПЕРЕСѢКАЮЩІЯСЯ, СХОДЯЩІЯСЯ.** Силы, коихъ направленія пересѣкаются. FORCES CONCOURANTES или CONSPIRANTES; содѣйствующія силы; такъ называются силы, производящія въ совокупности извѣстное дѣйствіе, въ противуположность тѣмъ, которыя производятъ дѣйствія противныя однѣ другимъ.

LIGNES CONCOURANTES или CONVERGENTES. (Геом.) Пересѣкающіяся, сходящіяся линіи.

CONCOURIR. (Геом.) **ПЕРЕСѢКАТЬСЯ, СХОДИТЬСЯ, СОЕДИНЯТЬСЯ.** Когда двѣ линіи заключаются въ одной плоскости, и не параллельны между собою, то онѣ, бывъ продолжены, если нужно, пересѣкаются взаимно.

CONCOURS (POINT DE) или **POINT D'INTERSECTION.** (Геом.) **ТОЧКА ВСТРѢЧИ, ТОЧКА ПЕРЕСѢЧЕНІЯ.** Точка, въ которой двѣ или нѣсколько линій встрѣчаются или пересѣкаются. *Point de concours de plusieurs rayons*, *точка встрѣчи нѣсколькихъ радіусовъ*; *фокусъ*. Смот. FOYER.

CONCOURS (MÉTHODE PAR LES POINTS DE). (Персп.) **СПОСОБЪ ТОЧЕКЪ ВСТРѢЧИ, СПОСОБЪ СХОДА.** Способъ часто употребляемый для составленія перспективъ, и состоящій въ слѣдующемъ: положимъ, что желаемъ поставить въ перспективу извѣстные предметы, и что положеніе картинной поверхности, какъ относительно сихъ предметовъ, такъ и относительно глаза, извѣстно. Для этого проводимъ чрезъ глазъ двѣ произвольныя прямыя A и B, и потомъ, чрезъ каждую точку, которую имѣемъ въ виду поставить въ перспективу, двѣ линіи параллельныя проведеннымъ чрезъ глазъ A и B. Пусть будутъ P и Q точки, въ которыхъ прямыя A и B встрѣчаютъ картинную поверхность, предполагаемую, для простоты, плоскою; P и Q будутъ *точками встрѣчи* или *точками схода* всѣхъ линій, параллельныхъ прямымъ A и B. Замѣтимъ теперь, что какая ни есть точка O пространства можетъ быть принимаема за вершину угла, коего стороны a и b, соотвѣтственно параллельныя прямымъ A и B, встрѣчаютъ картинную плоскость въ двухъ точкахъ p и q; если соединимъ точку P съ p, а также Q съ q, то получимъ пересѣченія картинной плоскости съ плоскостями, проходящими чрезъ параллельныя линіи A и a, B и b. Точка пересѣченія прямыхъ Pp и Qq будетъ искомая перспектива точки O пространства.

Точно такимъ образомъ можно будетъ построить перспективы сколькихъ угодно точекъ пространства. Смот. PERSPECTIVE.

CONCRÈTE (QUANTITÉ) или **NOMBRE CONCRET. ИМЕНОВАННОЕ ЧИСЛО.** Смот. ABSTRAIT.

CONDENSABILITÉ. (Физ.) **СГУЩАЕМОСТЬ, СЖИМАЕМОСТЬ.** Свойство тѣлъ, по которому они могутъ быть приведены къ меньшему объёму.

CONDENSABLE. Сгущаемый, сжимаемый.

CONDENSATION. Сгущеніе, сжатіе. *Condensation des corps par le refroidissement*; *сгущеніе тѣлъ отъ охлажденія*.

CONDENSER (SE). Сгущаться, сжиматься.

CONDITION. УСЛОВІЕ, ТРЕБОВАНІЕ. *Les conditions du problême exigent que....* *Условія задачи требуютъ чтобы....* *Formule conditionnelle*; *условная формула.* Формула справедливая при нѣкоторыхъ условіяхъ.

ÉQUATIONS DE CONDITION. Условныя уравненія. Смот. ÉQUATION.

CONDUCTIBILITÉ или **CONDUCIBILITÉ.** (Матем. Физ.) **ТЕПЛОПРОВОДИМОСТЬ.** Въ статьѣ CHALEUR найдено было уравненіе

$$(1)\qquad C\frac{du}{dt}=K\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right),$$

опредѣляющее законъ измѣненія температуръ въ твердомъ однородномъ тѣлѣ. Постоянное количество K мы назвали *теплопроводимостію*, или просто, *проводимостію*. Теперь изслѣдуемъ свойство этой величины K.

Прежде всего замѣтимъ, что изъ сказаннаго нами въ статьѣ CHALEUR слѣдуетъ заключить, что количество K зависитъ только отъ свойства разсматриваемаго твердаго тѣла, а отнюдь не зависитъ отъ его температуры, развѣ сія послѣдняя будетъ весьма возвышенна, чего мы не предполагаемъ; и такъ, чтобы узнать что собственно изображаетъ количество K намъ представляется само собою средство, весьма легкое, состоящее въ разсмотрѣніи какого нибудь простаго случая при распредѣленіи температуръ.

Если помножимъ величину $K\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)$ на $dx\,dy\,dz\,dt$, то получимъ количество теплоты, пріобрѣтаемое безконечно малымъ объёмомъ $dxdydz$ въ элементъ времени dt; интегрируя произведеніе

$$K\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)dxdydzdt$$

во всемъ протяженіи тѣла, найдемъ выраженіе

$$Kdt\int\left(\frac{du}{dx}\,Cos\,\lambda+\frac{du}{dy}\,Cos\,\mu+\frac{du}{dz}\,Cos\,\nu\right)ds,$$

изображающее количество теплоты, пріобрѣтаемое цѣлымъ тѣломъ въ элементъ времени dt Здѣсь λ, μ, ν означаютъ углы, составляемые нормалью къ поверхности тѣла съ координатными осями, а ds, элементъ поверхности.

Предположимъ, что разсматриваемое тѣло есть призма или цилиндръ, котораго боковая поверхность покрыта какимъ либо веществомъ, не пропускающимъ тепла. Допустимъ сверхъ того, что изъ двухъ основаній цилиндра, одно, которое назовемъ A, поддерживается постоянно при температурѣ $+1^0$, а другое, B, при температурѣ 0^0. Получимъ

$$\int\left(\frac{du}{dx}Cos\,\lambda + \frac{du}{dy}Cos\,\mu + \frac{du}{dz}Cos\,\nu\right)ds =$$
$$\int\left(\frac{du}{dx}Cos\,\lambda + \frac{du}{dy}Cos\,\mu + \frac{du}{dz}Cos\,\nu\right)ds$$
$$+\int\left(\frac{du}{dx}Cos\,\lambda + \frac{du}{dy}Cos\,\mu + \frac{du}{dz}Cos\,\nu\right)ds,$$

гдѣ первый интегралъ второй части уравненія относится къ боковой поверхности цилиндра, а второй, къ его двумъ основаніямъ. Но такъ какъ, по предположенію, боковая поверхность не пропускаетъ теплоты, то первый интегралъ долженъ равняться нулю. Что касается до оснований, то для A найдется $Cos\lambda = -1$, для B, $Cos\lambda = +1$, и для обоихъ основаній $Cos\mu = Cos\nu = 0$.

И такъ, количество теплоты, пріобрѣтаемое цилиндромъ, будетъ

$$-Kdt\int\frac{du}{dx}ds + Kdt\int\frac{du}{dx}ds = -Kdt\left(\frac{du_1}{dx} - \frac{du_0}{dx}\right)s,$$

гдѣ первый интегралъ относится къ основанію A, а второй къ основанію B; u_1 изображаетъ температуру основанія A, а u_0 температуру основанія B. Изобразивъ чрезъ Q предыдущее количество, получимъ

$$-Kdt\left(\frac{du_1}{dx} - \frac{du_0}{dx}\right)s = Q.$$

Положимъ теперь, что цилиндръ уже достигъ того состоянія, когда температуры различныхъ его точекъ сдѣлались неизмѣнными; тогда будетъ $Q = 0$, и слѣдовательно $\frac{du_1}{dx} = \frac{du_0}{dx}$. И такъ, въ этомъ случаѣ, выраженіе $-Kdt\frac{du_1}{dx}s$ изобразитъ количество теплоты, выходящей изъ цилиндра въ теченіи времени dt; если означимъ чрезъ qdt это количество, то будетъ $-K\frac{du_1}{dx}s = q$, и, въ допущенномъ предположеніи, получимъ $\frac{du}{dt} = 0$, $\frac{du}{dy} = 0$, $\frac{du}{dz} = 0$, чрезъ что уравненіе (1) обратится просто въ $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$, откуда $u = ax + b$. Для опредѣленія величинъ a и b, изобразимъ длину цилиндра AB чрезъ l, и замѣтимъ, что для $x = 0$, должно быть $u = 1$, а для $x = l$, $u = 0$, почему $b = 1$, $a = -\frac{1}{l}$, и предыдущее уравненіе приметъ видъ $u = \frac{l-x}{l}$, $\frac{du}{dx} = -\frac{1}{l}$. Слѣдовательно $q = \frac{Ks}{l}$, откуда $K = \frac{ql}{s}$; полагая $l = 1$ и $s = 1$, найдется $K = q$. И такъ, Kdt выражаетъ количество теплоты, выходящей изъ цилиндра въ продолженіи мгновенія dt; слѣдовательно, *теплопроводимость K изображаетъ количество теплоты, проходящей въ единицу времени сквозь единичную площадь сѣченія цилиндра, имѣющаго высоту равную единицѣ, предполагая, что одно основаніе нагрѣвается до $+1^0$, а другое имѣетъ температуру 0^0, и сверхъ того, что температуры цилиндра достигли уже неизмѣняемаго состоянія, а боковая его поверхность не пропускаетъ теплоты.*

Conductibilité extérieure или pouvoir émissif. Наружная теплопроводимость. Количество теплоты, испускаемой въ единицу времени единичною поверхностію тѣла, нагрѣтой до $+1^0$, въ окружающую средину, которой температура равна 0^0.

CONDUITE (TUYAU DE). (Гидрав.) **ВОДОПРОВОДНАЯ ТРУБА.**

CONE. (Геом.) **КОНУСЪ; КЕГЛЯ.** *Cône droit; прямой конусъ.* Въ Начальной Геометріи прямымъ конусомъ называется тѣло, образуемое обращеніемъ прямоугольнаго треугольника SAC (черт. 18 Листъ IV) около неподвижной его стороны SC. При такомъ движеніи, точка A стороны AC описываетъ окружность круга, площадь $ABDH$ котораго называется *основаніемъ конуса* (*base du cône*). Сторона же SA описываетъ *выпуклую* или *боковую поверхность конуса* (*surface convexe du cône*). Точка S называется *вершиною конуса* (*sommet du cône*); линія SC *осью* или *высотою* (*axe* или *hauteur*), а SA *стороною, ребромъ* или *апотемою* (*côté, arête* или *apothème*).

Въ Геометріи доказываютъ, что объёмъ конуса равняется основанію, помноженному на $\frac{1}{3}$ высоты, а боковая поверхность, окружности основанія, помноженной на $\frac{1}{2}$ стороны конуса.

Cône tronqué, tronc de cône, curticone. Отсѣченный, усѣченный, отрѣзной конусъ. Такъ называется тѣло $ABDHabdh$ (черт. 18), которое получимъ, когда отсѣчемъ отъ конуса $SABDH$, плоскостію параллельною его основанію, конусъ *Sabdh*. Линія cC именуется *высотою* отсѣченнаго конуса, aA его *стороною*, а площади круговъ $ABDH$ и $abdh$ его *основаніями*, *нижнимъ* и *верхнимъ* или *бóльшимъ* и *мéньшимъ*.

Можно также предположить, что отсѣченный конусъ образуется обращеніемъ трапеціи $cCAa$ около неподвижной ея стороны cC.

Если изобразимъ чрезъ R и r радіусы основаній разсматриваемаго прямаго усѣченнаго конуса, чрезъ h его высоту, и чрезъ π отношеніе окружности къ діаметру, то объёмъ усѣченнаго конуса выразится произведеніемъ $\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2)$, а его боковая поверхность чрезъ $\pi c(R+r)$, разумѣя подъ c его сторону aA.

Cône oblique или cône scalène. Косой конусъ. Тѣло, образуемое обращеніемъ какого ни есть косоугольнаго треугольника около которой нибудь изъ его сторонъ, предполагаемой неподвижною. —

Когда ось SC (черт. 18 листъ IV) какого ни есть конуса будетъ болѣе радіуса CA его основанія, то конусъ называется *остроугольнымъ (acutangle)*; если же $SC < CA$, то конусъ именуется *тупоугольнымъ (obtusangle)*; наконецъ, когда $SC = CA$, то конусъ принимаетъ названіе *прямоугольнаго (rectangle)*. —

Въ обширномъ смыслѣ, *конусомъ* называется тѣло, образуемое движеніемъ прямой, проходящей чрезъ неподвижную точку (вершину конуса), и опирающейся на какую ни есть кривую линію. Такимъ образомъ произойдутъ двѣ *коническія поверхности, противуположенныя вершинами (surfaces côniques verticalement opposées* или *apposées par le sommet)*. См. CONIQUE (SURFACE).

CONE DE LUMIÈRE, CONE D'OMBRE. (Опт.) **КОНУСЪ СВѢТА, КОНУСЪ ТѢНИ.** Когда лучи свѣта, исходя изъ одной точки, падаютъ на поверхность опредѣленной величины, то совокупность сихъ лучей образуетъ *конусъ свѣта*, котораго вершина находится въ свѣтящейся точкѣ. Если передъ свѣтящимся тѣломъ будетъ находиться другое, непрозрачное, то по ту сторону сего послѣдняго образуется пространство неосвѣщенное, называемое *конусомъ тѣни*; таково, напримѣръ, во время луннаго затмѣнія, пространство между землею и луною.

CONFOCAL. (Геом.) **ОДНОФОКУСНЫЙ, СОФОКУСНЫЙ.** *Paraboles confocales*; *однофокусныя параболы*; параболы, имѣющія общій фокусъ.

CONFONDRE (SE). (Геом.) **СОВМѢЩАТЬСЯ, СОВПАДАТЬ.** *Ces deux figures se confondent par la superposition*; *эти двѣ фигуры совмѣщаются чрезъ наложеніе*. См. COINCIDER.

CONGRU. (Теор. Чис.) **РАВНООСТАТОЧНЫЙ.** Когда разность двухъ цѣлыхъ чиселъ b и c (положительныхъ или отрицательныхъ) дѣлится на-цѣло на другое цѣлое a, то числа b и c называются *равноостаточными* относительно a; въ противномъ случаѣ, они именуются *разноостаточными (incongrus)*. Число a принимаетъ названіе *модуля (module)*. И такъ, $+12$ и $+5$ *равноостаточны* относительно модуля 7, ибо $\frac{12-5}{7} =$ цѣлому числу $= 1$. Равнымъ образомъ, $+32$ и -12 *равноостаточны* по модулю 11, а *разноостаточны* въ отношеніи модуля 7.

Равноостаточность двухъ чиселъ изображается знакомъ $\equiv$, поставленнымъ между ними; модуль, заключенный въ скобкахъ, пишется послѣ знака $\equiv$; напримѣръ $12 \equiv 5$ (mod. 7) или $12-5 \equiv 0$ (mod. 7). Такого рода уравненіе называется *остаточнымъ сравненіемъ*, *равноостаточностію*, или просто *сравненіемъ (congruence)*. Читается оно слѣдующимъ образомъ: 12 *равноостаточно съ* 5 *по модулю* 7.

Приведенное здѣсь знакоположеніе было употреблено знаменитымъ *Гауссомъ (Gauss)* въ его сочиненіи: *Disquisitiones arithmeticae*, и принято нынѣ многими математиками.

CONGRUENCE. (Теор. Чис.) **ОСТАТОЧНОЕ СРАВНЕНІЕ, РАВНООСТАТОЧНОСТЬ, СРАВНЕНІЕ.** Равенство между остатками. Смот. CONGRU. *Congruence du premier degré*; *равноостаточность первой степени*, напримѣръ $5x \equiv 3$ (mod. 7) и вообще $ax \equiv c$ (mod. b), гдѣ a, b, c изображаютъ цѣлыя числа. Послѣднее сравненіе равнозначуще съ неопредѣленнымъ уравненіемъ первой степени $ax - by = c$. Относительно же его разрѣшенія, См. CONTINUE (FRACTION). *Congruence du second degré*; *равноостаточность второй степени*; таковы напримѣръ слѣдующія: $5x^2 \equiv 3$ (mod. 7), $ax^2 \equiv b$ (mod. c), $ax^2 + by^2 \equiv 0$ (mod. c) и проч. Смот. статьи RÉSIDU, RESTE, RACINE PRIMITIVE, FERMAT (THÉORÊME DE).

Предложимъ теперь главныя правила, относящіяся къ остаточнымъ сравненіямъ.

1°. Когда два числа равноостаточны съ третьимъ по одному и тому же модулю, то они равноостаточны также и между собою. И такъ, изъ сравненій

$$A \equiv C \ (\mathrm{mod.}\, p), \quad B \equiv C \ (\mathrm{mod.}\, p),$$

выводимъ

$$A \equiv B \ (\mathrm{mod.}\, p).$$

2°. Если имѣемъ рядъ сравненій

$$A \equiv a, \ B \equiv b, \ C \equiv c \ldots . \ (\mathrm{mod.}\, p),$$

то можемъ вывести изъ нихъ

$$A + B + C + \ldots\ldots \equiv a + b + c + \ldots\ldots *)$$

Положивъ въ частности $A = B = C = \ldots\ldots$, $a = b = c = \ldots\ldots$, найдемъ

$$kA \equiv ka,$$

разумѣя подъ k число слагаемыхъ членовъ $A, B, C\ldots$.

Изъ двухъ сравненій $A \equiv a$, $B \equiv b$, получимъ также

$$A - B \equiv a - b.$$

3°. Предполагая какъ выше $A \equiv a$, $B \equiv b$, $C \equiv c\ldots..$ найдется

$$ABC\ldots. \equiv abc\ldots.;$$

слѣдовательно, принявъ $A = B = C = \ldots.$ и $a = b = c = \ldots.$, и допустивъ, что число количествъ $A, B, C\ldots.$ равно k, получимъ

$$A^k \equiv a^k.$$

4°. Пусть будетъ X цѣлая функція количества x, вида $Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots$, гдѣ $A, B, C\ldots$ изображаютъ числа цѣлыя, положительныя или отрицательныя, а $a, b, c\ldots$ цѣлыя положительныя числа. Если припишемъ количеству x значенія равноостаточныя между собою по извѣстному модулю, то и соотвѣтственныя величины функціи X будутъ также равноостаточны.

И такъ, если $f \equiv g \ (\mathrm{mod.}\, p)$, то, въ слѣдствіе предыдущаго, будетъ $f^a \equiv g^a$, $Af^a \equiv Ag^a$; точно такимъ образомъ получимъ $Bf^b \equiv Bg^b$ и проч. и наконецъ

$$Af^a + Bf^b + Cf^c + \ldots. \equiv Ag^a + Bg^b + Cg^c + \ldots \ (\mathrm{mod.}\, p).$$

Всѣ эти правила, а равно и другія, относящіяся къ остаткамъ, доказываются весьма просто, основываясь на томъ замѣчаніи, что всякое остаточное сравненіе $L \equiv M \ (\mathrm{mod.}\, p)$ можетъ быть написано въ видѣ обыкновеннаго уравненія такимъ образомъ: $L = M + kp$, гдѣ подъ k разумѣемъ число цѣлое, положительное или отрицательное.

*) Для сокращенія мы не пишемъ модуля, который предполагаемъ вездѣ одинаковымъ.

Многія теоремы, предлагаемыя въ Ариѳметикѣ, могутъ быть доказаны весьма легко посредствомъ приведенныхъ здѣсь предложеній объ остаточныхъ сравненіяхъ; напримѣръ, теоремы объ дѣлимости чиселъ на 9, на 11 и проч. Чтобы доказать извѣстное правило о дѣлимости чиселъ на 9, пусть будетъ данное число $N = a + 10b + 100c + 1000d + \ldots.$ Замѣтивъ, что $10 \equiv 100 \equiv 1000 \equiv \ldots\ldots \equiv 1 \ (\mathrm{mod.}\, 9)$, получимъ, въ слѣдствіе 4-го предложенія, $N \equiv a + b + c + d + \ldots.. \ (\mathrm{mod.}\, 9)$. Изъ этого слѣдуетъ, что если сложимъ цифры $a, b, c\ldots$ даннаго числа N, не принимая въ соображеніе ихъ разрядовъ, то полученная сумма и предложенное число N, будутъ равноостаточны по модулю 9. И такъ, если N дѣлится нацѣло на 9, то и сумма цифръ, составляющихъ N, будетъ дѣлиться на 9; если же N не дѣлится, то и сумма цифръ дѣлиться не будетъ. То же самое правило справедливо и для дѣлителя 3.

Для дѣлителя 11, замѣчаемъ что

$$10 \equiv -1, \quad 100 \equiv +1, \quad 1000 \equiv -1\ldots.. \ (\mathrm{mod.}\, 11),$$

и вообще

$$10^{2k} \equiv 1 \ (\mathrm{mod.}\, 11), \quad 10^{2k+1} \equiv -1 \ (\mathrm{mod.}\, 11);$$

слѣдовательно, представивъ какъ и выше предложенное число въ видѣ $a + 10b + 100c + 1000d + \ldots.$, получимъ

$$a + 10b + 100c + 1000d + \ldots. \equiv a - b + c - d + \ldots.. \ (\mathrm{mod.}\, 11);$$

это сравненіе выражаетъ извѣстное всѣмъ правило для узнанія, дѣлится ли безъ остатка предложенное число N на 11.

CONGRUENCE. (Геом.) **СОВПАДАЕМОСТЬ.** Въ этомъ смыслѣ *congruence* вышло теперь изъ употребленія, а употребляютъ въ томъ же значеніи слово COINCIDENCE (Смот.).

CONGRUITÉ. (Геом.) **РАВЕНСТВО ПО СОВПАДЕНІЮ.** Чтобы ознакомить нашихъ читателей съ *способомъ равенствъ по совпаденію*, придуманнымъ *Лейбницемъ*, и имѣющимъ цѣлію различныя геометрическія изслѣдованія, мы приведемъ, въ переводѣ, отрывокъ объ этомъ предметѣ изъ Göttingische gelehrte Anzeigen; 194, 195 Stück. Den 4. December 1834. Авторитетъ имени, знаменитаго въ лѣтописяхъ точныхъ наукъ, долженъ, кажется, придать во мнѣніи математиковъ нѣкоторую значительность способу, о которомъ говоримъ. Хотя кругъ приложеній способа Лейбница, въ настоящемъ его видѣ, и весьма ограниченъ, но, при новыхъ усиліяхъ, можно надѣяться что онъ распространится, и даже приведетъ къ доказательствамъ истинъ геометрическихъ самымъ простымъ и легкимъ путемъ. Вотъ обѣщанный отрывокъ:

„Въ числѣ уцѣлѣвшихъ отрывковъ, одинъ изъ примѣчательнѣйшихъ заключаетъ въ себѣ опытъ новаго знакоположенія въ Геометріи, предложеннаго Лейбницемъ. Уже прежде было извѣстно, что Лейбницъ занимался изслѣдованіями этого рода; но не знали какимъ образомъ онъ былъ приведенъ къ своимъ выводамъ. Лейбницъ, въ одномъ письмѣ къ Гугенсу, упоминаетъ объ нѣкоторомъ Разсужденіи по этому предмету, которое онъ послалъ сему послѣднему. Разсужденіе, о которомъ говоримъ, дѣйствительно найдено между бумагами Гугенса, и сообщено намъ издателемъ книги: *Christiani Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicae et philosophicae. Ex manuscriptis in bibliotheca Academiae Lugduno-Batavae servatis edidit P. J. Uylenbroek* и проч. *in*-4. 1833 г. Оно показалось тѣмъ болѣе замѣчательнымъ рецензенту, что онъ слышалъ отъ знаменитѣйшаго математика нашего вѣка нѣкоторыя мнѣнія о Геометріи, имѣющія большое сходство съ нѣкоторыми изъ тѣхъ, о которыхъ идетъ рѣчь. Лейбницъ, говоря о своемъ открытіи, придаетъ ему большую важность. Онъ думаетъ, что если это открытіе обработается надлежащимъ образомъ, то можно будетъ описать сложную машину со всѣми ея частями, ея употребленіе и движенія безъ пособія чертежей и моделей, и не имѣя надобности дополнять описанія воображеніемъ. Руководствуясь тѣмъ же способомъ, могли бы описать предметы изъ Естественной Исторіи, какъ то: растенія, деревья, животныхъ и проч. не срисовывая ихъ. За симъ слѣдуютъ примѣчательныя слова Лейбница: Mais comme je ne remarque pas que quelque autre ait jamais eu la meme pensée, ce qui me fait craindre qu'elle ne se perde, si je n'ay pas le tems de l'achever; j'adjouteray ici un essay qui me paroist considerable, et qui suffira au moins à rendre mon dessein plus croyable et plus aisé à concevoir, afin que, si quelque hazard en empeche la perfection à present, cecy serve de monument à la postérité, et donne lieu à quelque autre d'en venir à bout. Далѣе Лейбницъ показываетъ, какимъ образомъ новое его знакоположеніе можетъ быть приложено къ Геометріи. Первыя буквы алфавита означаютъ данныя точки, а послѣднія, искомыя. Сверхъ того онъ вводитъ знакъ для изображенія *совпаденія (congruité)* двухъ точекъ*); мы употребимъ въ этомъ смыслѣ знакъ равенства въ вертикальномъ положеніи. И такъ, выраженіе $a\ b\ c \ || \ d\ e\ f$ означаетъ, что точки a, b, c, могутъ быть соотвѣтственно совмѣщены съ точками d, e, f, чрезъ что относительное положеніе, какъ точекъ a, b, c, такъ и точекъ d, e, f не перемѣнится, ибо предполагается, что первыя три точки, а равно и три послѣднія, связаны между собою неизмѣняемыми линіями, кривыми или прямыми. Должно также замѣтить, что Лейбницъ приводитъ прежде опредѣленіе плоскости, а потомъ уже линіи. Теперь онъ предлагаетъ знакоположенія для неопредѣленнаго пространства, для шаровой поверхности, для плоскости, круга, прямой линіи и точки. *Неопредѣленное пространство* выражается чрезъ $a \ || \ x$. Смыслъ этого знакоположенія тотъ, что должно искать всѣ точки, которыя могутъ совмѣститься съ точкою a; но такъ какъ всякая точка удовлетворяетъ этому требованію, то мѣстомъ всѣхъ x-овъ будетъ неопредѣленное пространство. Въ выраженіи $ab \ || \ ax$, мѣстомъ всѣхъ x-овъ будетъ *поверхность шара*, имѣющаго своимъ центромъ точку a. Далѣе, равенство по совпаденію $ax \ || \ bx$ означаетъ, что двѣ точки a и b даны, а ищется третья точка x, имѣющая одинаковое положеніе относительно каждой изъ точекъ a и b; то есть, что точку b можно совмѣстить съ a, не нарушая чрезъ то относительнаго ихъ положенія въ разсужденіи точки x. Мѣстомъ всѣхъ x-овъ будетъ *плоскость*, простирающаяся въ безконечность**). Выраженіе $abc \ || \ abx$ означаетъ что три точки a, b, c даны, а ищемъ четвертую x, которая бы имѣла то же положеніе относительно точекъ a и

*) Лейбницъ употреблялъ знакъ ȣ; и такъ abc ȣ ABC означаетъ, что точки A, B, C могутъ быть соотвѣтственно совмѣщены съ точками a, b, c, или, иначе, что треугольникъ ABC равенъ треугольнику abc, при чемъ уголъ $A =$ углу a, уголъ $B =$ углу b, уголъ $C =$ углу c. *Примѣч. Соч. Лекс.*

**) Извѣстный Французскій математикъ *Фурье*, которому воззрѣніе Лейбница на Геометрію не могло быть извѣстно, опредѣлялъ плоскость точно такъ же. Онъ называлъ *плоскостію такую поверхность, коей всѣ точки равно удалены отъ двухъ*

b, какъ и точка c. Мѣстомъ всѣхъ x-овъ будетъ *кругъ*. Это опредѣленіе круга не заимствуется понятіями о плоскости и о прямой линіи; ибо, для опредѣленія положенія одной точки относительно другой, нѣтъ надобности въ прямой линіи, а стоитъ только вообразить, что эти точки связаны между собою неизмѣняемымъ образомъ посредствомъ линіи, произвольнаго вида. Отсюда, можемъ сказать, что двѣ линіи имѣютъ то же положеніе одна относительно другой, какъ и двѣ другія, когда двѣ первыя могутъ быть связаны такою линіею, которая совпадаетъ съ линіею, связывающею двѣ другія. И такъ, выраженіе $ax \,||\, bx \,||\, cx$ означаетъ, что три точки a, b, c даны, а ищется четвертая x, имѣющая одинаковое положеніе относительно всѣхъ трехъ a, b, c. Мѣстомъ всѣхъ x-овъ будетъ *прямая линія*. Выраженіе $ax \,||\, bx \,||\, cx \,||\, dx$ означаетъ, что четыре точки a, b, c, d даны, а ищется четвертая x, которая бы имѣла одинаковое положеніе относительно каждой изъ четырехъ a, b, c, d. Мѣстомъ всѣхъ x-овъ въ этомъ случаѣ будетъ *точка*. Вотъ основанія новаго знакоположенія, предлагаемаго Лейбницемъ. Чтобы показать приложенія своего способа, онъ приводитъ доказательства нѣкоторыхъ предложеній; напримѣръ, того, что *сѣченіе шаровой поверхности плоскостію будетъ кругъ*. Выраженіе для шаровой поверхности есть $ac \,||\, ax$, а для плоскости, $ax \,||\, bx$; отсюда слѣдуетъ $ac \,||\, bc$, и, въ слѣдствіе перваго выраженія, $bc \,||\, ax$, откуда еще $bc \,||\, bx$. Если совокупимъ три выраженія $ab \,||\, ab$, $bc \,||\, bx$, $ac \,||\, ax$, то получимъ равенство по совпаденію $abc \,||\, abx$, которое принадлежитъ *кругу*. Въ одномъ письмѣ къ Гугенсу, Лейбницъ дѣлаетъ еще замѣчаніе, относящееся къ приложенію этого способа къ Аналитической Геометріи; вотъ его слова: Je puis exprimer parfaitement par ce calcul toute la nature ou definition de la figure (ce que l'Algèbre ne fait jamais, car disant que $x^2 + y^2 = a^2$ est l'équation d'un cercle, il faut expliquer par la figure ce que c'est que ce x et y, c'est-à-dire que ce sont des lignes droites, dont l'une est perpendiculaire à l'autre, et l'une commence par le centre, l'autre par la circonférence de la figure). Et je le puis en toutes les figures, puisqu'elles se peuvent expliquer toutes par des sphériques, plans, circulaires et droites, dans les quelles je l'ay fait. Car les points des autres courbes se peuvent trouver par des droites et cercles etc." (Томъ 1 стр. 16).

Для дальнѣйшихъ подробностей отсылаемъ къ упомянутой выше книгѣ Уйленброка, Томъ 2, стр. 6 и слѣдующія.

CONIQUE. (Геом.) **КОНИЧЕСКІЙ, КЕГЕЛЬНЫЙ.** Принадлежащій, относящійся къ конусу. Иногда это прилагательное употребляется во множественномъ числѣ, въ видѣ существительнаго: *les coniques*; въ такомъ случаѣ разумѣютъ, или *коническія сѣченія*, или *трактатъ о коническихъ сѣченіяхъ*. *Sections coniques*, *коническія сѣченія*, то есть *эллипсъ*, *парабола* и *ги°рбола*. Къ коническимъ сѣченіямъ можно еще причислить *точку*, *прямую линію*, *систему двухъ прямыхъ* и *кругъ*.

Разсмотримъ теперь при какихъ положеніяхъ, сѣкущей плоскости образуются различныя коническія кривыя. Для простоты предполагаемъ, что имѣемъ прямой конусъ $SABDH$ (черт. 19 Листъ IV), съ круговымъ основаніемъ $ABDH$. Положимъ сперва, что сѣкущая плоскость OHE параллельна сторонѣ AS конуса, и вмѣстѣ съ тѣмъ перпендикулярна къ плоскости треугольника SAB, который изображаетъ сѣченіе конуса плоскостію, проходящею чрезъ ось SC. Пусть будетъ $OhHEe$ кривая пересѣченія; чрезъ какую ни есть точку h этой кривой проводимъ плоскость, параллельную основанію конуса; такимъ образомъ получится, какъ извѣстно изъ Начальной Геометріи, кругъ $abeh$. Изобразимъ чрезъ x линію Ok, чрезъ y, линію kh. По свойству круга, имѣемъ $y^2 = \overline{ak} \times \overline{kb} = \overline{AK} \times \overline{kb}$; но изъ подобныхъ треугольниковъ Okb, OKB, получаемъ $\overline{Ok} : \overline{kb} :: \overline{OK} : \overline{KB}$, откуда $\overline{kb} = \frac{\overline{KB} \times \overline{Ok}}{\overline{OK}} = \frac{\overline{KB}}{\overline{OK}}.x$. Слѣдовательно $y^2 = \frac{\overline{AK} \times \overline{KB}}{\overline{OK}}.x$; но $\overline{AK} \times \overline{KB} = \overline{KH}^2$ почему и найдемъ $y^2 = \frac{\overline{KH}^2}{\overline{OK}}.x$. Замѣтимъ теперь, что KH и OK изображаютъ величины постоянныя; и такъ, если положимъ $\frac{\overline{KH}^2}{\overline{OK}} = p$, то по-

---

постоянныхъ точекъ. Это опредѣленіе очевидно равнозначуще съ опредѣленіемъ, предложеннымъ Лейбницемъ, и которое выражается *равенствомъ по совпаденію* $ax \,||\, dx$. Основываясь на этомъ опредѣленіи, весьма легко вывести уравненіе плоскости.

Примѣч. Соч. Лекс.

лучимъ для кривой $OhHEe$ уравненіе $y^2 = px$, гдѣ p означаетъ величину постоянную.

Найденная кривая называется *параболою*, а постоянная величина p ея *параметромъ*.

Положимъ теперь, что сѣкущая плоскость, перпендикулярная какъ и прежде къ треугольнику SAB (Черт. 20 Листъ IV), пересѣкаетъ обѣ стороны AS и SB конуса. Получится сомкнутая кривая пересѣченія $OhO'e$; чрезъ какую ни есть точку h этой кривой проведемъ параллельно основанію $ABDH$ плоскость, которая разсѣчетъ поверхность конуса по кругу $abhe$. Положивъ $Ok = x$, $kh = y$, и сверхъ того $OO' = 2a$, $OP = l$, $O'Q = m$, гдѣ a, l, m изображаютъ величины постоянныя, найдемъ $y^2 = \overline{ak} \times \overline{kb}$; изъ подобія же треугольниковъ $O'ka$ и $OO'P$, а также Okb и $OO'Q$, выводимъ

$$\overline{ak} = \frac{\overline{kO'} \times \overline{OP}}{\overline{OO'}} = \frac{l(2a-x)}{2a}$$

$$\overline{kb} = \frac{\overline{kO} \times \overline{O'Q}}{\overline{OO'}} = \frac{mx}{2a};$$

слѣдовательно

$$y^2 = \frac{lm}{4a^2}(2ax - x^2);$$

полагая для простоты $\frac{lm}{4} = b^2$, получимъ

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2).$$

Кривая, опредѣляемая этимъ уравненіемъ, называется *эллипсомъ*; постоянное количество a именуется *большою*, а b, *малою полу-осью* эллипса.

Наконецъ, предположимъ что сѣкущая плоскость ODE, (Черт. 21 Листъ IV), перпендикулярная къ плоскости треугольника SAB, будетъ параллельна оси SC конуса. Очевидно, что эта плоскость пересѣчетъ какъ конусъ $SABDE$, такъ и противуположный ему $SA'B'$, и что такимъ образомъ получатся двѣ кривыя $OhDEe$ и $O'D'E'$. Удержимъ прежнія наименованія, то есть примемъ $\overline{Ok} = x$, $\overline{kh} = y$, $\overline{OO'} = 2a$, $\overline{OP} = l$, $\overline{O'Q} = m$. Во первыхъ найдется, какъ и выше, $y^2 = \overline{ak} \times \overline{kb}$; потомъ, чрезъ сравненіе подобныхъ треугольниковъ $O'ak$ и $O'PO$, также Okb и OQO', получимъ

$$\overline{ak} = \frac{\overline{OP} \times \overline{O'k}}{\overline{OO'}} = \frac{l(2a+x)}{2a}$$

$$\overline{kb} = \frac{\overline{O'Q} \times \overline{Ok}}{\overline{OO'}} = \frac{mx}{2a};$$

слѣдовательно

$$y^2 = \frac{lm}{4a^2}(2ax + x^2)$$

и полагая $\frac{lm}{4} = b^2$, найдемъ

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2).$$

Вотъ уравненіе кривой, которая называется *иперболою*. Она состоитъ изъ двухъ равныхъ и противоположныхъ частей $OhDEe$ и $O'D'E'$, простирающихся въ безконечность. Если въ выведенномъ сей-часъ уравненіи будемъ приписывать x-су значенія бо́льшія $2a$, но отрицательныя, то найденное уравненіе будетъ опредѣлять часть $O'D'E'$.

Для дальнѣйшихъ подробностей о каждой изъ коническихъ кривыхъ, отсылаемъ читателей къ статьямъ: PARABOLE, ELLIPSE, HYPERBOLE.

Мы сказали выше, что къ коническимъ сѣченіямъ можно причислить точку, прямую линію, систему двухъ прямыхъ и кругъ. *Точка* получится, когда сѣкущая плоскость, не пересѣкая конической поверхности и не касаясь къ ней, пройдетъ чрезъ вершину конуса. Если плоскость будетъ касательная къ конусу, то касаніе произойдетъ по *прямой линіи*, то есть, по одному ребру конуса. Сѣченіе конуса плоскостію, проходящею чрезъ его ось, доставитъ систему *двухъ прямыхъ*. Наконецъ, получится *кругъ*, когда примемъ сѣкущую плоскость параллельною основанію конуса.

Изобрѣтеніе коническихъ сѣченій принадлежитъ Школѣ *Платона*; даже нѣкоторые авторы приписываютъ это открытіе самому *Платону*. Ученики и сотоварищи его *Аристей*, *Эвдоксъ*, *Менехмъ*, *Диностратъ* и другіе съ особеннымъ стараніемъ изучали свойства коническихъ кривыхъ, и не мало способствовали къ усовершенствованію этой новой отрасли Геометріи. Аристей составилъ о коническихъ сѣченіяхъ пять книгъ, о которыхъ древніе писатели отзывались съ большею похвалою; но онѣ не дошли до насъ. Изъ трудовъ Менехма остались намъ два рѣшенія задачи объ удвоеніи куба посредствомъ коническихъ сѣченій. Первое рѣшеніе приводитъ къ построенію двухъ параболъ, имѣющихъ общую вершину, а оси взаимно перпендикулярныя; параметръ одной параболы долженъ быть равенъ сторонѣ даннаго куба, а параметръ другой, удвоенной сторонѣ. Абсцисса, соотвѣтствующая точкѣ пересѣченія двухъ параболъ, будетъ искомая сторона удвоеннаго куба Смот. CONSTRUCTION DES ÉQUATIONS. Другое рѣшеніе основано на пересѣченіи параболы съ равностороннею иперболою между своими ассимптотами. — Послѣ Аристея *Эвклидъ* написалъ четыре книги о коническихъ сѣченіяхъ. Наконецъ, *Аполлоній*, жившій за 200 лѣтъ до Р. Х., собравъ всё извѣстное до него объ этомъ предметѣ, и присоединивъ къ тому собственныя свои изслѣдованія, составилъ подробный трактатъ *о коническихъ сѣченіяхъ*, раздѣленный на восемь книгъ; этотъ трудъ, въ переводахъ, дошелъ до насъ почти въ цѣлости. Знаменитый *Галлей*, свѣривъ съ большимъ тщаніемъ всё что осталось отъ текста, писаннаго на Греческомъ языкѣ, съ переводами на Арабскій и на Латинскій, и составивъ по плану Аполлонія утраченную восьмую книгу, напечаталъ на Латинскомъ языкѣ великолѣпное изданіе этого трактата. Книга его издана въ Оксфортѣ въ 1710 году. Впослѣдствіи многіе математики занимались теоріею коническихъ сѣченій; наиболѣе извѣстные своими трудами по этому предмету: *Лагиръ, де Гине* (*de Guisnée*), Маркизъ *де Л'Опиталь, Ла Шапель, Декартъ, Ферматъ, Нютонъ, Эйлеръ, Крамеръ*.

SECTIONS CONIQUES D'UN ORDRE SUPÉRIEUR. Коническія сѣченія высшихъ порядковъ. Такъ называются кривыя пересѣченія плоскости съ конусомъ, у котораго основаніе есть кругъ высшаго порядка. Смот. CERCLE DE DEGRÉS SUPÉRIEURS. Положимъ напримѣръ, что основаніе прямаго конуса есть кругъ *втораго порядка*, опредѣляемый уравненіемъ $y^3 = 2ax^2 - x^3$. Въ такомъ случаѣ найдутся слѣдующія *коническія кривыя втораго порядка*:

Парабола, опредѣляемая уравненіемъ $y^3 = px^2$. Смот. CUBIQUE (PARABOLE).

Эллипсъ, опредѣляемый уравненіемъ $y^3 = px^2 - qx^3$.

Ипербола, для которой найдется уравненіе $y^3 = px^2 + qx^3$.

Въ этихъ трехъ уравненіяхъ p и q изображаютъ постоянныя положительныя величины, зависящія отъ діаметра $2a$, и отъ положенія сѣкущей плоскости.

CONIQUE (SURFACE). КОНИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ. Когда прямая обращается около неподвижной точки, и непрестанно опирается на какую ни есть кривую линію, то образуетъ поверхность, именуемую *коническою*. Пусть будутъ

$$(1)\quad \begin{cases} x - \alpha = a(z-\gamma) \\ y - \beta = b(z-\gamma) \end{cases}$$

уравненія производящей прямой линіи, въ которыхъ α, β, γ изображаютъ координаты вершины конуса. Количества α, β, γ будутъ постоянны при всѣхъ положеніяхъ производящей прямой; напротивъ того, a и b будутъ измѣняться при различныхъ ея положеніяхъ. Такъ какъ величины a и b остаются постоянными для одного и того же положенія производящей прямой, а измѣняются при переходѣ отъ одного положенія въ другое, то одно изъ этихъ количествъ будетъ зависѣть отъ другаго. И такъ $b = \varphi(a)$, или

$$\frac{y-\beta}{z-\gamma} = \varphi\left(\frac{x-\alpha}{z-\gamma}\right),$$

гдѣ φ изображаетъ произвольную функцію, которую можно опредѣлить посредствомъ уравненій *направляющей кривой* (*directrice*). Если исключимъ произвольную функцію φ [Смот. ARBITRAIRES (ÉLIMINATION DES FONCTIONS)], то получимъ слѣдующее уравненіе коническихъ поверхностей въ частныхъ дифференціалахъ:

$$(x-\alpha)\frac{dz}{dx} + (y-\beta)\frac{dz}{dy} = z - \gamma.$$

Положимъ, напримѣръ, что направляющая кривая есть *кругъ*; уравненія сего послѣдняго, разсматриваемаго въ пространствѣ, будутъ:

$$(2)\quad \begin{cases} (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2 \\ mx + ny + z = C. \end{cases}$$

Первое изъ сихъ уравненій принадлежитъ шару, коего радіусъ равенъ r, а координаты центра x_0, y_0, z_0; второе, опредѣляющее плоскость, заключаетъ въ себѣ три постоянныя величины m, n и C. Такъ какъ въ обоихъ уравненіяхъ мы сохранили однѣ буквы x, y, z, то совокупность сихъ уравненій опредѣлитъ пересѣченіе шара плоскостію, то есть, требуемый кругъ. Положимъ для простоты, что центръ шара совпадаетъ съ вершиною конуса; въ такомъ случаѣ $x_0 = \alpha$, $y_0 = \beta$, $z_0 = \gamma$, и слѣдовательно первое изъ уравненій (2) приметъ видъ

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2.$$

Совокупляя это уравненіе съ формулами (1), получимъ

$$x - \alpha = \frac{ar}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}$$
$$y - \beta = \frac{br}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}$$
$$z - \gamma = \frac{r}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Если подставимъ теперь эти величины въ уравненіе $mx + ny + z = C$, то найдемъ искомое отношеніе между a и b, именно

$$m\left(\alpha + \frac{ar}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}\right) + n\left(\beta + \frac{br}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}\right) + \gamma + \frac{r}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} = C,$$

или

$$(ma + nb + 1)\, r = (C - m\alpha - n\beta - \gamma)\sqrt{1 + a^2 + b^2}.$$

Очевидно, что для полученія искомаго уравненія конической поверхности между прямоугольными координатами, стоитъ только въ последнемъ уравненіи, вмѣсто a, написать $\frac{x - \alpha}{z - \gamma}$, а вмѣсто b, $\frac{y - \beta}{z - \gamma}$.

CONJECTURER (ART DE). См. ARS CONJECTANDI.

CONJOINTE (RÈGLE). (Ариѳ.) **СЛОЖНОЕ ТРОЙНОЕ** или **ЦѢПНОЕ ПРАВИЛО.** Правило, служащее для опредѣленія отношенія двухъ чиселъ, когда отношенія каждаго изъ сихъ послѣднихъ къ другимъ, извѣстны. Цѣпное правило основано на геометрическихъ пропорціяхъ; рѣшеніе слѣдующаго вопроса покажетъ въ чёмъ состоитъ это правило:

Спрашивается, сколько надобно заплатить за 25 саженъ земляной работы, зная что за 86 англійскихъ футовъ той же работы заплачено 300 рублей?

Сперва надобно обратить англ. футы въ сажени; но извѣстно, что 7 фут. $=$ 1 саж.; слѣдовательно, составляемъ пропорцію

$$7 \text{ фут.} : 1 \text{ саж.} = 86 \text{ ф.} : \frac{86}{7} \text{ саж.}$$

изъ которой заключаемъ, что 86 англ. фут. $= \frac{86}{7}$ саж. Далѣе, говоримъ: если за $\frac{86}{7}$ саж. заплачено 300 руб., то сколько слѣдуетъ заплатить за 25 саженъ, что̀ приводитъ насъ къ пропорціи

$$\frac{86}{7} \text{ саж.} : 300 \text{ руб.} = 25 \text{ саж.} : x;$$

величина x, равная $\frac{7 \times 25 \times 300}{86}$ рубл., будетъ искомая величина, и найдется

$$x = 610\frac{20}{43} \text{ рубля.}$$

Задачи о *переводѣ денегъ*, при извѣстномъ вексельномъ курсѣ, рѣшаются также посредствомъ цѣпнаго правила. Смот. CHANGE.

CONJONCTION. (Астр.) **СОЕДИНЕНІЕ.** Положеніе двухъ свѣтилъ или планетъ, при которомъ они имѣютъ одну и ту же долготу, или какъ долготу, такъ и широту равныя. Въ первомъ случаѣ соединеніе называется *видимымъ (apparente)*, а во второмъ — *истиннымъ (vraie)*. Если такое положеніе свѣтилъ разсматривается изъ солнца, то оно называется *геліоцентрическимъ соединеніемъ*; если же изъ земли, то *геоцентрическимъ*. Геоцентрическія соединенія планетъ съ солнцемъ бываютъ или *верхнія* или *нижнія*: первыя — когда солнце находится между землею и планетою, вторыя — когда планета находится между солнцемъ и землею, что̀ бываетъ съ Меркуріемъ и Венерою. Нижнія соединенія Меркурія и Венеры весьма важны въ Астрономіи, потому что посредствомъ ихъ весьма точно опредѣляется параллаксъ солнца, слѣдовательно разстояніе солнца отъ земли. Луна бываетъ каждый мѣсяцъ въ соединеніи съ солнцемъ, именно въ мгновеніе новолунія. Если это соединеніе послѣдуетъ въ узлахъ луннаго пути съ эклиптикою, или не болѣе 18° отъ нихъ, то послѣдуетъ затмѣніе солнца.

Въ Календаряхъ соединеніе означается знакомъ ☌. Соединенія планетъ и противустояніе ихъ съ солнцемъ вообще называются *сизигіями*. Время отъ одного соединенія или противустоянія до другаго, ближайшаго, называется *синодическимъ временемъ обращенія*.

CONJUGUÉ. (Геом.) **СОПРЯЖЕННЫЙ.** *Diamètres conjugués, сопряженные діаметры.* Смот. DIAMÈTRES.

CONJUGUÉE (OVALE). ОТДѢЛЬНЫЙ, СОПРЯЖЕННЫЙ ОВАЛЪ. Такъ называется *кругло-продолговатая* фигура, принадлежащая кривой линіи, и находящаяся въ ея плоскости, но отдѣльно отъ прочихъ частей этой самой кривой. *Отдѣльные овалы* встрѣчаются въ Алгебрическихъ кривыхъ, начиная съ кривыхъ третьяго порядка; таковъ, напримѣръ, оваль AB (черт. 22 Листъ IV), который отдѣленъ разстояніемъ AC отъ части DCE. Предположивъ $AC = b$, $BA = c$, $AP = x$, $PM = y$, уравненіе этой кривой будетъ:

$$y^2 = x(x-b)(x+c).$$

Иногда *сопряженный оваль* примыкаетъ къ кривой линіи. Напримѣръ, если предположимъ $AC = b = 0$, то предыдущее уравненіе обратится въ слѣдующее:

$$y^2 = x^2(x+c),$$

и кривая, опредѣляемая этимъ уравненіемъ, будетъ имѣть видъ, изображенный на чертежѣ 23 (Листъ IV). Въ такомъ случаѣ точка A будетъ *двойною*.

Point conjugué или isolé. Отдѣльная, сопряженная, уединенная точка. Такъ называется отдѣльная отъ кривой линіи точка, но коей координаты удовлетворяютъ уравненію этой самой кривой. Напримѣръ, предполагая въ предыдущемъ уравненіи $y^2 = x(x-b)(x+c)$, $c = 0$, увидимъ, что начало кординатъ, то есть A (черт. 22 Листъ IV) есть *отдѣльная точка*; и дѣйствительно, въ предположеніи $AB = c = 0$, фигура AB обращается въ одну точку. Для опредѣленія сопряженной точки по уравненію кривой, надобно вывести отношеніе $\frac{dy}{dx}$, и разсмотрѣть, для какой изъ системъ координатъ x и y, удовлетворяющихъ уравненію кривой, это отношеніе обратится въ мнимое количество, или приметъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$. И такъ, для кривой, опредѣляемой уравненіемъ $y^2 = x^2(x-c)$, получимъ $\frac{dy}{dx} = \frac{3x-2c}{2\sqrt{x-c}}$; для $x = 0$, $\frac{dy}{dx}$ обратится въ $\frac{-c}{\sqrt{-c}} = \sqrt{-c}$, количество мнимое; но при $x = 0$ будетъ и $y = 0$; слѣдовательно, разсматриваемая кривая имѣетъ *сопряженную точку* въ началѣ координатъ. Смот. POINTS SINGULIERS.

Иногда случается, что сопряженный оваль пересѣкается безконечною вѣтвью кривой; если, въ такомъ случаѣ, оваль обратится въ одну точку, то она будетъ находиться на периметрѣ кривой, и вмѣстѣ съ тѣмъ будетъ сопряженною. Такую точку называютъ *прикосновенно-сопряженною (point conjugué adhérant)*.

Conjuguées (tangentes). Сопряженныя касательныя. Когда къ кривой поверхности проведенъ обертывающій цилиндръ, то касательная къ кривой касанія, въ какой ни есть ея точкѣ, и ребро цилиндра, проходящее чрезъ ту же точку, называются *сопряженными касательными*. Г. *Дюпенъ* (*Dupin*), въ сочиненіи своемъ *Développemens de Géométrie* (1813 г. in-4°), первый употребилъ это наименованіе, основываясь на томъ взаимномъ свойствѣ этихъ линій, что если одну изъ нихъ примутъ за ребро касательнаго цилиндра, то другая будетъ касательною къ кривой касанія на поверхности. Для дальнѣйшихъ подробностей о свойствахъ сопряженныхъ касательныхъ, отсылаемъ къ упомянутому сейчасъ сочиненію Г. Дюпена.

Conjuguées (hyperboles). Сопряженныя иперболы. Сопряженными или соассимптотными называются такія иперболы, которыя имѣютъ общія ассимптоты. Напримѣръ, на черт. 1 (Листъ V) иперболы $ABCDEF$ и $GHIKLM$ суть *сопряженныя* одна относительно другой. Ассимптоты NP и QR принадлежатъ имъ обѣимъ. Если уравненіе иперболы $ABCDEF$ будетъ $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, то для иперболы $GHIKLM$ получимъ $y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 + a^2)$, откуда легко заключить, что поперечная ось одной изъ двухъ иперболъ будетъ второю осью другой, и наоборотъ.

Conjuguées (racines imaginaires). Сопряженные мнимые корни. Когда алгебрическое уравненіе имѣетъ коэффиціенты вещественные, и допускаетъ мнимые корни, то сіи послѣдніе непремѣнно будутъ по-два сопряженные, то есть, если одинъ изъ нихъ равенъ $a + b\sqrt{-1}$, то необходимо будетъ другой $a - b\sqrt{-1}$. Дѣйствительно, положимъ, что корень $a + b\sqrt{-1}$ удовлетворяетъ уравненію $f(x) = 0$; слѣдовательно $f(a + b\sqrt{-1}) = A + B\sqrt{-1} = 0$, разумѣя подъ A и B величины вещественныя; если разложимъ $f(a - b\sqrt{-1})$, то очевидно получимъ $A - B\sqrt{-1}$; но изъ уравненія $A + B\sqrt{-1} = 0$ выводимъ $A = o$ и $B = o$; слѣдовательно $A - B\sqrt{-1} = 0$, откуда заключаемъ что и корень $a - b\sqrt{-1}$ будетъ удовлетворять предложенному уравненію.

Корни $a + b\sqrt{-1}$ и $a - b\sqrt{-1}$ называются, одинъ относительно другаго, *сопряженными*.

CONNOISSANCE DES TEMPS. АСТРОНОМИЧЕСКІЙ КАЛЕНДАРЬ, заключающій въ себѣ различныя таблицы, необходимыя для астрономовъ и мореплавателей. Первый томъ этого Календаря, за 1679-ый годъ, вышелъ въ 1678 году, и былъ составленъ извѣстнымъ астрономомъ *Пикардомъ (Picard)*, членомъ Парижской Академіи Наукъ. Болѣе столѣтія этотъ трудъ издавался Академіею Наукъ; нынѣ же онъ составляется при *Bureau des longitudes*.

CONOIDE. (Геом.) **КОНОИДЪ, ТѢЛО ВРАЩЕНІЯ.** Такъ называется тѣло, образуемое вращеніемъ какой ни есть кривой линіи около неподвижной оси. *Conoïde parabolique* или *paraboloïde de révolution*; *параболическій коноидъ* или *параболоидъ вращенія*; *conoïde hyperbolique* или *hyperboloïde de révolution*; *иперболическій коноидъ* или *иперболоидъ вращенія*, и проч. — Также называютъ иногда *коноидами* и тѣла, коихъ сѣченія, перпендикулярныя оси, не круговыя, а имѣютъ какой ни есть другой видъ, сомкнутой кривой, напримѣръ, *эллиптическій*. — Это же самое названіе присвоено одной линейчатой поверхности слѣдующаго образованія: прямая горизонтальная линія, двигаясь параллельно самой себѣ, опирается на двѣ направляющія, изъ которыхъ одна есть вертикальная прямая, а другая, плоская кривая линія, на вертикальной плоскости начерченная. Смот. COIN CONOIDE. —

Нѣкоторые математики называютъ *коноидомъ* всякое тѣло, ограниченное кривою поверхностію, простирающееся въ безконечность, а *сфероидомъ*, тѣло сомкнутое со всѣхъ сторонъ.

CONOIDE. Прилаг. **КОНОИДАЛЬНЫЙ, КОНОИДНЫЙ.** *Coin conoïde*; *коноидальный клинъ*. Смот. COIN CONOIDE.

CONON (SPIRALE DE). (Геом.) **КОНОНОВА СПИРАЛЬ.** Смот. SPIRALE.

CONSÉCUTIF. ПОСЛѢДОВАТЕЛЬНЫЙ, СМЕЖНЫЙ. *En prenant trois élémens, trois points consécutifs sur une courbe....*; *взявъ на кривой три смежные элемента, три смежныя точки.....* *Termes consécutifs d'une série infinie*; *послѣдовательные, рядомъ стоящіе члены безконечной строки*.

CONSÉQUENCE. СЛѢДСТВІЕ, ЗАКЛЮЧЕНІЕ. *Tirer une conséquence*; *вывести слѣдствіе, заключеніе*; *заключить*.

CONSÉQUENT. (Арие.) **ПОСЛѢДУЮЩІЙ.** Смот. ANTÉCÉDENT.

CONSERVATION DU MOUVEMENT DU CENTRE DE GRAVITÉ (PRINCIPE DE LA). Начало **СОХРАНЕНІЯ** движенія центра тяжести. Смот. DYNAMIQUE.

CONSERVER SON ÉTAT. (Мех.) **СОХРАНЯТЬ СВОЕ СОСТОЯНІЕ.** Говорится о тѣлѣ, когда оно, повинуясь закону инерціи, или пребываетъ въ покоѣ, или движется по прямой линіи съ постоянною скоростію. Смот. INERTIE, FORCE.

CONSPIRANT. (Мех.) **СОДѢЙСТВУЮЩІЙ.** *Forces, puissances conspirantes*; *содѣйствующія силы*. Силы дѣйствующія подъ какимъ ни есть угломъ, отличнымъ отъ двухъ прямыхъ; слѣдовательно, отсюда исключается тотъ случай, когда силы будутъ *прямопротивныя*. И такъ, силы пересѣкающіяся и силы дѣйствующія по одному направленію, или по направленіямъ параллельнымъ, и въ одну сторону, могутъ быть названы *силами содѣйствующими*. Впрочемъ, это наименованіе несвойственно, ибо направленія и величины силъ могутъ быть таковы, что силы отчасти уничтожатъ дѣйствіе другъ друга, или даже совсѣмъ истребятся.

CONSTANT. (Мат.) **ПОСТОЯННЫЙ, НЕИЗМѢНЯЕМЫЙ.** *Quantité constante* или просто *constante*; *постоянное, неизмѣняемое количество, постоянная*. Величина, которая остается одна и та же, между тѣмъ какъ другія измѣняются, почему послѣднія и называются *перемѣнными* или *измѣняемыми величинами (quantités variables* или просто *variables)*. И такъ, *радіусъ* круга, *параметръ* параболы, *оси* эллипса и проч. суть количества *постоянныя*, а координаты этихъ самыхъ кривыхъ, *количества перемѣнныя*. Впрочемъ, самое свойство задачи покажетъ всегда, какія величины должны быть принимаемы за постоянныя. Въ Алгебрѣ, *постоянныя* обыкновенно изображаются первыми буквами алфавита, а *перемѣнныя*, послѣдними.

*

Constante arbitraire. (Инт. Исч.) Произвольное постоянное количество, произвольная постоянная. Смот. INTÉGRAL (CALCUL), ABRITRAIRE.

Variation des constantes arbitraires. (Инт. Исч.) Измѣненіе постоянныхъ произвольныхъ. Смот. VARIATION DES CONSTANTES.

CONSTÉLLATION или **ASTÉRISME.** (Астр.) **СОЗВѢЗДІЕ.** Собраніе или система многихъ звѣздъ, означенная какою нибудь фигурою человѣка, животнаго, машины и проч. Раздѣленіе звѣзднаго неба на группы различной фигуры, можетъ быть, древнѣе самой Астрономіи. Для обозрѣнія безчисленнаго множества звѣздъ, необходимо было раздѣлить всё звѣздное небо на части, и дать каждой изъ нихъ опредѣленную фигуру и названіе.

Древнѣйшіе писатели, какъ церковные такъ и свѣтскіе, упоминаютъ о созвѣздіяхъ. Такъ напримѣръ, въ книгѣ Іова, гл. 9 ст. 9 сказано: Творѧй плїѧды, и єспера, и арктꙋра, и сокровища южнаѧ; и далѣе, гл. 38 ст. 31, Разꙋмѣлъ же ли єси соꙋзъ плїѧдъ, и ѡграждєнїє ѡрїѡнокο ѿверзлъ ли єси.

Еще и въ другихъ мѣстахъ Священнаго Писанія встрѣчаемъ названія нѣкоторыхъ созвѣздій.

О многихъ созвѣздіяхъ упоминаютъ *Гезіодъ* и *Гомеръ* за 900 лѣтъ до Р. Х. — *Аратъ*, Греческій астрономъ — Поэтъ, жившій за 277 лѣтъ до Р. Х., написалъ трактатъ о созвѣздіяхъ, извѣстныхъ въ его время, и означилъ какъ взаимное ихъ положеніе, такъ и относительно главнѣйшихъ круговъ неба. Знаменитый *Гиппархъ* доказалъ, что Аратъ слѣдовалъ при этомъ описаніи *Эвдоксу*, жившему за 100 лѣтъ до Арата. Вѣроятно *Птолемей*, въ своемъ Алмагестѣ, принялъ тѣ же фигуры и названія созвѣздій, присовокупивъ къ нимъ нѣкоторыя новыя.

Древніе раздѣляли на созвѣздія только ту часть неба, которую они видѣли. Птолемей считалъ 48 созвѣздій: 12 *зодіакальныхъ*, 21 въ *сѣверномъ полушаріи* и 15 въ *южномъ*. Звѣзды, незаключающіяся въ созвѣздіяхъ, но видимыя простымъ глазомъ, названы *невключенными* (*informes*, *sparsiles*, *sporades*); впослѣдствіи многія изъ нихъ вошли въ составъ новыхъ созвѣздій. Самый полный атласъ созвѣздій составленъ Берлинскимъ астрономомъ *Боде*.

Въ прошедшемъ столѣтіи нѣкоторые писатели пытались извлечь изъ фигуръ и названій созвѣздій объясненія аллегорій и басенъ древней Миѳологіи. Самыя остроумныя и правдоподобныя догадки по этому предмету, безъ сомнѣнія предложены Профессоромъ *Дюпюи* (*Dupuis*) (Смот. *Journal des savants*, 1779 г. также за 1785, 1788 и 1806 годы).

Въ заключеніе приводимъ таблицу древнихъ и новыхъ созвѣздій.

Созвѣздія Птолемеевы.

Сѣверныя созвѣздія:

1. Малая медвѣдица. Petite ourse.
2. Большая медвѣдица. Grande ourse.
3. Драконъ. Dragon.
4. Цефей. Cephée.
5. Волопасъ. Le Bouvier.
6. Сѣверный вѣнецъ. Couronne boréale.
7. Геркулесъ. Hercule.
8. Лира. La lyre.
9. Лебедь. Le cygne.
10. Кассіопея. Cassiopée.
11. Персей. Persée.
12. Возничій. Le cocher.
13. Зміеносецъ. Le serpentaire.
14. Змѣй. Le serpent.
15. Стрѣла. La flêche.
16. Орелъ и Антиной. L'aigle et Antinoüs.
17. Дельфинъ. Le dauphin.
18. Малый конь. Petit cheval.
19. Пегасъ. Le cheval Pégase.
20. Андромеда. Andromède.
21. Треугольникъ. Triangle.

Зодіакальныя созвѣздія:

22. Овенъ. Le bélier.
23. Телецъ. Le taureau.
24. Близнецы. Les gémeaux.
25. Ракъ. Le cancer или l'écrevisse.
26. Левъ. Le lion.
27. Дѣва. La vierge.
28. Вѣсы. La balance или les serres.
29. Скорпіонъ. Le scorpion.
30. Стрѣлецъ. Le sagittaire.
31. Козерогъ. Le capricorne.
32. Водолей. Le verseau.
33. Рыбы. Les poissons.

Южныя созвѣздія:

34. Китъ. La baleine.
35. Оріонъ. Orion.
36. Эриданъ. L'Éridan.
37. Заяцъ. Le lièvre.
38. Большой песъ. Le chien.
39. Малый песъ. Procyon или le chien précurseur.
40. Корабль Арго. Argo.
41. Гидра. L'hydre.
42. Чаша или кубокъ. La coupe.
43. Воронъ. Le corbeau.
44. Кентавръ. Le centaure.
45. Волкъ. Le loup.
46. Жертвенникъ. L'autel.
47. Южный вѣнецъ. La couronne australe.
48. Южная рыба. Le poisson austral.

Созвѣздія, прибавленныя Гевеліемъ:

1. Антиной (подъ орломъ). Antinoüs.
2. Гора Меналъ. Le mont Ménale.
3. Гончія собаки. Les chiens de chasse.
4. Жирафъ или Камелопардъ. La giraffe.
5. Церберъ. Cerbère.
6. Власы Вереникины. La chevelure de Bérénice.
7. Ящерица. Le lezard.
8. Рысь. Le lynx.
9. Щитъ Собіескаго. L'écu de Sobieski.
10. Секстантъ Ураніи. Le sextant d'Uranie.
11. Малый треугольникъ. Le petit triangle.
12. Малый левъ. Le petit lion.

Созвѣздія, прибавленныя Галлеемъ въ южной сторонѣ неба:

1. Голубь. La colombe.
2. Дубъ Карла II. Le chêne de Charles II.
3. Журавль. La grue.
4. Фениксъ. Le phénix.
5. Павлинъ. Le paon.
6. Индѣйская птица. L'oiseau indien или sans pied.
7. Муха. La mouche.
8. Хамелеонъ. Le caméléon.

Южныя созвѣздія Байера:

1. Индеецъ. L'Indien.
2. Журавль. La grue.
3. Фениксъ. Le phénix.
4. Пчела или муха. L'abeille или la mouche.
5. Южный треугольникъ. Le triangle austral.
6. Райская птица. L'oiseau du paradis.
7. Павлинъ. Le paon.
8. Туканъ. Le toucan.
9. Гидра. L'hydre mâle.
10. Дорада. La dorade.
11. Летучая рыба. Le poisson volant.
12. Хамелеонъ. Le caméléon.

Южныя созвѣздія Лакалья (Lacaille):

1. Мастерская скульптора. L'atelier du sculpteur.
2. Химическая печь. Le fourneau chimique.
3. Астрономическіе часы. L'horloge astronomique.
4. Ромбоидальная сѣтка. Le réticule rhomboïde.
5. Рѣзецъ гравёра. Le burin du graveur.
6. Станокъ живописца. Le chevalet du peintre
7. Компасъ. La boussole.
8. Пневматическая машина. La machine pneumatique.
9. Октантъ. L'octant.
10. Циркуль и кругъ. Le compas et le cercle.
11. Наугольникъ и линейка. L'équerre et la règle.
12. Телескопъ. Le télescope.
13. Микроскопъ. Le microscope.
14. Столовая гора. La montagne de la table.
15. Большое и малое облако. Grand et petit nuages.
16. Крестъ. La croix.

Другія новѣйшія созвѣздія:

Олень. Le renne.
Пустынникъ. Le solitaire.
Мессіеръ, (сторожъ). Le messier.
Волъ Понятовскаго. Le taureau de Poniatowski.
Почести Фридерика. Les honneurs de Frédéric.
Бранденбургскій скипетръ. Le sceptre de Brandenbourg.
Гершелевъ телескопъ. Le télescope de Herschel.
Воздушный шаръ. Le globe aérostatique.
Стѣнной квадрантъ. Le quart de cercle mural.
Котъ. Le chat.
Лагъ. Le loch.
Арфа Георга. La harpe de George.*

CONSTRUCTEUR DES ÉQUATIONS. КОРНЕСТРОИТЕЛЬНАЯ МАШИНА. Машина посредствомъ которой опредѣляются, по приближенію, вещественные корни алгебрическаго уравненія какой ни есть степени. Читатели найдутъ подробное описаніе этой машины въ *Encyclopédie Méthodique*, отдѣленіе *Mathématiques* (Том. 1 стр. 659).

CONSTRUCTION. (Геом.) **ПОСТРОЕНІЕ, СТРОЕНІЕ, КОНСТРУКЦІЯ. — ЧЕРЧЕНІЕ. — СОСТАВЛЕНІЕ.** Графическое производство надъ линіями дѣйствій, изображенныхъ алгебрическою формулою. Напримѣръ, если бы неизвѣстная линія x опредѣлялась формулою

$$x = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

гдѣ a, b, c изображаютъ данныя линіи, то для построенія этой величины x слѣдовало бы: 1° опредѣлить длину $\sqrt{a^2 + b^2}$, которую означимъ чрезъ l, и 2° найти x изъ формулы $x = \frac{c^2}{l}$, или, что всё равно, изъ пропорціи $b : c = : c : x$.

Для опредѣленія линіи $l = \sqrt{a^2 + b^2}$, стоитъ только построить прямоугольный треугольникъ ABC (черт. 2 Листъ V) такъ, чтобы $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = b$; ипотенуза $\overline{BC}$ будетъ искомая линія l. Потомъ, составимъ произвольный уголъ HOI (черт. 2); отложимъ по OH линію $\overline{OD} = l$ и $\overline{OF} = \overline{OE} = c$ по OH и OI; соединивъ точку D съ точкою E, проводимъ линію $\overline{FG}$ параллельно $\overline{DE}$. Очевидно, что по причинѣ подобія треугольниковъ ODE и OFG получимъ $\overline{OD} : \overline{OF} = \overline{OE} : \overline{OG}$, или, что всё равно, $l : c = c : x$; слѣдовательно $x = \overline{OG}$, и выраженіе $\frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ построено.

CONSTRUCTION D'UNE TABLE. СОСТАВЛЕНІЕ ТАБЛИЦЫ.

CONSTRUCTION D'UNE COURBE PAR POINTS. ПОСТРОЕНІЕ КРИВОЙ ЛИНІИ ПО ТОЧКАМЪ. Когда, опредѣливъ по извѣстнымъ правиламъ достаточное число точекъ, принадлежащихъ какой либо кривой линіи, соединяемъ ихъ непрерывною кривою, то такого рода черченіе называется *построеніемъ кривой по точкамъ*. Для примѣровъ отсылаемъ читателей къ словамъ: CISSOÏDE, CONCHOÏDE и проч.

CONSTRUCTION DES ÉQUATIONS. ПОСТРОЕНІЕ, СТРОЕНІЕ УРАВНЕНІЙ. Опредѣленіе корней уравненій посредствомъ графическихъ дѣйствій. Напримѣръ, еслибъ требовалось найти *чрезъ построеніе* величину x изъ уравненія

$$x^3 = 2a^3,$$

гдѣ a изображаетъ линію извѣстную, то стоило бы только начертить двѣ параболы, опредѣляемыя уравненіями

$$x^2 = ay \text{ и } y'^2 = 2ax,$$

и абсцисса x, соотвѣтствующая точкѣ пересѣченія этихъ двухъ параболъ, изобразила бы искомую величину x; дѣйствительно, предположивъ $y' = y$, найдемъ

$$a^2 = ay \text{ и } y^2 = 2ax,$$

откуда, по исключеніи y, получимъ

$$x^4 = 2a^3x.$$

Величина $x = 0$, соотвѣтствующая общей вершинѣ двухъ параболъ, должна быть откинута; слѣдовательно, раздѣляя на x, найдется

$$x^3 = 2a^3, \text{ откуда } x = \sqrt[3]{2a^3}.$$

Эта задача извѣстна подъ наименованіемъ *задачи объ удвоеніи куба*. Смот. CONIQUE (SECTION), DUPLICATION DU CUBE, CISSOÏDE, TRISSECTION DE L'ANGLE и проч.

Графическое построеніе корней алгебрическихъ уравненій было предметомъ изслѣдованій для многихъ математиковъ, и между прочими для *Віета, Декарта, Бакера, Ла Гира, Нютона, Маклорена*, Маркиза *де Л'Опиталь*. Нынѣ, съ усовершенствованіемъ аналитической теоріи алгебрическихъ уравненій, эти способы потеряли ту значительность, какую имѣли прежде.

PAR CONSTRUCTION. ПО СТРОЕНІЮ, ПО ПОСТРОЕНІЮ. — ПО ЧЕРЧЕНІЮ. *Deux lignes égales par construction; двѣ линіи равныя по строенію, по отложенію. Deux angles égaux par construction; два угла равные по строенію, по нанесенію.*

CONSTRUCTION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. (Инт. Исч.) **ПОСТРОЕНІЕ** ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ. Для построенія дифференціальныхъ уравненій, то есть кривыхъ ими опредѣляемыхъ, стараются приводить эти уравненія къ другимъ, коихъ строеніе уже извѣстно. Если же не успѣютъ въ этомъ, то можно будетъ употребить одинъ изъ слѣдующихъ способовъ.

Положимъ, напримѣръ, что кривая дана посредствомъ уравненія между дугою s и тригонометрическимъ тангенсомъ $\frac{dy}{dx} = p$ касательной съ осью x-овъ; слѣдовательно $s = f(p)$. Такого рода уравненіе очевидно будетъ *дифференціальнымъ уравненіемъ втораго порядка* въ разсужденіи прямоугольныхъ координатъ x и y; дѣйствительно, взявъ его дифференціалъ, получимъ

$$\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = f'\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{d^2y}{dx^2},$$

наблюдая что $s = \int dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$ а $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$.

Для построенія кривой, выражаемой уравненіемъ $s = f(p)$, въ которомъ p принимается за перемѣнную независимую, положимъ, что эта кривая проходитъ чрезъ начало координатъ O (черт. 3 Листъ V), гдѣ $p = 0$; взявъ по произволенію величину p, то есть задавъ себѣ уголъ MTP, опредѣлимъ изъ уравненія кривой дугу OM. Принявъ потомъ другое значеніе для p, весьма мало разнствующее отъ предыдущаго, найдемъ дугу OM'; разность между двумя найденными дугами, опредѣлитъ длину небольшой дуги MM'. Принимая эту послѣднюю за прямую линію, коей наклоненіе къ оси OX равно средней ариѳметической между углами MTP и $M'T'P'$, получимъ $MQ = MM'.\,Cos\,\alpha$, $M'Q = MM'.\,Sin\,\alpha$, разумѣя подъ α полу-сумму угловъ MTP и $M'T'P'$. Легко видѣть, что если составимъ рядъ возрастающихъ величинъ для p, начиная отъ $p = 0$, такъ, чтобы каждые два смежные члена этого ряда весьма мало разнствовали между собою, то сумма линій, подобныхъ $\overline{MQ}$ или $\overline{PP'}$, вычисленныхъ для всѣхъ величинъ p, будетъ приблизительно изображать абсциссу $\overline{OM'}$, а сумма линій, подобныхъ $\overline{M'Q}$, изобразитъ ординату $\overline{P'M'}$. Зная x и y, можно будетъ построить кривую $OMM'A$.

Изложенный сей-часъ способъ предложенъ *Эйлеромъ*; *Лежандръ*, въ своихъ *Exercices de Calcul Intégral*, придалъ ему болѣе точности, выразивъ посредствомъ сходящихся рядовъ поправки для x и y въ томъ случаѣ, когда кривая, опредѣляемая уравненіемъ $s = f(p)$, имѣетъ малую кривизну.

Разсматриваніе соприкасающихся кривыхъ доставляетъ способъ для построенія по приближенію диффренціальныхъ уравненій съ двумя перемѣнными, и какого ни есть порядка.

Когда имѣемъ диффренціальное уравненіе перваго порядка, то беремъ произвольно точку M (черт. 4 Листъ V), коей координаты пусть будутъ $OP = a$ и $PM = b$; подставивъ a и b на мѣсто x и y въ предложенное уравненіе, выводимъ изъ него величину для $\frac{dy}{dx}$; эта величина очевидно изобразитъ тангенсъ угла, составляемаго осью OX съ касательною MT къ искомой кривой въ точкѣ M. Беремъ теперь на продолженной прямой TM точку M'; эта точка тѣмъ менѣе будетъ удаляться отъ искомой кривой, чѣмъ разстояніе MM' будетъ менѣе. Подстановленіе величинъ OP', $P'M'$ на мѣсто x и y въ предложенное диффренціальное уравненіе доставитъ новую величину для $\frac{dy}{dx}$, по которой опредѣлится направленіе касательной $M'T'$, составляющей весьма малый уголъ съ прямою MT, и слѣдовательно, весьма близко подходящей къ искомой кривой. Продолжая точно такимъ образомъ, получимъ многоугольникъ $MM'M''M'''$..., который тѣмъ ближе будетъ подходить къ кривой, опредѣляемой предложеннымъ диффренціальнымъ уравненіемъ, чѣмъ меньше будутъ линіи $\overline{MM'}$, $\overline{M'M''}$, $\overline{M''M'''}$...

Когда имѣемъ диффренціальное уравненіе втораго порядка, то для построенія кривой, имъ опредѣляемой, можно будетъ употребить кругъ кривизны. Выбравъ по произволенію точку M (черт. 5 Листъ V) и направленіе первой касательной MT, имѣемъ величины для x, y и $\frac{dy}{dx}$; подставляя ихъ въ предложенное уравненіе, найдемъ соотвѣтствующую имъ величину для $\frac{d^2y}{dx^2}$. Посредствомъ же извѣстныхъ величинъ $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, можно будетъ опредѣлить радіусъ кривизны, соотвѣтствующій точкѣ M. Дѣйствительно, извѣстно, что радіусъ кривизны $= -\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$.

Проведя изъ M нормальную, и отложивъ по ней найденную длину $\overline{MC}$ радіуса кривизны, описываемъ изъ C, радіусомъ $\overline{CM}$, круговую дугу; на этой дугѣ беремъ весьма близкую къ M точку M', для которой величины x, y и $\frac{dy}{dx}$ будутъ опять извѣстны. Опредѣливъ посредствомъ сихъ послѣднихъ $\frac{d^2y}{dx^2}$, вычисляемъ радіусъ кривизны $M'C'$, и описываемъ изъ точки C' симъ радіусомъ круговую дугу $M'M''$; продолжая такимъ образомъ, опредѣлится рядъ точекъ M', M''...... тѣмъ ближе подходящихъ къ кривой, чѣмъ менѣе будутъ круговыя дуги MM', $M'M''$....

Для построенія кривыхъ, опредѣляемыхъ диффренціальными уравненіями высшихъ порядковъ, надлежало бы прибѣгнуть къ соприкасающимся кривымъ также высшихъ порядковъ.

CONSTRUIRE. (Геом.) **ПОСТРОИТЬ. — НАЧЕРТИТЬ. — СОСТАВИТЬ.** Опредѣлить графическими дѣйствіями величину, выраженную алгебрическою формулою. См. CONSTRUCTION. *Construire les racines d'une équation du troisième degré*; *построить корни уравненія третей степени Construire une table*; *составить таблицу.*

CONTACT. (Геом.) **КАСАНІЕ, ПРИКОСНОВЕНІЕ.** *Point de contact*; *точка касанія, прикосновенія.* Такъ называется точка на кривой линіи, чрезъ которую проведена касательная, или, общѣе, точка, въ которой двѣ кривыя касаются одна другой.

Théorie des contacts des courbes planes. Теорія прикосновенія плоскихъ кривыхъ. Положимъ, что изъ точки m касанія двухъ плоскихъ кривыхъ AB и CD (черт. 6 Листъ V), безконечно малымъ радіусомъ i, описали окружность круга EF; эта окружность пересѣчетъ обѣ кривыя въ точкахъ n и n', безконечно близкихъ одна отъ другой. Степень сближенія кривыхъ AB и CD, на разстояніи i отъ точки ихъ взаимнаго касанія, будетъ измѣряться безконечно малою дугою nn', или, что всё равно, хордою, соединяющею двѣ точки n и n'. Если, сверхъ того, изобразимъ чрезъ ω уголъ, составляемый радіусами $\overline{mn}$ и $\overline{mn'}$, то дуга nn' будетъ равняться произведенію $i\omega$, а хорда $\overline{nn'} = 2iSin\frac{1}{2}\omega$. Легко видѣть, что *въ сопредѣльности точки касанія m, кривыя будутъ тѣмъ болѣе близки одна къ другой, чѣмъ менѣе будетъ уголъ ω, соотвѣтствующій весьма малому значенію радіуса i.* И такъ, чтобы составить себѣ ясное понятіе о *порядкѣ прикосновенія* двухъ кривыхъ линій, надобно разыскать, чрезъ какія степени величинъ можетъ переходить безконечно малый уголъ ω, принимаемый за функцію радіуса i.

Но, при сближеніи кривыхъ AB и CD, уголъ ω, въ сопредѣльности точки m, непрестанно уменьшается, а слѣдовательно, порядокъ сей безконечно малой величины будетъ по мѣрѣ того возвышаться. Основываясь на этомъ замѣчаніи, естественно брать за *порядокъ прикосновенія (ordre de contact)* двухъ кривыхъ, самый порядокъ безконечно малой величины ω, принимаемой за функцію радіуса i. Пусть будетъ a порядокъ безконечно малаго угла ω. Такъ какъ предѣлъ отношенія

$$\frac{Sin\frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega}$$

есть единица, то произведеніе

$$\omega\frac{Sin\frac{1}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega} = 2Sin\tfrac{1}{2}\omega$$

будетъ количество безконечно малое того же порядка a, а выраженія $i\omega$ и $2iSin\frac{1}{2}\omega$, количества безконечно малыя порядка $a+1$. Смот. INFINIMENT PETIT. И такъ, можно будетъ предложить слѣдующую теорему:

Когда двѣ кривыя AB и CD касаются одна другой въ точкѣ m, то порядокъ прикосновенія въ этой точкѣ равняется порядку безконечно малой хорды $\overline{nn'}$, безъ единицы; хорда $\overline{nn'}$ получается соединивъ прямою точки n и n', въ которыхъ кругъ, описанный радіусомъ i изъ центра m, пересѣкаетъ разсматриваемыя двѣ кривыя. Радіусъ i принимается здѣсь за безконечно малое количество перваго порядка.

Вмѣсто хорды nn' можно употреблять разстояніе nq, заключающееся между точками n и q двухъ кривыхъ, гдѣ сѣкущая SS' пересѣкаетъ ихъ; но, въ такомъ случаѣ, должно предположить, что уголъ mnq, составляемый сѣкущею съ элементомъ кривой, чувствительнымъ образомъ разнится отъ нуля. Въ этомъ предположеніи стороны nq и nn' треугольника nqn' суть величины одного и того же порядка, ибо онѣ, какъ извѣстно изъ Тригонометріи, соотвѣтственно пропорціональны синусамъ противолежащихъ угловъ $nn'q$ и nqn', которые, въ настоящемъ случаѣ, не обращаются въ нуль. Слѣдовательно, *порядокъ безконечно малой величины nq, уменьшенный единицею, изображаетъ порядокъ прикосновенія двухъ кривыхъ AB и CD въ точкѣ m.*

Ежели кривыя AB и CD опредѣляются уравненіями между прямоугольными координатами x и y, и если, сверхъ того, общая касательная въ точкѣ m не будетъ параллельна оси y-овъ, то предположивъ, что сѣкущая SS' параллельна этой оси, и замѣтивъ, что разстояніе точки прикосновенія отъ сѣкущей есть количество безконечно малое перваго порядка, именно, равное произведенію $iSin(mnq)$, выведемъ слѣдующее предложеніе:

Для опредѣленія порядка прикосновенія двухъ плоскихъ кривыхъ, касающихся въ такой точкѣ, въ которой общая ихъ касательная не параллельна оси y-овъ, надобно провести безконечно-близкую ординату къ точкѣ прикосновенія; потомъ искать число, изображающее порядокъ безконечно малой величины той части ординаты, которая заключается между двумя кривыми, причемъ разстояніе точки прикосновенія отъ ординаты принимается за безконечно малое количество перваго порядка. Это число, уменьшенное единицею, изобразитъ порядокъ прикосновенія.

Вотъ краткое изложеніе теоріи прикосновенія плоскихъ кривыхъ въ томъ видѣ, въ какомъ предложилъ ее Г. *Коши* въ сочиненіи своемъ: *Leçons sur les applications du Calcul Infinitésimal à la Géométrie*; *Paris*, 1826 *in*-4⁰, въ 2-хъ частяхъ. Мы не будемъ останавливаться на приложеніяхъ этой теоріи; читатели найдутъ обстоятельныя поясненія этого предмета въ книгѣ, о которой сей-часъ упомянули. — Изложимъ теперь вкратцѣ теорію прикосновенія плоскихъ кривыхъ въ томъ видѣ, въ какомъ она обыкновенно предлагается.

Отнесемъ кривыя *AMB* и *CMD* (черт. 7 Листъ V) къ двумъ прямоугольнымъ осямъ *OX*, *OY*, и предположимъ, что эти кривыя соотвѣтственно опредѣляются уравненіями $y = f(x)$ и $Y = F(x)$. Допустимъ, что кривыя *AB* и *CD* имѣютъ общую точку *M*, и пусть будетъ $\overline{OP} = x$, $\overline{PM} = y$; слѣдовательно $y = F(x)$, откуда $f(x) = F(x)$. Возьмемъ теперь въ соображеніе другую абсциссу $\overline{OP'}$, весьма мало разнствующую отъ прежней $\overline{OP}$, и положимъ $\overline{PP'} = i$; величина i будетъ весьма малая, и абсцисса $\overline{OP'}$ изобразится суммою $x + i$. Подставляя эту величину на мѣсто x въ уравненія кривыхъ, найдемъ, по *Тайлоровой* теоремѣ,

$$\overline{P'm} = f(x+i) = f(x) + f'(x)\,i + f''(x)\,\frac{i^2}{1.2} + \dots + f^{(m)}(x)\,\frac{i^m}{1.2.3\dots m} + \dots$$

$$\overline{P'n} = F(x+i) = F(x) + F'(x)\,i + F''(x)\,\frac{i^2}{1.2} + \dots + F^{(m)}(x)\,\frac{i^m}{1.2.3\dots m} + \dots$$

Если изобразимъ чрезъ ε разность $\overline{mn}$ между этими двумя ординатами, то, въ слѣдствіе равенства $f(x) = F(x)$, получимъ

(1) $$\varepsilon = [f'(x) - F'(x)]\,i + [f''(x) - F''(x)]\,\frac{i^2}{1.2} + \dots + [f^{(m)}(x) - F^{(m)}(x)]\,\frac{i^m}{1.2.3\dots m} + \dots$$

Степень сближенія двухъ кривыхъ будетъ зависѣть отъ степени малости величины ε; но такъ какъ i изображаетъ количество весьма малое, то ясно, что ε будетъ тѣмъ менѣе, чѣмъ больше будетъ уничтожающихся членовъ въ ряду (1), считая ихъ по порядку отъ перваго. Если $f'(x) - F'(x) = 0$, или $f'(x) = F'(x)$, то ε пропорціонально величинѣ i^2, и кривыя имѣютъ общую касательную. Въ такомъ случаѣ говорится, что кривыя имѣютъ между собою *прикосновеніе перваго порядка (contact du premier ordre)* въ точкѣ *M*. Если, сверхъ того, будетъ $f''(x) = F''(x)$, то получится прикосновеніе *втораго порядка*. Вообще, когда имѣемъ рядъ равенствъ

(2) $$f'(x) = F'(x),\ f''(x) = F''(x),\ f'''(x) = F'''(x), \dots f^{(m)}(x) = F^{(m)}(x),$$

такъ что первая изъ неуничтожающихся разностей есть $f^{(m+1)}(x) - F^{(m+1)}(x)$, то кривыя, для которыхъ эти условія удовлетворяются, имѣютъ въ точкѣ касанія *прикосновеніе m-го порядка*.

Высшій порядокъ прикосновенія, то есть наибольшая степень сближенія кривой, данной только по виду, съ предложенною кривою линіею, именуется *соприкасаніемъ (osculation)*. Кривая, данная только по виду, называется *соприкасающеюся кривою (courbe osculatrice)*. Число постоянныхъ количествъ, заключающихся въ самомъ общемъ ея уравненіи, опредѣляетъ высшій порядокъ прикосновенія, то есть *соприкасаніе*. Вообще, предполагая, что уравненіе соприкасающейся кривой содержитъ въ себѣ $(m+1)$ постоянныхъ количествъ, легко видѣть, что порядокъ прикосновенія будетъ m-ой, ибо сверхъ числа m условій, выражаемыхъ рядомъ (2), имѣемъ еще одно, изображаемое уравненіемъ $f(x) = F(x)$. Если, напримѣръ, примемъ за соприкасающуюся кривую *кругъ*, то онъ можетъ имѣть съ предложенною кривою линіею прикосновеніе *втораго порядка*, потому что самое общее уравненіе круга заключаетъ въ себѣ три постоянныя количества — двѣ координаты центра и радіусъ; слѣдовательно можно будетъ удовлетворить тремъ условіямъ, именно: $f(x) = F(x)$, $f'(x) = F'(x)$ и $f''(x) = F''(x)$. Такой кругъ называется *соприкасающимся кругомъ* или *кругомъ кривизны*. См. OSCULATEUR (CERCLE).

Нѣкоторые математики называютъ *соприкасающимися кривыми* такія, которыя, въ точкѣ прикосновенія, имѣютъ одинъ и тотъ же кругъ кривизны.

Для другихъ подробностей по этому предмету отсылаемъ читателей къ статьямъ: OSCULATION, DÉVELOPPÉE, DÉVELOPPANTE, COURBURE, и проч.; также, сверхъ упомянутаго выше сочиненія Г. *Коши*, къ книгѣ: *Théorie des fonctions analytiques*, соч. *Лагранжа*.

CONTACT DES COURBES A DOUBLE COURBURE. ПРИКОСНОВЕНІЕ КРИВЫХЪ ДВОЯКОЙ КРИВИЗНЫ. Вообразимъ двѣ какія ни есть кривыя линіи въ пространствѣ, имѣющія общую точку M. Если изъ M, принимаемой за центръ, радіусомъ безконечно малымъ i, опишемъ шаровую поверхность, то она пересѣчетъ кривыя въ двухъ точкахъ m и n, весьма близкихъ между собою. Степень сближенія двухъ кривыхъ будетъ измѣряться безконечно малою хордою $\overline{mn}$. Если изобразимъ чрезъ ω уголъ mMn, составляемый радіусами, которые направляются изъ точекъ m и n къ центру M, то получимъ, какъ и выше,

$$\text{хорда } \overline{mn} = 2\,i\,Sin\,\tfrac{1}{2}\,\omega.$$

Разсуждая точно такъ, какъ въ случаѣ прикосновенія плоскихъ кривыхъ, выведемъ слѣдующую теорему:

Когда двѣ какія ни есть кривыя касаются одна другой въ точкѣ M, то порядокъ ихъ прикосновенія будетъ единицею менѣе противу порядка безконечно малой величины, изображающей разстояніе точекъ m и n, взятыхъ на кривыхъ на разстояніи i отъ M; длина i принимается здѣсь за безконечно малое количество перваго порядка.

Положимъ, что кривыя даны посредствомъ уравненій между прямоугольными координатами; пусть будутъ $y = f_1(x)$, $z = f_2(x)$ уравненія одной изъ нихъ, а $Y = F_1(x)$, $Z = F_2(x)$ уравненія другой; такъ какъ кривыя имѣютъ общую точку M, то предположивъ, что координаты ея суть x, y, z, получимъ

$$f_1(x) = F_1(x),\quad f_2(x) = F_2(x).$$

Изобразимъ чрезъ i безконечно малое приращеніе абсциссы x, и положимъ, что на разстояніи $x+i$ отъ начала координатъ провели плоскость, перпендикулярную къ оси x; эта плоскость пересѣчетъ обѣ кривыя въ нѣкоторыхъ точкахъ, которыя означимъ буквами m и n; пусть будетъ ε разстояніе $\overline{mn}$. Очевидно, что степень сближенія двухъ кривыхъ, въ сопредѣльности точки M, будетъ зависѣть отъ степени малости величины ε. Для опредѣленія количества ε, замѣтимъ, что координаты точекъ m и n будутъ соотвѣтственно:

$$x+i,\quad f_1(x+i),\quad f_2(x+i)$$
$$x+i,\quad F_1(x+i),\quad F_2(x+i).$$

Слѣдовательно

$$\varepsilon = \sqrt{[f_1(x+i) - F_1(x+i)]^2 + [f_2(x+i) - F_2(x+i)]^2}.$$

Если разложимъ теперь каждую изъ функцій $f_1(x+i)$, $F_1(x+i)$, $f_2(x+i)$ и $F_2(x+i)$ въ рядъ, и примемъ въ соображеніе уравненія $f_1(x) = F_1(x)$, $f_2(x) = F_2(x)$, то найдемъ для подкореннаго количества сумму

$$\left[(f_1'(x) - F_1'(x))\,i + (f_1''(x) - F_1''(x))\,\frac{i^2}{1.2} + \cdots\right]^2$$
$$+\left[(f_2'(x) - F_2'(x))\,i + (f_2''(x) - F_2''(x))\,\frac{i^2}{1.2} + \cdots\right]^2.$$

Изъ разсмотрѣнія этого выраженія, увидимъ, что когда $f_1'(x) = F_1'(x)$ и $f_2'(x) = F_2'(x)$, то количество ε будетъ пропорціонально i^2, и кривыя будутъ имѣть, въ точкѣ M, прикосновеніе *перваго порядка*.

Когда, сверхъ того,

$$f_1''(x) = F_1''(x) \text{ и } f_2''(x) = F_2''(x),$$

то ε пропорціонально i^3, и получится прикосновеніе *втораго порядка*. Смот. OSCULATEUR (CERCLE). Вообще, если предположимъ существованіе слѣдующихъ условій:

$$f_1(x) = F_1(x),\quad f_2(x) = F_2(x)$$
$$f_1'(x) = F_1'(x),\quad f_2'(x) = F_2'(x)$$
$$f_1''(x) = F_1''(x),\quad f_2''(x) = F_2''(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_1^{(m)}(x) = F_1^{(m)}(x),\ f_2^{(m)}(x) = F_2^{(m)}(x),$$

и допустимъ сверхъ того, что по крайней мѣрѣ одно изъ равенствъ

$$f_1^{(m+1)}(x) = F_1^{(m+1)}(x),\quad f_2^{(m+1)}(x) = F_2^{(m+1)}(x)$$

не имѣетъ мѣста, то кривыя, удовлетворяющія этимъ требованіямъ, будутъ имѣть, въ общей имъ точкѣ, прикосновеніе m-го порядка.

Высшій порядокъ прикосновенія двухъ кривыхъ двоякой кривизны можно назвать *соприкасаніемъ*.

CONTACT DES SURFACES COURBES. ПРИКОСНОВЕНІЕ КРИВЫХЪ ПОВЕРХНОСТЕЙ. Разсмотримъ двѣ поверхности, которыя касаются одна другой въ точкѣ M. Если проведемъ чрезъ M плоскость, нормальную къ обѣимъ поверхностямъ, то кривыя пересѣченія будутъ касательныя одна къ другой. Предположимъ теперь, что упомянутая плоскость обращается около нормали; положеніе и видъ кривыхъ пересѣченія вообще измѣнится. Что касается до числа, изображающаго порядокъ прикосновенія сихъ кривыхъ, то оно можетъ быть или постояннымъ, или измѣняться вмѣстѣ съ положеніемъ нормальной плоскости. Это число, когда оно будетъ постоянное, или, въ противномъ случаѣ, *наименьшая* его величина, опредѣляетъ порядокъ прикосновенія двухъ поверхностей. Пусть будетъ m этотъ порядокъ. Если изъ точки M, принимаемой за центръ, опишемъ дугу круга безконечно малымъ радіусомъ i, то эта дуга пересѣчетъ кривыя сѣченія, заключающіяся въ нормальной плоскости, въ двухъ точкахъ P и Q; разстояніе $\overline{PQ}$, измѣняющееся съ положеніемъ нормальной плоскости, будетъ также безконечно малымъ количествомъ порядка или постояннаго, или перемѣннаго; сумма $m+1$ изобразитъ или *наименьшую* величину этого порядка, или постоянное его значеніе.

Когда кривыя поверхности даны посредствомъ ихъ уравненій между прямоугольными координатами, то, по общепредлагаемой теоріи соприкасанія, разсуждаемъ слѣдующимъ образомъ:

Пусть будутъ

$$1)\ z=f(x,y) \quad \text{и} \quad 2)\ Z=F(X,Y)$$

уравненія двухъ данныхъ поверхностей. Предполагая, что общая точка M соотвѣтствуетъ координатамъ x, y, z, получимъ для этой точки $X=x$, $Y=y$, $Z=z$, и слѣдовательно $f(x,y)=F(x,y)$. Положимъ теперь, что на первой поверхности разсматривается точка P, а на второй, точка Q, соотвѣтственно опредѣляемыя координатами

$$x+i, \quad y+k, \quad f(x+i, y+k)$$
$$x+i, \quad y+k, \quad F(x+i, y+k),$$

гдѣ i и k изображаютъ количества безконечно малыя перваго порядка, независимыя между собою. Разстояніе $\overline{PQ}$, которое изобразимъ чрезъ ε, опредѣлится разностію

$$\varepsilon=F(x+i, y+k)-f(x+i, y+k);$$

эта разность, въ слѣдствіе равенства $f(x,y)=F(x,y)$, будучи разложена въ рядъ, приметъ видъ

$$\varepsilon=\left(\frac{dZ}{dX}-\frac{dz}{dx}\right)i+\left(\frac{dZ}{dY}-\frac{dz}{dy}\right)k+\left(\frac{d^2Z}{dX^2}-\frac{d^2z}{dx^2}\right)\frac{i^2}{1.2}$$
$$+\left(\frac{d^2Z}{dXdY}-\frac{d^2z}{dxdy}\right)ik+\left(\frac{d^2Z}{dY^2}-\frac{d^2z}{dy^2}\right)\frac{k^2}{1.2}+\dots$$

Въ этомъ разложеніи $\frac{dZ}{dX}$, $\frac{dZ}{dY}$ изображаютъ соотвѣтственно производныя перваго порядка функціи $F(x,y)$ относительно x и y; $\frac{d^2Z}{dX^2}$, $\frac{d^2Z}{dXdY}$, $\frac{d^2Z}{dY^2}$ производныя втораго порядка той же функціи: первая, относительно x; вторая, относительно x и y; третья, относительно y; и такъ далѣе.

Очевидно теперь, что когда будемъ имѣть въ одно время

$$\frac{dZ}{dX}=\frac{dz}{dx}, \quad \frac{dZ}{dY}=\frac{dz}{dy},$$

то ε изобразитъ количество безконечно малое втораго порядка, и поверхности будутъ имѣть прикосновеніе *перваго порядка*

Когда, сверхъ того,

$$\frac{d^2Z}{dX^2}=\frac{d^2z}{dx^2}, \quad \frac{d^2Z}{dXdY}=\frac{d^2z}{dxdy}, \quad \frac{d^2Z}{dY^2}=\frac{d^2z}{dy^2},$$

то прикосновеніе поверхностей будетъ *втораго порядка*, и такъ далѣе.

Вообще, если допустимъ условія

$$Z=z$$
$$\frac{dZ}{dX}=\frac{dz}{dx}, \quad \frac{dZ}{dY}=\frac{dz}{dy}$$
$$\frac{d^2Z}{dX^2}=\frac{d^2z}{dx^2}, \quad \frac{d^2Z}{dXdY}=\frac{d^2z}{dxdy}, \quad \frac{d^2Z}{dY^2}=\frac{d^2z}{dy^2}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{d^mZ}{dX^m}=\frac{d^mz}{dx^m}, \quad \frac{d^mZ}{dX^{m-1}dY}=\frac{d^mz}{dx^{m-1}dy},$$
$$\frac{d^mZ}{dX^{m-2}dY^2}=\frac{d^mz}{dx^{m-2}dy^2}, \dots \frac{d^mZ}{dY^m}=\frac{d^mz}{dy^m},$$

и, сверхъ того, предположимъ, что по крайней мѣрѣ одно изъ равенствъ

$$\frac{d^{m+1}Z}{dX^{m+1}}=\frac{d^{m+1}z}{dx^{m+1}}, \quad \frac{d^{m+1}Z}{dX^mdY}=\frac{d^{m+1}z}{dx^mdy},$$
$$\frac{d^{m+1}Z}{dX^{m-1}dY^2}=\frac{d^{m+1}z}{dx^{m-1}dy^2}, \dots\dots$$

не имѣетъ мѣста, то двѣ кривыя поверхности, удовлетворяющія этимъ условіямъ, будутъ имѣть въ общей точкѣ прикосновеніе m-го *порядка*.

Высшій порядокъ прикосновенія двухъ поверхностей называется, какъ и для кривыхъ линій, *соприкасаніемъ*.

Отсылаемъ читателей для дальнѣйшихъ подробностей къ упомянутымъ уже выше сочиненіямъ. Смот. также COURBURE DES SURFACES, TANGENTE, TANGENT (PLAN).

*

CONTACT (ÉLÉMENS DE). ЭЛЕМЕНТЫ КАСАНІЯ. Такъ называются постоянныя величины, входящія въ уравненіе касательной или соприкасающейся кривой. Такъ, напримѣръ, въ *соприкасающемся кругѣ,* имѣющемъ съ предложенною кривой касаніе втораго порядка, *элементами касанія* будутъ: двѣ координаты его центра и радіусъ. Вообще, касаніе m-го порядка будетъ зависѣть отъ $m+1$ элемента касанія. Смот. предыдущую статью.

CONTACT (ANGLE DE). Уголъ смежности, уголъ касанія. Смот. CONTINGENCE (ANGLE DE).

CONTENANCE. КВАДРАТНОЕ СОДЕРЖАНІЕ. *Contenance des pièces de terre*; *квадратное содержаніе, площадь участковъ земли.*

CONTENIR. (Теор. Чис.) **ЗАКЛЮЧАТЬ.** Когда видъ второй степени

$$F = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

можетъ быть измѣненъ въ другой

$$F' = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$$

чрезъ положеніе $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$, гдѣ α, β, γ и δ изображаютъ цѣлыя числа, то, слѣдуя *Гауссу*, говоримъ, что видъ F *заключаетъ* видъ F', или, что видъ F' *заключается* въ F. —

Въ *Геометріи* говорится, что поверхность или плоскость *заключаетъ* линію, когда сія послѣдняя лежитъ всѣми своими точками на этой поверхности или плоскости. —

CONTENU, CAPACITÉ, CONTINENCE. ЁМКОСТЬ, ВМѢСТИТЕЛЬНОСТЬ, ВМѢСТИМОСТЬ. Пространство заключающееся внутри какого либо сосуда.

CONTE-PAS. Смот. COMPTE-PAS.

CONTIGU. (Геом.) **СМЕЖНЫЙ, ПРИЛЕЖАЩІЙ, СОПРИКОСНОВЕННЫЙ.** *Deux solides contigus, два смежныя тѣла,* то есть, прилежащія одно къ другому. *Les trois arêtes contiguës d'un parallélépipède*; *три смежныя ребра параллелопипеда*; *angles contigus* или *adjacents*, *смежные углы*. Смот. ADJACENT.

CONTIGUË (FONCTION). (Анал.) **НЕПРЕРЫВАЮЩАЯСЯ, СПЛОШНАЯ ФУНКЦІЯ.** Такая функція, коей значеніе отъ весьма малаго измѣненія перемѣнной величины, также весьма мало измѣняется, хотя это измѣненіе и не подчинено вездѣ одному закону. Напримѣръ, на чертежѣ 8 (Листъ V) функція, изображающая ординату фигуры $MM'M''M'''$, составленной изъ различныхъ кривыхъ MM', $M'M''$, $M''M'''$, удовлетворяетъ закону непрерывающейся функціи; но законъ измѣненія ординаты отъ точки M до точки M''' перемѣняется; и дѣйствительно, такъ какъ кривыя MM', $M'M''$, $M''M'''$ предполагаются различными, то очевидно, что и законъ измѣняемости ординатъ для каждой изъ частей MM', $M'M''$ и $M''M'''$ будетъ различенъ. И такъ, въ геометрическомъ смыслѣ, *сплошная функція* изображается ординатою фигуры, коей периметръ не прерывается. Напротивъ того *прерывающеюся функціею (fonction discontiguë)* называется такая, которая имѣетъ дѣйствительныя значенія только между нѣкоторыми системами предѣловъ перемѣнной величины. И такъ, функція $f(x)$ будетъ *прерывающеюся*, если она имѣетъ опредѣленныя значенія отъ $x = a$ до $x = b$, отъ $x = c$ до $x = d$, отъ $x = e$ до $x = f, \ldots$ и не допускаетъ никакихъ значеній отъ $x = b$ до $x = c$, отъ $x = d$ до $x = e, \ldots$ — Въ геометрическомъ смыслѣ, *прерывающаяся кривая* будетъ такая черта, коей различныя части не соединены между собою. И такъ, перемѣнная ордината фигуры MM', $M''M'''$ (черт. 8 листъ V) изобразитъ функцію *прерывающуюся*, ибо эта функція будетъ существовать только отъ $x = OP$ до $x = OP'$, отъ $x = OP''$ до $x = OP'''$, а отъ $x = OP'$ до $x = OP''$ она не имѣетъ вовсе никакого значенія.

Всякую кривую линію, начерченную наудачу, то есть, не подчиненную никакому закону, можно назвать *сплошною* или *непрерывающеюся*, если только между частями ея не будетъ разрыва. Въ противномъ случаѣ, кривая принимаетъ названіе *прерывающейся*. Смот. для сличенія CONTINUE (FONCTION).

CONTIGUËS (FORMES). (Теор. Чис.) **СМЕЖНЫЕ ВИДЫ.** Такъ называетъ *Гауссъ* виды второй степени

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \text{ и } a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$$

когда *опредѣлители* (*déterminants*) обоихъ видовъ, то есть количества $b^2 - ac$ и $b'^2 - a'c'$, равны между собою, и сверхъ того $c = a'$ и $b + b' \equiv 0$ (mod. c). И такъ, виды

$$5x^2 + 8xy + 7y^2 \text{ и } 7x'^2 + 6x'y' + 2y'^2$$

смежны между собою, ибо $4^2 - 5.7 = 3^2 - 2.7$, и сверхъ того коэффиціенты предъ y^2 и x'^2 равны, а $b + b'$, то есть $4 + 3$ дѣлится на $c = 7$.

Что касается до свойствъ смежныхъ видовъ, то отсылаемъ по сему предмету къ *пятому отдѣленію* извѣстнаго сочиненія *Гаусса*: *Recherches arithmétiques.* Смот. также въ этомъ Лексиконѣ статью FORMES (THÉORIE DES).

CONTIGUITÉ. СМЕЖНОСТЬ, соприкосновенность, сопредѣльность.

CONTINENCE. Смот. CONTENU.

CONTINGENCE (ANGLE DE) или ANGLE DE SÉGMENT. (Геом.) **УГОЛЪ СМЕЖНОСТИ,** уголъ касанія. Такъ называли уголъ, составляемый круговою дугою съ касательною, проведенною къ этой дугѣ въ какой ни есть ея точкѣ. И такъ, уголъ DAT, составляемый круговою дугою DEA съ касательною AT (Черт. 9 Листъ V), въ этомъ смыслѣ, есть уголъ смежности.

Въ XVI столѣтіи Французскій математикъ *Яковъ Пельтье* (*Pelletier*) имѣлъ съ *Клавіусомъ* жаркое преніе объ углѣ смежности. Клавіусъ утверждалъ, противно мнѣнію Пельтье, что уголъ смежности и уголъ прямолинейный свойства совершенно различнаго, и не могутъ быть сравниваемы между собою, точно такъ какъ линія съ площадью; онъ основывался на томъ, что уголъ смежности менѣе всякаго прямолинейнаго угла. Позже, многіе математики возобновляли пренія объ этомъ предметѣ, и даже извѣстный *Вальисъ* написалъ цѣлый трактатъ объ углѣ смежности.

Всѣ эти недоразумѣнія относительно угла смежности произошли отъ того, что предварительно не согласились въ томъ, что̀ должно разумѣть подъ словомъ *уголъ*. Нынѣ вопросъ объ углѣ смежности оставленъ безъ вниманія, потому что доказательство геометрическихъ свойствъ этого угла, въ которыхъ всѣ математики соглашаются, нисколько не заимствуется метафизическими понятіями объ его сущности. —

Нынѣ подъ *угломъ смежности* преимущественно разумѣютъ уголъ $Tm'T'$ (черт. 10), составляемый двумя *смежными* касательными mT и $m'T'$ къ какой ни есть кривой линіи. Въ Дифференціальномъ Исчисленіи доказываютъ, что уголъ смежности равенъ элементу дуги кривой линіи, раздѣленному на соотвѣтствующій той дугѣ въ точкѣ касанія радіусъ кривизны.

Дѣйствительно, разсмотримъ на кривой, отнесенной къ прямоугольнымъ координатамъ x, y, двѣ точки m и m', безконечно близкія между собою, и соотвѣтственно опредѣляемыя координатами x, y и $x+dx$, $y+dy$. Если означимъ чрезъ α уголъ, составляемый касательною въ точкѣ m кривой съ осью x-овъ, а чрезъ α' такой же уголъ относительно точки m', то уголъ смежности будетъ равняться разности $\alpha-\alpha'$; изобразивъ его чрезъ δ, и наблюдая что $tang\,\alpha = \frac{dy}{dx}$, $tang\,\alpha' = \frac{d(y+dy)}{d(x+dx)} = \frac{dy+d^2y}{dx}$, (ибо dx можно принять постояннымъ и слѣдовательно $d^2x=0$), получимъ

$$tang(\alpha-\alpha') = tang\,\delta = \frac{\frac{dy}{dx}-\frac{dy+d^2y}{dx}}{1+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dy+d^2y}{dx}} = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}\cdot dx}{1+\frac{dy^2}{dx^2}},$$

потому что количество $\frac{dyd^2y}{dx^2}$, какъ безконечно малое, должно быть откинуто. Но извѣстно, что изобразивъ чрезъ ρ радіусъ кривизны, имѣемъ (Смот. RAYON DE COURBURE)

$$\rho = -\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

откуда

$$-\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{\rho};$$

подставляя эту величину въ выраженіе для $tang\,\delta$, получимъ

$$tang\,\delta = \frac{dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{\rho};$$

но $dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$ изображаетъ элементъ дуги разсматриваемой кривой линіи; слѣдовательно, означивъ чрезъ s эту дугу, найдется

$$tang\,\delta = \frac{ds}{\rho},$$

и, по причинѣ δ безконечно малаго, будетъ $tang\,\delta = \delta$, почему $\delta = \frac{ds}{\rho}$,

что̀ и имѣли въ виду доказать.

CONTINGENCE (LIGNE DE). (Гном.) **ЛИНІЯ СМЕЖНОСТИ.** Линія, пересѣкающая *подъукасательную* подъ прямыми углами. См. SOUSTYLAIRE.

CONTINGENTE (LIGNE). Уст. выр. **КАСАТЕЛЬНАЯ.** Смот. TANGENTE.

CONTINU. (Мат.) **НЕПРЕРЫВНЫЙ.** *Quantité continue, непрерывное количество.* См. DISCRÈTE. — *Mouvement continu, непрерывное движеніе. Décrire une courbe par un mouvement continu; начертить кривую непрерывнымъ движеніемъ.* Смот. примѣры такого черченія въ статьяхъ: DIRECTRICE, ELLIPSE, HYPERBOLE и проч.

CONTINUE (PROPORTION). (Арие.) **НЕПРЕРЫВНАЯ ПРОПОРЦІЯ.** Пропорція, въ которой средніе два члена равны между собою. Такова ариеметическая $a - b : b - c$ и геометрическая $a : b :: b : c$. Смот. PROPORTION.

CONTINUE (FONCTION). (Анал.) **НЕПРЕРЫВНАЯ, ПОСЛѢДОВАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦІЯ.** Функція перемѣнной x называется *непрерывною между данными предѣлами*, когда безконечно малому приращенію перемѣнной, заключающейся между сими предѣлами, будетъ всегда соотвѣтствовать и безконечно малое вещественное приращеніе, того же или высшаго порядка, самой функціи. И такъ, если функція $f(x)$ есть непрерывная между предѣлами a и b, то, изобразивъ чрезъ α безконечно малое количество, отношеніе $\frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}$ будетъ всегда величина вещественная, конечная или безконечно малая, для всякаго значенія x, заключающагося между a и b. Впрочемъ, къ приведенному сей-часъ опредѣленію, надобно прибавить условіе, что функція $f(x)$, для непрерывности, должна опредѣляться посредствомъ однихъ и тѣхъ же дѣйствій для всѣхъ значеній перемѣнной x, заключающихся между предѣлами a и b. И такъ, надлежало бы принимать за *прерывную* такую функцію $f(x)$, которая, удовлетворяя требованію относительно содержанія $\frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}$, опредѣлялась бы отъ $x = a$ до $x = c$ нѣкоторымъ родомъ дѣйствій φ, а другими дѣйствіями, напримѣръ ψ, отъ $x = c$ до $x = b$, гдѣ подъ c разумѣемъ число, заключающееся между предѣлами a и b; сказанное о функціи $f(x)$ очевидно приводится къ тому, что она отъ $x = a$ до $x = c$, равнозначуща съ $\varphi(x)$, а отъ $x = c$ до $x = b$, съ функціею $\psi(x)$; для сличенія, Смот. CONTIGUË (FONCTION). Когда функція не удовлетворяетъ между данными предѣлами сказаннымъ условіямъ, то она называется *прерывною (discontinue)*.

Для примѣра непрерывныхъ функцій приведемъ x^3, $\frac{1}{x-1}$, $\log x$; первая изъ нихъ непрерывна для всѣхъ возможныхъ значеній перемѣнной x, то есть, отъ $x = -\infty$ до $x = +\infty$; вторая будетъ непрерывною отъ $x = 1$ до $x = \infty$, и отъ $x = -\infty$ до $x = 1$, а третья, только для положительныхъ значеній x, то есть, отъ $x = 0$ до $x = \infty$. Функція $\frac{1}{x-1}$ дѣлается прерывною для $x = 1$, ибо обращается въ $\pm\infty$. И такъ, для частнаго значенія $x = 1$, дробь $\frac{1}{x-1}$ имѣетъ *разрывъ непрерывности* (*solution de continuité*). Что касается до $\log x$, то очевидно, что для отрицательныхъ значеній перемѣнной x, эта функція дѣлается мнимою.

Функція со многими перемѣнными независимыми $f(x, y, z \ldots\ldots)$, очевидно удовлетворитъ условіямъ непрерывности, если $F(\alpha) = f(x+\alpha p, y+\alpha q, z+\alpha r, \ldots)$ будетъ непрерывна относительно α въ сопредѣльности частнаго значенія $\alpha = 0$, каковы бы впрочемъ ни были количества $x, y, z \ldots\, p, q, r \ldots$

CONTINUE (FRACTION). (Анал.) **НЕПРЕРЫВНАЯ, ЦѢПНАЯ ДРОБЬ.**

§ 1. Такъ называется выраженіе вида

$$a + \cfrac{b}{c + \cfrac{d}{e + \cfrac{f}{g + \cdots}}}$$

гдѣ $a, b, c, d, e, f, g, \ldots$ изображаютъ числа цѣлыя, положительныя или отрицательныя. Непрерывныя дроби, весьма примѣчательныя по многоразличнымъ своимъ приложеніямъ, открыты, какъ думаютъ, *Лордомъ Брункеромъ* (*Brouncker*) около середины XVII-го столѣтія. Извѣстный Англійскій математикъ *Вальисъ* (*Wallis*), занимавшійся опредѣленіемъ приближеннаго отношенія окружности круга къ діаметру, нашелъ рядъ приближенныхъ значеній для этого отношенія, но былъ недоволенъ своимъ рѣшеніемъ *); онъ сооб-

*) Отношеніе, найденное *Вальисомъ*, опредѣляется дробью $\frac{3.3.5.5.7.7.9.9\ldots}{2.4.4.6.6.8.8\ldots}$, которая будетъ болѣе и болѣе приближаться къ истинному отношенію, по мѣрѣ увеличенія числа множителей какъ въ числителѣ такъ и въ знаменателѣ.

щилъ его Лорду Брункеру, весьма искусному въ Геометріи, и просилъ его содѣйствія для усовершенствованія найденнаго имъ рѣшенія. Брункеръ занялся этимъ предметомъ, который и привелъ его къ примѣчательному открытію непрерывныхъ дробей. Для рѣшенія вопроса, предложеннаго ему Вальисомъ, онъ нашелъ безконечное выраженіе

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+\cdots}}}}}}$$

которое изображаетъ четверть площади круга, принимая за единицу площадь квадрата, построеннаго на радіусѣ. Такого рода выраженіе, по виду своему, и названо *цѣпною* или *непрерывною дробью*. Приведенная сей-часъ дробь, примѣчательная тѣмъ, что была первымъ открытіемъ въ этой теоріи, будетъ доказана въ § 10.

Послѣ Брункера *Гугенсъ* занимался съ успѣхомъ изслѣдованіями о непрерывныхъ дробяхъ. Но никто болѣе *Эйлера*, и въ особенности *Лагранжа*, не усовершенствовалъ этой теоріи; ихъ труды по сему предмету поставили теорію непрерывныхъ дробей на ряду съ самыми примѣчательными. Отсылаемъ къ сочиненіямъ: *Introductio in analysin infinitorum* (Эйлера); *Mémoires de Pétersbourg* (Эйлера); *Mémoires de Berlin*, том. XXIII и XXIV (Лагранжа); *Additions à la traduction française des élémens d'Algèbre de M. Euler* (Лагранжа); *Meditationes algebricae*, сочин. *Варинга*, занимавшагося также теоріею непрерывныхъ дробей.

Непрерывная дробь въ общемъ видѣ

$$a+\cfrac{b}{c+\cfrac{d}{e+\cfrac{f}{g+\cdots}}}$$

употребляется не такъ часто. Мы предложимъ нѣкоторыя изслѣдованія о ней въ §§ 10, 11, 12 и 13. Чаще случается, что каждый изъ числителей $b, d, f, \ldots$ равенъ $+1$, а знаменатели $c, e, g, \ldots$ числа цѣлыя положительныя. Въ такомъ предположеніи составляющія дроби $\frac{b}{c}, \frac{d}{e}, \frac{f}{g}, \ldots\ldots$ будутъ вида $\frac{1}{a'}, \frac{1}{a''}, \frac{1}{a'''}, \ldots\ldots$ и слѣдовательно самая непрерывная дробь обратится въ

$$a+\cfrac{1}{a'+\cfrac{1}{a''+\cfrac{1}{a'''+\cdots}}}$$

§ 2. Чтобы обратить какую ни есть величину x, раціональную, ирраціональную или трансцендентную въ непрерывную дробь приведеннаго сей-часъ вида, стоитъ только предполагать послѣдовательно

$$x = a + \frac{1}{x'},\quad x' = a' + \frac{1}{x''},\quad x'' = a'' + \frac{1}{x'''},$$
$$x''' = a''' + \frac{1}{x^{IV}}, \ldots$$

гдѣ a изображаетъ наибольшее цѣлое число, заключающееся въ x; a' наибольшее цѣлое число, содержащееся въ x'; a'' наибольшее цѣлое число, заключающееся въ x'', и такъ далѣе. Подставляя вмѣсто $x', x'', x''', \ldots\ldots$ равныя имъ величины, получимъ выраженіе

$$x = a+\cfrac{1}{a'+\cfrac{1}{a''+\cfrac{1}{a'''+\cdots}}}$$

которое будетъ состоять изъ конечнаго числа членовъ, если x изображаетъ величину раціональную, а изъ безконечнаго въ противномъ случаѣ. Величины $a, a', a'', a''', \ldots$ именуются *частными знаменателями* или просто *знаменателями* (*quotiens*), а $x', x'', x''', x^{IV}, \ldots$ *частными* или *полными дробями* (*quotiens complets*). Дроби $\frac{1}{a'}, \frac{1}{a''}, \frac{1}{a'''}, \ldots$, какъ уже сказано выше, называются *составляющими дробями* (*fractions composantes*).

§ 3. Изъ сказаннаго, легко заключить, что послѣдовательныя приближенныя величины количества x, будутъ

$$a = \frac{a}{1}$$

$$a + \frac{1}{a'} = \frac{aa'+1}{a'}$$

$$a + \cfrac{1}{a'+\cfrac{1}{a''}} = \frac{aa'a''+a''+a}{a'a''+1}$$

$$a+\cfrac{1}{a'+\cfrac{1}{a''+\cfrac{1}{a'''}}} = \frac{aa'a''a'''+a''a'''+aa'''+aa'+1}{a'a''a'''+a'''+a'}$$

. . . .

Эти приближенныя величины для x называются *главными, приближающимися* или *сходящимися дробями (fractions principales* или *fractions convergentes).* Законъ ихъ составленія очень простъ: дѣйствительно, если предположимъ, что n-ая изъ нихъ изображена чрезъ $\frac{p_n}{q_n}$, $(n-1)$-ая чрезъ $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, а $(n-2)$-ая чрезъ $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$, и если, сверхъ того, изобразимъ чрезъ $\alpha^{(n-1)}$ *частнаго знаменателя*, соотвѣтствующаго дроби $\frac{p_n}{q_n}$, то получимъ

$$p_n = p_{n-1}\alpha^{(n-1)} + p_{n-2} \text{ и } q_n = q_{n-1}\alpha^{(n-1)} + q_{n-2},$$

и слѣдовательно

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}\alpha^{(n-1)}+p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha^{(n-1)}+q_{n-2}}.$$

Очевидно, что когда вмѣсто знаменателя $\alpha^{(n-1)}$ подставимъ *полную дробь* $x^{(n-1)}$, то первая часть этого уравненія обратится въ самую величину x; и такъ, получимъ

$$x = \frac{p_{n-1}x^{(n-1)}+p_{n-2}}{q_{n-1}x^{(n-1)}+q_{n-2}}.$$

Замѣтимъ, что главныя дроби

$$\frac{\alpha}{1},\ \frac{\alpha\alpha'+1}{\alpha'},\ \frac{\alpha\alpha'\alpha''+\alpha''+\alpha}{\alpha'\alpha''+1},\dots$$

будутъ попеременно то менѣе, то болѣе величины x, то есть

$$\frac{\alpha}{1} < x,\ \frac{\alpha\alpha'+1}{\alpha'} > x,\ \frac{\alpha\alpha'\alpha''+\alpha''+\alpha}{\alpha'\alpha''+1} < x,\dots$$

§ 4. Другое, весьма примѣчательное свойство главныхъ дробей, состоитъ въ томъ, что каждая изъ нихъ приближается къ истинной величинѣ x болѣе, нежели всякая другая дробь, коей члены (т. е. числитель и знаменатель) менѣе членовъ разсматриваемой главной дроби. Легко удостовѣриться въ этомъ, замѣтивъ, что разность между двумя ближайшими главными дробями, выражается единицею, положительною или отрицательною, раздѣленною на произведеніе знаменателей этихъ самыхъ главныхъ дробей. И такъ, если предположимъ

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{\alpha}{1}$$
$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{\alpha\alpha'+1}{\alpha'}$$
$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{\alpha\alpha'\alpha''+\alpha''+\alpha}{\alpha'\alpha''+1}$$
$$\cdots\cdots$$
$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_{n-2}\alpha^{(n-2)}+p_{n-3}}{q_{n-2}\alpha^{(n-2)}+q_{n-3}}$$
$$\frac{p_n}{n} = \frac{p_{n-1}\alpha^{(n-1)}+p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha^{(n-1)}+q_{n-2}},$$

то получимъ

$$\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = -\frac{1}{q_1q_2}$$
$$\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_3}{q_3} = +\frac{1}{q_2q_3}$$
$$\cdots\cdots$$
$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{q_{n-1}q_n}$$

или

$$p_1q_2 - p_2q_1 = -1$$
$$p_2q_3 - p_3q_2 = +1$$
$$\cdots\cdots$$
$$p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

Послѣднія формулы доставляютъ весьма простой способъ для рѣшенія неопредѣленныхъ уравненій первой степени, какъ показано будетъ въ § 8.

§ 5. Возьмемъ теперь рядъ приближающихся дробей

$$\frac{p_1}{q_1},\ \frac{p_2}{q_2},\ \frac{p_3}{q_3},\ \frac{p_4}{q_4},\ \frac{p_5}{q_5},\ \frac{p_6}{q_6},\dots\dots$$

и разложимъ его на два другіе

$$(1)\quad \frac{p_1}{q_1},\ \frac{p_3}{q_3},\ \frac{p_5}{q_5},\dots\dots \qquad (2)\quad \frac{p_2}{q_2},\ \frac{p_4}{q_4},\ \frac{p_6}{q_6},\dots\dots$$

изъ которыхъ первый заключаетъ въ себѣ дроби, ме́ньшія величины x, а второй, бо́льшія. Составимъ теперь разности

$$\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_3q_1 - p_1q_3}{q_1q_3} = \frac{\alpha''}{q_1q_3}$$
$$\frac{p_5}{q_5} - \frac{p_3}{q_3} = \frac{p_5q_3 - p_3q_5}{q_3q_5} = \frac{\alpha^{IV}}{q_3q_5}$$
$$\cdots\cdots$$
$$\frac{p_4}{q_4} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_4q_2 - p_2q_4}{q_2q_4} = \frac{\alpha'''}{q_2q_4}$$
$$\frac{p_6}{q_6} - \frac{p_4}{q_4} = \frac{p_6q_4 - p_4q_6}{q_4q_6} = \frac{\alpha^{V}}{q_4q_6}$$
$$\cdots\cdots$$

Если каждая изъ величинъ α'', α^{IV}, ... α''', α^{V},.... равна единицѣ, то между двумя послѣдовательными дробями ряда (1), а равно и ряда (2), невозможно будетъ включить ни одной дроби, коей бы знаменатель былъ менѣе знаменателей этихъ двухъ дробей. Но когда количества α'', α^{IV},...... α''', α^{V},...... будутъ болѣе единицы, то всегда можно будетъ включить между упомянутыми дробями столько другихъ дробей, сколько содержится единицъ въ разностяхъ $\alpha''-1$, $\alpha^{IV}-1$,...... $\alpha'''-1$, $\alpha^{V}-1$,...... Напримѣръ, для включенія дробей между $\frac{p_3}{q_3}$ и $\frac{p_1}{q_1}$, надобно будетъ въ выраженіяхъ $p_3 = p_2\alpha'' + p_1$ и $q_3 = q_2\alpha'' + q_1$ подставлять постепенно вмѣсто

α'' числа 1, 2, 3, ... $(\alpha''-1)$, чрезъ что произойдутъ слѣдующія дроби:

$$(3)\quad \frac{p_2+p_1}{q_2+q_1},\ \frac{2p_2+p_1}{2q_2+q_1},\ \frac{3p_2+p_1}{3q_2+q_1},\ \ldots \frac{(\alpha''-1)p_2+p_1}{(\alpha''-1)q_2+q_1}.$$

И такъ, еслибы $\alpha''=5$, то получились бы четыре дроби, а именно:

$$\frac{p_2+p_1}{q_2+q_1},\ \frac{2p_2+p_1}{2q_2+q_1},\ \frac{3p_2+p_1}{3q_2+q_1},\ \frac{4p_2+p_1}{4q_2+q_1}.$$

Включаемыя такимъ образомъ дроби называются *промежуточными* или *посредствующими* (*fractions intermédiaires* или *fractions secondaires*). Должно замѣтить, что въ ряду (3) невозможно включить ни одной дроби, заключающейся между двумя смежными промежуточными дробями, и для которой бы знаменатель также заключался между знаменателями сихъ смежныхъ дробей.

§ 6. Предположимъ что дробь $\frac{p}{q}$, меньшая единицы, обращена въ непрерывную, такъ что

$$\frac{p}{q}=\cfrac{1}{\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cdots+\cfrac{1}{\varkappa+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\mu}}}}}}.$$

Пишемъ рядъ знаменателей и главныхъ дробей, имъ соотвѣтствующихъ:

Знаменатели: $\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots \varkappa,\ \lambda,\ \mu.$

Главныя дроби: $\frac{0}{1},\ \frac{1}{\alpha},\ \frac{\beta}{\alpha\beta+1}, \ldots \frac{p_{000}}{q_{000}},\ \frac{p_{00}}{q_{00}},\ \frac{p_0}{q_0},\ \frac{p}{q}.$

Первая главная дробь $\frac{0}{1}$ написана для того, чтобы для составленія третей $\frac{\beta}{\alpha\beta+1}$ имѣть двѣ предшествующія; по закону составленія главныхъ дробей получимъ

$$q=\mu q_0+q_{00},\quad \text{откуда}\quad \frac{q_0}{q}=\cfrac{1}{\mu+\cfrac{q_{00}}{q_0}}$$

$$q_0=\lambda q_{00}+q_{000},\qquad \frac{q_{00}}{q_0}=\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{q_{000}}{q_{00}}}$$

$$q_{00}=\varkappa q_{000}+q_{0000},\qquad \frac{q_{000}}{q_{00}}=\cfrac{1}{\varkappa+\cfrac{q_{0000}}{q_{000}}}$$

. . . .

Изъ этихъ равенствъ выводимъ

$$\frac{q_0}{q}=\cfrac{1}{\mu+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\varkappa+\cdots+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\alpha}}}}}.$$

Слѣдовательно, разложеніе дроби $\frac{q_0}{q}$ въ непрерывную доставитъ тѣхъ же знаменателей μ, λ, ... β, α, какъ и для дроби $\frac{p}{q}$, но только въ обратномъ порядкѣ. Поэтому, если случится, что рядъ знаменателей $\mu, \lambda, \varkappa, \ldots\ \gamma, \beta, \alpha$ будетъ симетрическій, то есть такого вида: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ \gamma, \beta, \alpha$, то очевидно получимъ $\frac{q_0}{q}=\frac{p}{q}$, или $q_0=p$. И на-оборотъ, если $q_0=p$, то можно будетъ заключить, что рядъ знаменателей есть *симетрическій*. Такого рода непрерывная дробь, то есть выраженіе

$$\cfrac{1}{\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cdots+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\alpha}}}}}},$$

называется *непрерывною симетрическою дробью* (*fraction continue symétrique*); мы увидимъ въ § 9, что при разложеніи въ непрерывную дробь корня квадратнаго изъ какого ни есть цѣлаго числа, получаемъ непрерывную дробь симетрическую.

§ 7. *Періодическою непрерывною дробью* (*fraction continue périodique*) называется такая непрерывная дробь, въ которой знаменатели составляющихъ дробей, начиная или съ перваго члена α, или съ котораго нибудь изъ нихъ, составляютъ рядъ повторяющихся чиселъ, то есть, *періодъ*; таковы напримѣръ дроби

$$1+\sqrt{2}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}$$

$$\frac{11}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{5}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}}$$

Въ первой дроби періодъ начинается съ перваго члена, и состоитъ изъ одного числа, именно 2. Во второй, періодъ начинается только съ третьяго члена, именно съ 2, и состоитъ изъ двухъ чиселъ 2 и 1. Періодическая непрерывная дробь, состоящая изъ безконечнаго числа членовъ, всегда выражаетъ ирраціональный корень уравненія второй степени. Въ § 9 будетъ доказано, что корень квадратный изъ цѣлаго числа, не квадратнаго, доставляетъ при разложеніи *періодическую* непрерывную дробь, коей періодъ начинается со втораго члена.

Доказательства приведенныхъ здѣсь различныхъ предложеній о непрерывныхъ дробяхъ, читатели найдутъ почти во всѣхъ курсахъ Алгебры, почему мы и не будемъ останавливаться на этомъ предметѣ, а перейдемъ къ нѣкоторымъ примѣчательнѣйшимъ приложеніямъ теоріи непрерывныхъ дробей къ различнымъ задачамъ изъ Анализа.

§ 8. **Рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій 1-й степени съ двумя неизвѣстными посредствомъ непрерывныхъ дробей.**

a) Пусть будетъ предложено рѣшить уравненіе $ax - by = c$,
въ которомъ a, b и c изображаютъ данныя цѣлыя числа, всѣ три положительныя, а x и y неизвѣстныя величины, но также цѣлыя. Замѣтимъ, что числа a и b предполагаются простыми между собою; дѣйствительно, еслибы они имѣли общаго дѣлителя, то и c имѣло бы того же самаго дѣлителя, и слѣдовательно все уравненіе дѣлилось бы на него. Напримѣръ, если бы $a = \lambda a_1$, $b = \lambda b_1$, то необходимо имѣли бы и $c = \lambda c_1$, почему данное уравненіе приняло бы видъ

$$\lambda a_1 x - \lambda b_1 y = \lambda c_1 \quad \text{или} \quad a_1 x - b_1 y = c_1,$$

гдѣ уже числа a_1 и b_1 простыя между собою. И такъ, мы предполагаемъ что дробь $\frac{a}{b}$ *несократимая*.

Изобразимъ чрезъ x_1 и y_1 два числа, удовлетворяющія уравненію

(1) $$ax_1 - by_1 = 1;$$

помноживъ сіе послѣднее на c, получимъ

$$acx_1 - bcy_1 = c.$$

Сравненіе этого уравненія съ предложеннымъ приводитъ къ слѣдующимъ величинамъ для x и y:

(2) $$x = cx_1, \quad y = cy_1.$$

И такъ, опредѣленіе величинъ x и y зависитъ отъ рѣшенія уравненія (1), чего достигаемъ слѣдующимъ образомъ:

Разлагаемъ отношеніе $\frac{a}{b}$ въ *непрерывную дробь*; пусть будетъ

$$\frac{a}{b} = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cdots + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\mu}}}}$$

это разложеніе; откидываемъ послѣднюю дробь $\frac{1}{\mu}$, и обращаемъ

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cdots \cfrac{1}{\lambda}}}$$

въ обыкновенную дробь; изобразимъ ее чрезъ $\frac{p}{q}$; и такъ, $\frac{p}{q}$ и $\frac{a}{b}$ будутъ двѣ смежныя *главныя дроби*; слѣдовательно (въ силу § 4) получимъ

$$aq - bp = \pm 1;$$

знакъ $+$ относится къ тому случаю, когда число частныхъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ будетъ *нечётное*, а знакъ $-$, когда это число *чётное*. И такъ, когда удовлетворяется уравненіе

$$aq - bp = 1,$$

то находимъ одно рѣшеніе уравненія (1) положивъ $x_1 = q$, $y_1 = p$; если же

$$aq - bp = -1,$$

то очевидно будетъ $x_1 = b - q$, $y_1 = a - p$, ибо

$$a(b - q) - b(a - p) = -(aq - bp) = +1.$$

Изъ сказаннаго должно заключить, что во всякомъ случаѣ способъ непрерывныхъ дробей приведетъ къ одному рѣшенію уравненія (1). Пусть будутъ a_1 и b_1 найденныя такимъ образомъ числа, которыя очевидно будутъ соотвѣтственно менѣе b и a. Слѣдовательно

$$aa_1 - bb_1 = 1;$$

если вычтемъ это уравненіе изъ

$$ax_1 - by_1 = 1$$

то получимъ $a(x_1 - a_1) - b(y_1 - b_1) = 0$, или

$$\frac{a}{b} = \frac{y_1 - b_1}{x_1 - a_1};$$

такъ какъ дробь $\frac{a}{b}$ будетъ, по предположенію, несократимая, то помноживъ какъ числителя такъ и знаменателя ея на произвольное цѣлое число k, можно будетъ положить

$$ak = y - b_1; \quad bk = x_1 - a_1,$$

откуда

(3) $x_1 = a_1 + bk,\quad y_1 = b_1 + ak.$

Въ этихъ формулахъ заключается общее рѣшеніе уравненія (1); a_1 и b_1 означаютъ наименьшее его рѣшеніе, а k какое угодно цѣлое число, положительное или отрицательное. Что касается до рѣшенія уравненія $ax - by = c$, то стоитъ только обратиться къ формуламъ (2), въ слѣдствіе которыхъ получимъ частное рѣшеніе $x = a_1c$, $y = b_1c$; слѣдовательно

$$ax - by = c$$
$$a.a_1c - b.b_1c = c;$$

изъ сихъ двухъ уравненій выводимъ

$$\frac{a}{b} = \frac{y - b_1c}{x - a_1c},$$

откуда, по предыдущему,

(4) $x = a_1c + bk,\quad y = b_1c + ak,$

разумѣя подъ k, какъ и выше, произвольное цѣлое число.

Легко видѣть, что по причинѣ неопредѣленности k, можно всегда найти такое рѣшеніе уравненія $ax - by = c$, что величина x не будетъ превышать $\pm \frac{1}{2} b$, или другое, при которомъ число y не превышаетъ $\pm \frac{1}{2} a$. Дѣйствительно, если желаемъ чтобы число x заключалось между предѣлами $\pm \frac{1}{2} b$, то стоитъ только положить k равнымъ отрицательному цѣлому числу, заключающемуся въ дроби $\frac{a_1c}{b}$, или, если остатокъ дѣленія a_1c на b будетъ болѣе $\frac{1}{2} b$, то принять k равнымъ частному отъ $\frac{a_1c}{b}$, увеличенному единицею, и съ отрицательнымъ знакомъ. То же самое должно разумѣть и о величинѣ y.

Для приложенія изложеннаго сей-часъ способа, положимъ, что дано уравненіе

$$95x - 56y = 11;$$

здѣсь $a = 95$, $b = 56$, $c = 11$. Обращая отношеніе $\frac{95}{56}$ въ непрерывную дробь, получимъ

$$\frac{95}{56} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}};$$

откидывая послѣднюю дробь $\frac{1}{2}$, находимъ

$$\frac{p}{q} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{39}{23}.$$

Такъ какъ число знаменателей 1, 1, 2, 3, 2 нечётное, то величины p и q удовлетворяютъ уравненію $95q - 56p = 1$;
слѣдовательно $a_1 = 23$, $b_1 = 39$, и наконецъ

$$x = 23.11 + 56k,\quad y = 39.11 + 95k.$$

Вотъ общее рѣшеніе предложеннаго уравненія. Чтобы найти частное рѣшеніе, для котораго численная величина x не превосходила бы $\frac{1}{2} b = 28$, раздѣлимъ 23.11 на 56; найдемъ частное 4 и остатокъ 29; въ слѣдствіе сказаннаго выше увеличиваемъ 4 единицею, и беремъ для k это число съ отрицательнымъ знакомъ; и такъ $k = -5$, откуда

$$x = 23.11 - 56.5 = -27,\quad y = 39.11 - 95.5 = -46,$$

и мы видимъ, что дѣйствительно численная величина x менѣе $\frac{1}{2} b$, то есть менѣе 28.

b) Для рѣшенія уравненія

$$ax + by = c,$$

гдѣ всѣ буквы имѣютъ прежнія значенія, полагаемъ $y = -Y$, и получаемъ

$$ax - bY = c;$$

но, въ силу формулъ (4), общее рѣшеніе этого уравненія будетъ

$$x = a_1c + bk,\quad Y = b_1c + ak,$$

разумѣя подъ a_1 и b_1 наименьшія числа, удовлетворяющія уравненію

$$aa_1 - bb_1 = 1.$$

Если въ общихъ выраженіяхъ для x и Y напишемъ $-k$ вмѣсто k, и замѣнимъ Y величиною $-y$, то получимъ

(5) $x = a_1c - bk,\quad y = ak - b_1c.$

Иногда уравненіе $ax + by = c$ допускаетъ рѣшенія положительныя; въ такомъ случаѣ, для ихъ опредѣленія, стоитъ только взять цѣлое число k такимъ, чтобы въ одно время имѣли

$$a_1c - bk > 0 \quad \text{и} \quad ak - b_1c > 0,$$

что приводитъ къ условіямъ

$$k < \frac{a_1c}{b} \quad \text{и} \quad k > \frac{b_1c}{a}.$$

И такъ, чтобы уравненіе $ax + by = c$ допускало положительныя рѣшенія, то для этого необходимо, чтобы между предѣлами $\frac{b_1c}{a}$ и $\frac{a_1c}{b}$ заключалось хотя одно цѣлое число; если ихъ нѣсколько, то каждому изъ нихъ будетъ соотвѣтствовать одно положительное рѣшеніе.

Для примѣра возьмемъ уравненіе

$$7x + 11y = 179,$$

въ которомъ $a = 7$, $b = 11$, $c = 179$. Рѣшая вспомогательное уравненіе

$$7a_1 - 11b_1 = 1,$$

получимъ $a_1 = 8$, $b_1 = 5$, и въ силу формулъ (5) найдется

$$x = 8.179 - 11k, \quad y = 7k - 5.179.$$

Чтобы найти положительныя рѣшенія, слѣдуетъ положить

$$8.179 - 11k > 0 \quad \text{и} \quad 7k - 5.179 > 0,$$

откуда $\qquad k < 130\frac{2}{11} \qquad k > 127\frac{6}{7}.$

Слѣдовательно k, въ разсматриваемомъ случаѣ, имѣетъ три значенія, именно: $k = 128$, 129 и 130. Итакъ, предложенное уравненіе допускаетъ три рѣшенія положительныя, именно:

1°. Для $k = 128$, $x = 21$, $y = 1$

2°. Для $k = 129$, $x = 13$, $y = 8$

3°. Для $k = 130$, $x = 2$, $y = 15$.

Читатели найдутъ нѣкоторыя историческія подробности о рѣшеніи неопредѣленныхъ уравненій первой степени въ статьѣ: NOMBRES (THÉORIE DES).

§ 9. **Рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія 2-й степени $Ay^2 + 1 = x^2$ въ цѣлыхъ числахъ посредствомъ непрерывныхъ дробей.**

Такъ какъ это уравненіе служитъ основаніемъ при рѣшеніи общихъ неопредѣленныхъ уравненій второй степени, и поэтому весьма важно въ Теоріи Чиселъ, то мы изложимъ здѣсь его рѣшеніе съ надлежащими подробностями. *Лагранжъ*, основываясь на свойствѣ непрерывныхъ дробей, первый доказалъ, что уравненіе $Ay^2 + 1 = x^2$ допускаетъ всегда безконечное число рѣшеній въ цѣлыхъ числахъ; очевидно впрочемъ, что должно исключить тотъ случай, когда цѣлое число A будетъ квадратное; въ этомъ предположеніи получается только одно рѣшеніе $y = 0$, $x = 1$.

Для рѣшенія неопредѣленнаго уравненія $Ay^2 + 1 = x^2$ въ цѣлыхъ числахъ, обращаемъ $\sqrt{A}$ въ непрерывную дробь. Пусть будетъ a^2 наибольшій квадратъ, заключающійся въ A, а b остатокъ; итакъ $A = a^2 + b$; слѣдовательно

$$\sqrt{A} = a + \frac{1}{x'}$$

откуда

$$x' = \frac{1}{\sqrt{A} - a} = \frac{\sqrt{A} + a}{(\sqrt{A} - a)(\sqrt{A} + a)} = \frac{\sqrt{A} + a}{A - a^2} = \frac{\sqrt{A} + a}{b}.$$

Пусть будетъ α ближайшее цѣлое число, заключающееся въ $\frac{\sqrt{A} + a}{b}$; получимъ

$$x' = \frac{\sqrt{A} + a}{b} = \alpha + \frac{1}{x''};$$

слѣдовательно

$$x'' = \frac{b}{\sqrt{A} + a - b\alpha} = \frac{b(\sqrt{A} + b\alpha - a)}{A - (a - b\alpha)^2} = \frac{\sqrt{A} + b\alpha - a}{1 + 2a\alpha - b\alpha^2} = \beta + \frac{1}{x'''},$$

разумѣя подъ β ближайшее цѣлое число, заключающееся въ $\frac{\sqrt{A} + b\alpha - a}{1 + 2a\alpha - b\alpha^2}$. Легко усмотрѣть, что и вообще будетъ

$$x^{(m)} = \frac{\sqrt{A} + I}{D} = \mu + \frac{1}{x^{(m+1)}},$$

откуда

$$x^{(m+1)} = \frac{D}{\sqrt{A} + I - \mu D}.$$

Но, съ другой стороны, $x^{(m+1)}$ должно быть такого же вида какъ и $x^{(m)}$: слѣдовательно

$$x^{(m+1)} = \frac{\sqrt{A} + I'}{D'} = \frac{D}{\sqrt{A} + I - \mu D}.$$

Освобождаясь отъ знаменателей, и уравнивая раціональную часть раціональной, а ирраціональную ирраціональной, получимъ

$$I' = \mu D - I$$

$$D' = \frac{A - I'^2}{D}.$$

Докажемъ теперь, что величины I' и D' будутъ всегда цѣлыя. Подставляя въ выраженіе для D' величину $\mu D - I$ вмѣсто I', найдемъ

$$D' = \frac{A - (\mu D - I)^2}{D} = \frac{A - I^2}{D} + 2\mu I - \mu^2 D;$$

полагая же

$$x^{(m-1)} = \frac{\sqrt{A} + I_0}{D_0},$$

очевидно получимъ

$$D = \frac{A - I^2}{D_0} \quad \text{или} \quad D_0 = \frac{A - I^2}{D}:$$

слѣдовательно

$$D' = D_0 + 2\mu I - \mu^2 D.$$

Такъ какъ D и I въ двухъ смежныхъ дробяхъ $\frac{\sqrt{A} + a}{b}$, $\frac{\sqrt{A} + b\alpha - a}{1 + 2a\alpha - b\alpha^2}$ равны числамъ цѣлымъ, то, въ слѣдствіе выведеннаго сей-часъ выраженія для D', должно заключить, что и для всѣхъ послѣдующихъ дробей D и I будутъ также цѣлыя.

Представляя величину D' въ видѣ $D' = D_0 + \mu(I - I')$, окажется, что изъ двухъ послѣдовательныхъ дробей

$$\frac{\sqrt{A} + I_0}{D_0} = \mu_0 + \frac{1}{x^{(m)}}$$

$$\frac{\sqrt{A} + I}{D} = \mu + \frac{1}{x^{(m+1)}},$$

получится величина непосредственно слѣдующей за ними дроби $\frac{\sqrt{A}+I'}{D'}$, употребляя на этотъ конецъ весьма простыя формулы

$$I' = \mu D - I$$
$$D' = D_0 + \mu(I - I').$$

Изобразимъ теперь чрезъ $\frac{p_0}{q_0}$ и $\frac{p}{q}$ двѣ послѣдовательныя сходящіяся дроби, получаемыя чрезъ разложеніе $\sqrt{A}$ въ непрерывную дробь. Пусть будетъ $\frac{\sqrt{A}+I}{D}$ полная дробь, соотвѣтствующая $\frac{p}{q}$; по извѣстному правилу (§ 3) найдемъ

$$\sqrt{A} = \frac{p\left(\frac{\sqrt{A}+I}{D}\right)+p_0}{q\left(\frac{\sqrt{A}+I}{D}\right)+q_0} = \frac{p\sqrt{A}+pI+p_0D}{q\sqrt{A}+qI+q_0D},$$

откуда получаемъ два уравненія

$$pI + p_0D = qA$$
$$qI + q_0D = p,$$

которыя приводятъ самымъ простымъ образомъ къ слѣдующимъ равенствамъ:

$$(pq_0 - p_0q)I = qq_0A - pp_0$$
$$(pq_0 - p_0q)D = p^2 - Aq^2.$$

Но мы знаемъ, что $pq_0 - p_0q = +1$ если $\frac{p}{q} > \sqrt{A}$, а $pq_0 - p_0q = -1$, когда $\frac{p}{q} < \sqrt{A}$; слѣдовательно $pq_0 - p_0q$ и $p^2 - Aq^2$ будутъ всегда имѣть одинакіе знаки, откуда заключаемъ, что D во всякомъ случаѣ будетъ количество положительное. Можно также замѣтить мимоходомъ, что предыдущія формулы прямо доказываютъ, что I и D числа цѣлыя, ибо коэффиціентъ передъ каждымъ изъ нихъ равенъ $pq_0 - p_0q = \pm 1$. Сверхъ того, легко усмотрѣть, что величина I будетъ также положительная; дѣйствительно, изъ уравненія $qI + q_0D = p$ выводимъ $\frac{q_0}{q} = \frac{\left(\frac{p}{q} - I\right)}{D}$; но такъ какъ $q_0 < q$, то должно быть $D > \frac{p}{q} - I$; съ другой же стороны, $\frac{\sqrt{A}+I}{D} > 1$, слѣдовательно $D < \sqrt{A} + I$. Изобразимъ разность между $\sqrt{A}$ и $\frac{p}{q}$ чрезъ ε; эта разность очевидно будетъ правильная дробь, положительная или отрицательная; такимъ образомъ получимъ $\frac{p}{q} = \sqrt{A} - \varepsilon$, почему

$$D > \sqrt{A} - I - \varepsilon \quad \text{и} \quad D < \sqrt{A} + I;$$

но эти два неравенства дѣлаются несовмѣстными, когда положимъ I отрицательнымъ; слѣдовательно, должно заключить изъ этого, что число I всегда положительное.

Теперь легко будетъ найти предѣлы для величинъ I и D; дѣйствительно, изъ уравненія $A - I^2 = D_0D$ выводимъ $I < \sqrt{A}$; слѣдовательно I не можетъ быть болѣе цѣлаго числа a, содержащагося въ $\sqrt{A}$. Что касается до числа D, то изъ уравненія $I' + I = \mu D$ заключаемъ, что наибольшая величина D, а вмѣстѣ и знаменателя μ, будетъ $2a$, ибо сумма $I' + I$, какъ мы сей-часъ видѣли, не можетъ превышать $2a$.

Но такъ какъ непрерывная дробь, изображающая ирраціональную величину $\sqrt{A}$, будетъ простираться въ безконечность, и какъ сверхъ того I и D допускаютъ только ограниченное число различныхъ значеній, то очевидно, что опредѣленной величинѣ для I будетъ соотвѣтствовать безконечное число разъ опредѣленная же величина для D. Слѣдовательно, коль скоро найдемъ полную дробь $\frac{\sqrt{A}+I}{D}$, которая уже прежде находилась въ разложеніи, то ясно, что всѣ слѣдующіе знаменатели составляющихъ дробей будутъ одинаковы съ тѣми, которые найдены прежде, и возвратятся въ томъ же самомъ порядкѣ. И такъ, непрерывная дробь, выражающая $\sqrt{A}$, будетъ состоять изъ постояннаго *періода*, повторяющагося безконечное число разъ. Теперь надлежитъ опредѣлить съ точностію тотъ членъ, на которомъ начинается періодъ.

Пусть будутъ $\mu, \mu', \mu'' \ldots\ldots \omega$ знаменатели этого періода; $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$, знаменатели непрерывной дроби, выражающей $\sqrt{A}$, и предшествующіе періоду. Порядокъ сихъ знаменателей и соотвѣтствующихъ имъ главныхъ дробей будетъ слѣдующій:

Знаменатели непрерывной дроби для $\sqrt{A}$:

a, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$; $\mu, \mu', \mu'', \ldots \omega$; $\mu, \mu', \mu'', \ldots \omega$; и проч.

Главныя дроби:

$\frac{1}{0}, \frac{a}{1}, \ldots\ldots \frac{p_0}{q_0}; \frac{p}{q} \ldots\ldots\ldots \frac{p'_0}{q'_0}; \frac{p'}{q'}, \ldots\ldots\ldots$

Первая дробь $\frac{1}{0}$ поставлена только для того, чтобы обнаружить извѣстный законъ составленія приближающихся дробей, начиная съ третей.

Пусть полныя дроби, соотвѣтствующія главнымъ дробямъ $\frac{1}{0}, \frac{a}{1}, \ldots \frac{p_0}{q_0}, \ldots$ будутъ по порядку $\frac{\sqrt{A}}{1}, \frac{\sqrt{A}+a}{b}, \ldots \frac{\sqrt{A}+I_0}{D_0}, \frac{\sqrt{A}+I}{D}, \ldots$
$$\frac{\sqrt{A}+I'_0}{D'_0}, \frac{\sqrt{A}+I}{D}, \ldots$$
Въ слѣдствіе доказаннаго выше, имѣемъ $A-I^2=D_0D$ и $A-I^2=D'_0D$, откуда $D_0=D'_0$; сверхъ того $I=\lambda D_0-I_0$ и $I=\omega D'_0-I'_0$; слѣдовательно $\frac{I_0-I'_0}{D_0}=\lambda-\omega$. Но, съ другой стороны, изъ уравненія $qI+q_0D=p$ выводимъ $I=\frac{p}{q}-\frac{q_0D}{q}$, и какъ $\frac{p}{q}$ есть приближенная величина $\sqrt{A}$, то должно быть $\frac{p}{q}=a+\frac{r}{q}$, разумѣя подъ $\frac{r}{q}$ правильную дробь; слѣдовательно
$$a-I=\frac{q_0D-r}{q}.$$
Но $q_0<q$, почему $a-I<D$; точно такимъ образомъ найдется $a-I_0<D_0$, $a-I'_0<D'_0$; слѣдовательно и $I_0-I'_0<D_0$. Но сей-часъ найдено было $\frac{I_0-I'_0}{D_0}=$ *цѣлому числу* $\lambda-\omega$; и такъ должно быть $\lambda-\omega=0$, то есть $I_0=I'_0$ и $\lambda=\omega$. Точно такимъ образомъ докажется, что знаменатель, предшествующій числу λ, равенъ знаменателю, предшествующему числу ω, и такъ далѣе до α включительно; изъ этого должно будетъ заключить, что періодъ начинается съ числа α. И такъ, совокупность знаменателей и главныхъ дробей можетъ быть изображена слѣдующимъ образомъ:

Знаменатели:

a, $\alpha, \beta, \ldots \lambda, \mu$; $\alpha, \beta, \ldots \lambda, \mu$; $\alpha, \beta, \ldots \lambda, \mu$; и пр.

Главныя дроби:

$\frac{1}{0}, \frac{a}{1}, \ldots \frac{p_0}{q_0}, \frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, \ldots \frac{p'_0}{q'_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p'_1}{q'_1}, \ldots$

полныя дроби, имъ соотвѣтствующія, будутъ:

$\frac{\sqrt{A}}{1}, \frac{\sqrt{A}+a}{b}, \ldots \frac{\sqrt{A}+I_0}{D_0}, \frac{\sqrt{A}+I}{D}, \frac{\sqrt{A}+a}{b}, \ldots$

Здѣсь $\frac{p}{q}$ изображаетъ главную дробь, соотвѣтствующую послѣднему знаменателю μ перваго періода $\alpha, \beta, \ldots \lambda, \mu$; пусть будетъ z полная дробь, соотвѣтствующая главной $\frac{p}{q}$; такъ какъ $z=\mu+\frac{1}{z'}$, а $z'=\frac{\sqrt{A}+a}{b}$, то получимъ $z=\mu+\frac{b}{\sqrt{A}+a}=\mu+\frac{b(\sqrt{A}-a)}{A-a^2}=\mu+\sqrt{A}-a$. Слѣдовательно (§ 3)
$$\sqrt{A}=\frac{pz+p_0}{qz+q_0}=\frac{p\sqrt{A}+p(\mu-a)+p_0}{q\sqrt{A}+q(\mu-a)+q_0},$$
откуда выводимъ слѣдующія два уравненія:
$$p(\mu-a)+p_0=Aq$$
$$q(\mu-a)+q_0=p.$$
Изъ втораго уравненія находимъ $\mu-a+\frac{q_0}{q}=\frac{p}{q}$; но $q_0<q$, слѣдовательно $\mu-a$ изображаетъ наибольшее число, заключающееся въ $\frac{p}{q}$, то есть, a; и такъ $\mu-a=a$, откуда $\mu=2a$. Но, съ другой стороны, $q_0=p-aq$; слѣдовательно (§ 6) рядъ знаменателей $\alpha, \beta, \ldots \vartheta, \lambda$, предшествующихъ μ, будетъ *симетрическій*, ибо $\frac{p-aq}{q}$ изображаетъ одну изъ приближающихся дробей къ разности $\sqrt{A}-a$, равной $\cfrac{1}{\alpha+\cfrac{1}{\beta+\text{и проч.}}}$, а этой дроби предшествуетъ дробь $\frac{p_0-aq_0}{q_0}$. Слѣдовательно, по причинѣ что $q_0=p-aq$, выводимъ то слѣдствіе, что періодъ $\alpha, \beta, \ldots \vartheta, \lambda$ *тождественъ* съ обратнымъ ему $\lambda, \vartheta, \ldots \beta, \alpha$. Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ заключить, что знаменатели непрерывной дроби, изображающей разложеніе $\sqrt{A}$, будутъ составлять слѣдующій рядъ:

a; $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \gamma, \beta, \alpha, 2a$; $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \gamma, \beta, \alpha, 2a$; и проч.

Этотъ законъ былъ бы еще правильнѣе, если бы первый членъ, то есть a, обратился въ $2a$ или въ нуль, что случилось бы, еслибъ разлагали въ непрерывную дробь выраженія $\sqrt{A}\pm a$.

Теперь замѣтимъ, что каждая главная дробь $\frac{p}{q}$, соотвѣтствующая знаменателю $2a$, въ какомъ ни есть періодѣ, пользуется тѣмъ свойствомъ, что $p^2-Aq^2=\pm 1$. Дѣйствительно, когда $\mu=2a$, то изъ уравненія $I_0+I=\mu D$, въ которомъ каждое изъ количествъ I_0 и I не можетъ превышать числа a, выводимъ $I_0=I=a$, и $D=1$; слѣдовательно, уравненіе $(pq_0-p_0q)D=p^2-Aq^2$ обращается въ $p^2-Aq^2=+1$, или въ $p^2-Aq^2=-1$, смотря по тому, будетъ ли $\frac{p}{q}>\sqrt{A}$ или $\frac{p}{q}<\sqrt{A}$. Такъ какъ знаменатель $2a$ необходимо находится въ разложеніи $\sqrt{A}$, то отсюда заключаемъ, что уравненіе $x^2-Ay^2=\pm 1$ во всякомъ случаѣ можетъ быть рѣшено (по крайней мѣрѣ со знакомъ $+$), каково бы ни было цѣлое число A, лишь бы только оно не равнялось точному квадрату; вмѣстѣ съ тѣмъ усматриваемъ, что уравненіе $x^2-Ay^2=\pm 1$ допускаетъ безконечное число рѣшеній, ибо частное $2a$ повторяется безконечное число разъ въ послѣдовательныхъ періодахъ.

Впрочемъ, надобно замѣтить, что если число членовъ періода $\alpha, \beta, \ldots \beta, \alpha, 2a$ будетъ *чётное*, то всѣ главныя дроби, соотвѣтствующія знаменателю $2a$ въ различныхъ періодахъ, будутъ болѣе $\sqrt{A}$, и слѣдовательно, въ этомъ случаѣ, упомянутыя дроби будутъ удовлетворять только уравненію $x^2 - Ay^2 = +1$. Но ежели число членовъ періода $\alpha, \beta, \ldots \beta, \alpha, 2a$ *нечётное*, то первая дробь, соотвѣтствующая знаменателю $2a$, будетъ менѣе $\sqrt{A}$; вторая, болѣе, и такъ далѣе попеременно; слѣдовательно, въ этомъ случаѣ, оба уравненія $x^2 - Ay^2 = -1$ и $x^2 - Ay^2 = +1$ допустятъ рѣшеніе; первое будетъ рѣшаться посредствомъ главныхъ дробей *нечётнаго* порядка, а второе, посредствомъ главныхъ дробей *чётнаго* порядка.

Впрочемъ, когда найдено наименьшее рѣшеніе уравненія $x^2 - Ay^2 = 1$ посредствомъ изложеннаго сей-часъ способа, то легко будетъ найти и общее. Дѣйствительно, пусть $x = p$, $y = q$, наименьшія числа, удовлетворяющія предыдущему уравненію. Слѣдовательно будетъ $p^2 - Aq^2 = 1$. Если представимъ теперь $x^2 - Ay^2$ и $p^2 - Aq^2$ въ видахъ $(x + y\sqrt{A})(x - y\sqrt{A})$ и $(p + q\sqrt{A})(p - q\sqrt{A})$, и замѣтимъ что $(p^2 - Aq^2)^m = (p + q\sqrt{A})^m (p - q\sqrt{A})^m = 1$, гдѣ подъ m разумѣемъ какое ни есть цѣлое положительное число, то можемъ написать

$$(x + y\sqrt{A})^m (x - y\sqrt{A})^m = (p + q\sqrt{A})^m (p - q\sqrt{A})^m;$$

но такъ какъ x и y, а равно p и q не имѣютъ никакого общаго дѣлителя, то очевидно, что предыдущее уравненіе разлагается на два слѣдующія:

$$x + y\sqrt{A} = (p + q\sqrt{A})^m \text{ и } x - y\sqrt{A} = (p - q\sqrt{A})^m,$$

откуда

$$x = \frac{(p + q\sqrt{A})^m + (p - q\sqrt{A})^m}{2}$$

$$y = \frac{(p + q\sqrt{A})^m - (p - q\sqrt{A})^m}{2\sqrt{A}}.$$

Хотя эти выраженія и представляются въ ирраціональномъ видѣ, но легко видѣть, что они раціональны. Для этого стоитъ только разложить въ строку $(p + q\sqrt{A})^m$ и $(p - q\sqrt{A})^m$; такимъ образомъ получимъ

$$x = p^m + \frac{m(m-1)}{1.2} Ap^{m-2}q^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} A^2p^{m-4}q^4 + \ldots\ldots\ldots$$

$$y = mp^{m-1}q + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} Ap^{m-3}q^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5} A^2p^{m-5}q^5 + \ldots$$

Можно доказать, что всѣ рѣшенія уравненія $x^2 - Ay^2 = 1$ заключаются въ предыдущихъ формулахъ, если только p и q изображаютъ наименьшее рѣшеніе этого уравненія. Отсылаемъ читателей къ Прибавленіямъ *Лагранжа* къ *Алгебрѣ Эйлера* (2-ая Часть на Франц. языкѣ), гдѣ они найдутъ доказательство этого предложенія.

Что касается до употребленія уравненія $x^2 - Ay^2 = 1$ при рѣшеніи общаго неопредѣленнаго уравненія второй степени, то читатели могутъ прибѣгнуть или къ упомянутой сей-часъ Алгебрѣ *Эйлера*, или къ превосходному сочиненію *Лежандра*: *Théorie des nombres* (3-е изданіе 1830), изъ котораго мы заимствовали ходъ и знакоположенія изложеннаго здѣсь рѣшенія уравненія $x^2 - Ay^2 = 1$.

Для поясненія сказаннаго въ этой статьѣ, приложимъ общій способъ къ рѣшенію уравненія

$$x^2 - 22y^2 = 1.$$

Вотъ подробности вычисленія:

$$x = \sqrt{22} = 4 + \frac{\sqrt{22} - 4}{1}; \quad a = 4$$

$$x^{I} = \frac{1}{\sqrt{22} - 4} = \frac{\sqrt{22} + 4}{6} = 1 + \frac{\sqrt{22} - 2}{6}; \quad \alpha = 1$$

$$x^{II} = \frac{6}{\sqrt{22} - 2} = \frac{\sqrt{22} + 2}{3} = 2 + \frac{\sqrt{22} - 4}{3}; \quad \beta = 2$$

$$x^{III} = \frac{3}{\sqrt{22} - 4} = \frac{\sqrt{22} + 4}{2} = 4 + \frac{\sqrt{22} - 4}{2}; \quad \gamma = 4$$

$$x^{IV} = \frac{2}{\sqrt{22} - 4} = \frac{\sqrt{22} + 4}{3} = 2 + \frac{\sqrt{22} - 2}{3}; \quad \delta = 2$$

$$x^{V} = \frac{3}{\sqrt{22} - 2} = \frac{\sqrt{22} + 2}{6} = 1 + \frac{\sqrt{22} - 4}{6}; \quad \varepsilon = 1$$

$$x^{VI} = \frac{6}{\sqrt{22} - 4} = \frac{\sqrt{22} + 4}{1} = 8 + \frac{\sqrt{22} - 4}{1}; \quad \mu = 8 = 2a$$

$$x^{VII} = \frac{1}{\sqrt{22} - 4} = \frac{\sqrt{22} + 4}{6} = x', \text{ и проч.}$$

Слѣдовательно, изобразивъ чрезъ p и q, наименьшее рѣшеніе предложеннаго уравненія, найдемъ:

$$\frac{p}{q} = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}}}} = \frac{197}{42}.$$

Итакъ $p = 197$, $q = 42$, а общее рѣшеніе уравненія $x^2 - 22y^2 = 1$ опредѣляется формулами

$$x = \frac{(197 + 42\sqrt{22})^m + (197 - 42\sqrt{22})^m}{2}$$

$$y = \frac{(197 + 42\sqrt{22})^m - (197 - 42\sqrt{22})^m}{2\sqrt{22}}.$$

Рѣшеніе, непосредственно меньшее найденнаго, получится когда положимъ $m = 2$; въ этомъ предположеніи, будетъ

$$x = 197^2 + 42.22^2 = 59137$$

$$y = 2.197.42 = 16548.$$

Въ заключеніе приводимъ таблицу наименьшихъ рѣшеній уравненія $p^2 - Aq^2 = \pm 1$ для значеній A, меньшихъ 100. Достаточно обратить вниманіе на послѣднюю цифру каждой изъ величинъ p и q, чтобы усмотрѣть, которому изъ двухъ уравненій: $p^2 - Aq^2 = +1$ или $p^2 - Aq^2 = -1$ соотвѣтствуетъ рѣшеніе. Если найденное рѣшеніе принадлежитъ послѣднему случаю, то наименьшее рѣшеніе уравненія $x^2 - Ay^2 = 1$ получится, положивъ $m = 2$ въ общихъ выраженіяхъ для x и y; такимъ образомъ найдемъ $x = p^2 + Aq^2$, $y = 2pq$, и дѣйствительно $(p^2 + Aq^2)^2 - A(2pq)^2 = (p^2 - Aq^2)^2 = (-1)^2 = +1$.

Вотъ таблица:

A	p	q	A	p	q
2	1	1	33	23	4
3	2	1	34	35	6
5	2	1	35	6	1
6	5	2	37	6	1
7	8	3	38	37	6
8	3	1	39	25	4
10	3	1	40	19	3
11	10	3	41	32	5
12	7	2	42	13	2
13	18	5	43	3482	531
14	15	4	44	199	30
15	4	1	45	161	24
17	4	1	46	24335	3588
18	17	4	47	48	7
19	170	39	48	7	1
20	9	2	50	7	1
21	55	12	51	50	7
22	197	42	52	649	90
23	24	5	53	182	25
24	5	1	54	485	66
26	5	1	55	89	12
27	26	5	56	15	2
28	127	24	57	151	20
29	70	13	58	99	13
30	11	2	59	530	69
31	1520	273	60	31	4
32	17	3			
61	29718	3805	82	9	1
62	63	8	83	82	9
63	8	1	84	55	6
65	8	1	85	378	41
66	65	8	86	10405	1122
67	48842	5967	87	28	3
68	33	4	88	197	21
69	5775	936	89	500	53
70	251	30	90	19	2
71	3480	413	91	1574	165
72	17	2	92	1151	120
73	1068	125	93	12151	1260
74	43	5	94	2143295	221064
75	26	3	95	39	4
76	57799	6630	96	49	5
77	351	40	97	5604	569
78	53	6	98	99	10
79	80	9	99	10	1
80	9	1			

Окончимъ статью объ непрерывныхъ дробяхъ нѣкоторыми другими, отдѣльными изслѣдованіями и предложеніями, относящимися къ этой теоріи.

§ 10. Предложимъ себѣ, непрерывную дробь общаго вида

$$x = \cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \cfrac{\delta}{d + \cdots + \cfrac{\nu}{n + \cdots}}}}}$$

обратить въ рядъ обыкновенный. Изобразимъ чрезъ $\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1}, \frac{C}{C_1}, \frac{D}{D_1}, \ldots \frac{N}{N_1}$ сходящіяся дроби, такъ что

$$\frac{A}{A_1} = \frac{\alpha}{a}, \quad \frac{B}{B_1} = \cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta}{b}}, \quad \frac{C}{C_1} = \cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c}}}, \text{ и проч.}$$

Легко видѣть, что

$$A = \alpha, \quad B = bA, \quad C = cB + \gamma A, \quad D = dC + \delta B,$$
и проч.

$$A_1 = a, \quad B_1 = bA_1 + \beta, \quad C_1 = cB_1 + \gamma A_1, \quad D_1 = dC_1 + \delta B_1,$$
и проч.

и вообще, если изобразимъ чрезъ $\frac{L}{L_1}, \frac{M}{M_1}, \frac{N}{N_1}$ три смежныя дроби, а чрезъ $\frac{\nu}{n}$ составляющую дробь, которая соотвѣтствуетъ главной дроби $\frac{N}{N_1}$, то получимъ

$$N = nM + \nu L \quad \text{и} \quad N_1 = nM_1 + \nu L_1.$$

Разность между двумя смежными дробями будетъ

$$\frac{N}{N_1} - \frac{M}{M_1} = \frac{nM+\nu L}{nM_1+\nu L_1} - \frac{M}{M_1} = \frac{\nu\,(LM_1 - ML_1)}{M_1\,(nM_1+\nu L_1)}.$$

Слѣдовательно, на основаніи этой формулы, найдется:

$$\frac{A}{A_1} = +\frac{a}{A_1}$$

$$\frac{B}{B_1} - \frac{A}{A_1} = -\frac{a\beta}{A_1B_1}$$

$$\frac{C}{C_1} - \frac{B}{B_1} = +\frac{a\beta\gamma}{B_1C_1}$$

$$\frac{D}{D_1} - \frac{C}{C_1} = -\frac{a\beta\gamma\delta}{C_1D_1}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Сложивъ первыя два уравненія, получимъ въ первой части приближающуюся дробь $\frac{B}{B_1}$; сумма трехъ первыхъ уравненій доставитъ дробь $\frac{C}{C_1}$, четырехъ, $\frac{D}{D_1}$, и такъ далѣе. Слѣдовательно, сумма всѣхъ уравненій, до послѣдней разности, изобразитъ разложеніе $\cfrac{a}{a+\cfrac{\beta}{b+\text{и проч.}}}$, то есть, величину x.

И такъ

$$x = \cfrac{a}{a+\cfrac{\beta}{b+\cfrac{\gamma}{c+\cfrac{\delta}{d+\ddots}}}} = \frac{a}{A_1} - \frac{a\beta}{A_1B_1} + \frac{a\beta\gamma}{B_1C_1} - \frac{a\beta\gamma\delta}{C_1D_1} + \text{и пр.}$$

Для дроби вида $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\text{и проч.}}}$, получимъ

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ddots}}}} = \frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_1B_1} + \frac{1}{B_1C_1} - \frac{1}{C_1D_1} + \text{и пр.}$$

Напримѣръ, изъ непрерывной дроби

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}$$

выведемъ

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.12} - \frac{1}{29.70} + \text{и проч.}$$

Такъ же легко будетъ рѣшить и обратную задачу, то есть, данный рядъ

$$\frac{P}{P_1} - \frac{Q}{Q_1} + \frac{R}{R_1} - \frac{S}{S_1} + \text{и проч.}$$

обратить въ непрерывную дробь. Сравнивая этотъ рядъ почленно съ строкою

$$\frac{a}{A_1} - \frac{a\beta}{A_1B_1} + \frac{a\beta\gamma}{B_1C_1} - \frac{a\beta\gamma\delta}{C_1D_1} + \text{и проч.}$$

получимъ

$$\frac{P}{P_1} = \frac{a}{A_1},\ \frac{Q}{Q_1} = \frac{a\beta}{A_1B_1},\ \frac{R}{R_1} = \frac{a\beta\gamma}{B_1C_1},\ \frac{S}{S_1} = \frac{a\beta\gamma\delta}{C_1D_1}, \ldots\ldots$$

откуда

$$\frac{P}{P_1} = \frac{a}{A_1},\ \frac{P_1Q}{PQ_1} = \frac{\beta}{B_1},\ \frac{Q_1R}{QR_1} = \frac{A_1\gamma}{C_1},\ \frac{R_1S}{RS_1} = \frac{B_1\delta}{D_1}, \ldots\ldots$$

Изъ этихъ уравненій выводимъ

$$P = a,\quad P_1 = A_1 = a,\quad \text{откуда}\ \frac{a}{a} = \frac{P}{P_1};$$

$$P_1QB_1 = PQ_1\beta\ \text{или}\ P_1Q\,(bA_1+\beta) = PQ_1\beta,$$

откуда $\frac{\beta}{b} = \frac{aP_1Q}{PQ_1 - P_1Q} = \frac{QP_1^2}{PQ_1 - P_1Q}$;

точно такимъ образомъ найдемъ

$$\frac{\gamma}{c} = \frac{PRQ_1^2}{QR_1 - RQ_1}$$

$$\frac{\delta}{d} = \frac{QSR_1^2}{RS_1 - SR_1}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Слѣдовательно

$$\frac{P}{P_1} - \frac{Q}{Q_1} + \frac{R}{R_1} - \frac{S}{S_1} + \cdots = \cfrac{P}{P_1 + \cfrac{QP_1^2}{PQ_1 - P_1Q + \cfrac{PRQ_1^2}{QR_1 - RQ_1 + \cfrac{QSR_1^2}{RS_1 - SR_1 + \text{и проч.}}}}}$$

Пусть будетъ, напримѣръ, рядъ

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{и проч.}$$

изображающій величину $\frac{\pi}{4}$, то есть, отношеніе полуокружности къ діаметру круга, раздѣленное на 4. Найдется

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{и проч.} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+\text{и проч.}}}}}}}$$

Эта непрерывная дробь найдена *Брункеромъ* (Смот. § 1). При употребленіи непрерывной дроби

$$\cfrac{P}{P_1 + \cfrac{QP_1^2}{PQ_1 - P_1Q + \text{и проч.}}}$$

необходимо замѣтить, что вообще въ дроби

$$\cfrac{a}{a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \cfrac{\delta}{d + \ldots}}}}$$

отношенія $\frac{a}{a+\beta}$, $\frac{\beta}{b+\gamma}$, $\frac{\gamma}{c+\delta}$ и проч. могутъ быть сокращаемы, если между числителемъ и знаменателемъ будетъ общій дѣлитель; такъ, напримѣръ, обращая строку

$$Sin\,x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{и проч.}$$

въ непрерывную дробь, получимъ первоначально выраженіе

$$Sin\,x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^3}{1.2.3x - x^3 + \cfrac{1.2^2.3^2.x^6}{1.2.3.4.5x^3 - 1.2.3x^5 + \cfrac{1.2^2.3^2.4^2.5^2.x^{10}}{1.2.3.4.5.6.7.x^5 - 1.2.3.4.5.x^7 + \text{и проч.}}}}}$$

которое, по сокращеніи, приметъ видъ:

$$Sin\,x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{2.3 - x^2 + \cfrac{2.3.x^2}{4.5 - x^2 + \cfrac{4.5.x^2}{6.7 - x^2 + \cfrac{6.7.x^2}{8.9 - x^2 + \text{и проч.}}}}}}$$

§ 11. Приведемъ еще нѣкоторыя примѣчательныя разложенія въ непрерывныя дроби:

$$(1+x)^m = 1 + \cfrac{mx}{1 - \cfrac{\frac{m-1}{1}\cdot\frac{x}{2}}{1 + \cfrac{\frac{m+1}{3}\cdot\frac{x}{2}}{1 - \cfrac{\frac{m-2}{3}\cdot\frac{x}{2}}{1 + \cfrac{\frac{m+2}{5}\cdot\frac{x}{2}}{1 - \cfrac{\frac{m-3}{5}\cdot\frac{x}{2}}{1 + \text{и проч.}}}}}}}$$

Когда m число цѣлое, положительное или отрицательное, то эта непрерывная дробь будетъ состоять изъ конечнаго числа членовъ.

Изобразивъ чрезъ $log\,(1+x)$ *Неперовъ* логариѳмъ числа $1+x$, найдется:

$$log\,(1+x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{\frac{1}{1}\cdot\frac{x}{2}}{1 + \cfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{2}}{1 + \cfrac{\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{2}}{1 + \cfrac{\frac{2}{5}\cdot\frac{x}{2}}{1 + \cfrac{\frac{3}{5}\cdot\frac{x}{2}}{1 + \text{и проч.}}}}}}}$$

Основаніе Неперовой системы логариѳмовъ то есть, трансцендентное число

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\text{и проч.}=e,$$

опредѣляется слѣдующею непрерывною дробью:

$$e=2+\cfrac{1}{2-\cfrac{2}{4-\cfrac{3}{5-\cfrac{4}{6-\cfrac{5}{7-\cfrac{6}{8-\text{и проч.}}}}}}}$$

а показательное выраженіе e^x, разлагается въ дробь

$$e^x=1+\cfrac{x}{1-\cfrac{\frac{1}{1}\cdot\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{1}{5}\cdot\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{1}{5}\cdot\frac{x}{2}}{1+\text{и проч.}}}}}}}$$

§ 12. Теорема. *Если въ безконечной непрерывной дроби* $x=\cfrac{\alpha}{a+\cfrac{\beta}{b+\cfrac{\gamma}{c+\cfrac{\delta}{d+\text{и проч.}}}}}$ *въ которой* α, a, β, b, γ, c, ... *изображаютъ числа цѣлыя, положительныя или отрицательныя, каждая изъ составляющихъ дробей* $\frac{\alpha}{a}$, $\frac{\beta}{b}$, $\frac{\gamma}{c}$, ... *менѣе единицы, то величина* x *будетъ число не раціональное.*

Доказательство. Докажемъ, что величина x вообще менѣе единицы; во первыхъ, по предположенію будетъ $\frac{\alpha}{a}<1$; теперь, принявъ въ соображеніе двѣ составляющія дроби, получимъ $\cfrac{\alpha}{a+\cfrac{\beta}{b}}=\frac{\alpha b}{ab+\beta}$; если составляющая дробь $\frac{\beta}{b}>0$, то очевидно, что $\frac{\alpha b}{ab+\beta}$ будетъ менѣе единицы, ибо $\alpha<a$. Если же $\frac{\beta}{b}<0$, то предположивъ β отрицательнымъ, b будетъ число положительное, и предыдущая дробь приметъ видъ $\frac{\alpha b}{ab-\beta}$, а это отношеніе также менѣе единицы, потому что $\beta>b$; и дѣйствительно, если бы въ дроби $\frac{\alpha b}{ab-\beta}$ подставили b вмѣсто β, то увеличили бы дробь, и въ этомъ предположеніи она обратилась бы въ $\frac{\alpha}{a-1}$, которая не можетъ превышать единицы по той причинѣ, что $\alpha<a$ и сверхъ того оба числа α и a цѣлыя. Разсматривая три составляющія дроби $\cfrac{\alpha}{a+\cfrac{\beta}{b+\cfrac{\gamma}{c}}}$, докажемъ то же; дѣйствительно, такъ какъ $\cfrac{\beta}{b+\cfrac{\gamma}{c}}$, въ слѣдствіе сказаннаго сей-часъ, менѣе единицы, то предположивъ $\cfrac{\beta}{b+\cfrac{\gamma}{c}}=\frac{m}{n}$, получимъ $\cfrac{\alpha}{a+\cfrac{\beta}{b+\cfrac{\gamma}{c}}}=\cfrac{\alpha}{a+\cfrac{m}{n}}$, а это выраженіе состоитъ изъ двухъ составляющихъ дробей, удовлетворяющихъ упомянутымъ выше условіямъ, и слѣдовательно оно менѣе единицы. Продолжая точно такимъ образомъ, докажемъ, что величина безконечной непрерывной дроби $\cfrac{\alpha}{a+\cfrac{\beta}{b+\cfrac{\gamma}{c+\cfrac{\delta}{d+\text{и проч.}}}}}$ при допущенныхъ условіяхъ, будетъ менѣе единицы. Она могла бы обратиться въ единицу только въ одномъ случаѣ, именно, еслибъ имѣла видъ

$$\cfrac{\alpha}{\alpha+1-\cfrac{\beta}{\beta+1-\cfrac{\gamma}{\gamma+1-\text{и проч.}}}}$$

Докажемъ теперь, что величина непрерывной дроби $\cfrac{\alpha}{a+\cfrac{\beta}{b+\cfrac{\gamma}{c+\cdots}}}$, простирающейся въ безконечность, не можетъ быть раціональнымъ числомъ. Если бы эта дробь могла быть величиною раціональною, то имѣли бы

$$\frac{A}{A_1}=\cfrac{\alpha}{a+\cfrac{\beta}{b+\cfrac{\gamma}{c+\cfrac{\delta}{d+\text{и проч.}}}}}$$

гдѣ A и A_1 цѣлыя числа. Пусть будетъ

$$\frac{B}{A}=\cfrac{\beta}{b+\cfrac{\gamma}{c+\cfrac{\delta}{d+\text{и проч.}}}}\qquad\frac{C}{B}=\cfrac{\gamma}{c+\cfrac{\delta}{d+\text{и проч.}}}\qquad\frac{D}{C}=\cfrac{\delta}{d+\text{и проч.}}$$

гдѣ $B, C, D, \ldots$ изображаютъ неопредѣленныя величины, которыя, какъ мы сей-часъ увидимъ, суть цѣлыя числа. Очевидно получимъ

$$\frac{A}{A_1} = \frac{\alpha}{a+\frac{B}{A}}, \text{ откуда } B = \alpha A_1 - aA$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\beta}{b+\frac{C}{B}}, \text{ откуда } C = \beta A - bB$$

$$\frac{C}{B} = \frac{\gamma}{c+\frac{D}{C}}, \text{ откуда } D = \gamma B - cC$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

Такъ какъ A и A_1, по предположенію, суть цѣлыя числа, то очевидно, что и $B, C, D, \ldots$ будутъ также цѣлыя. Съ другой стороны имѣемъ

$$A < A_1, \quad B < A, \quad C < B, \quad D < C, \ldots\ldots$$

слѣдовательно получаемъ рядъ $A_1, A, B, C, D, \ldots$ составленный изъ цѣлыхъ чиселъ, и въ которомъ численная величина членовъ послѣдовательно уменьшается. Такое слѣдствіе невозможно допустить, ибо, какъ бы первый членъ A_1 великъ не былъ, число слѣдующихъ членовъ, уменьшающихся послѣдовательно по крайней мѣрѣ на единицу, былъ бы конечный, противно тому что сей-часъ доказано. Изъ этого должно заключить о справедливости приведенной теоремы.

Лемма. *Если въ безконечной непрерывной дроби*

$$x = \cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\ddots+\cfrac{M}{N+\cfrac{\alpha}{a+\cfrac{\beta}{b+\cfrac{\gamma}{c+\cfrac{\delta}{d+\text{ и проч.}}}}}}}}$$

первыя составляющія дроби $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \ldots \frac{M}{N}$ *не будутъ удовлетворять всѣмъ или нѣкоторымъ изъ условій* $\frac{m}{n} < 1, \frac{m'}{n'} < 1, \ldots \frac{M}{N} < 1$, *между тѣмъ какъ послѣдующія* $\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b}, \frac{\gamma}{c}, \ldots$ *и до безконечности, удовлетворяютъ этимъ требованіямъ, то величина x непрерывной дроби не будетъ раціональная.*

Дѣйствительно, въ слѣдствіе доказаннаго выше, величина $y = \cfrac{\alpha}{a+\cfrac{\beta}{b+\cfrac{\gamma}{c+\text{ и проч.}}}}$ будетъ не раціональная; слѣдовательно и рядъ

$$x = \cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\ddots+\cfrac{M}{N+y}}}$$

состоящій изъ конечнаго числа членовъ, и заключающій въ себѣ несоизмѣримую величину y, по свойству непрерывныхъ дробей, необходимо будетъ равенъ числу не раціональному.

Отсылаемъ читателей къ сочиненію *Лежандра*: *Élémens de Géométrie*, или къ Русскому переводу этой книги, изданному въ 1837 году; тамъ они найдутъ приложеніе приведенной сей-часъ теоремы къ доказательству того предложенія, что *отношеніе окружности круга къ его діаметру, и квадратъ этого отношенія не могутъ быть выражены раціональными числами.* Впрочемъ, основываясь на послѣдней леммѣ, и наблюдая что

$$\operatorname{tang}\frac{m}{n} = \cfrac{m}{n-\cfrac{m^2}{3n-\cfrac{m^2}{5n-\cfrac{m^2}{7n-\text{ и проч.}}}}}$$

читатель безъ труда усмотритъ, въ чемъ состоитъ это доказательство.

§ 13. Непрерывныя дроби употребляются иногда съ пользою при рѣшеніи опредѣленныхъ уравненій, алгебрическихъ и трансцендентныхъ. Въ статьѣ APPROCHÉE (VALEUR) предложенъ въ краткомъ видѣ способъ Лагранжа для рѣшенія алгебрическихъ уравненій. Отсылаемъ также къ сочиненію *Лакроа*: *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*, во второй части котораго читатели найдутъ нѣкоторыя подробности объ употребленіи непрерывныхъ дробей для интегрированія дифференціальныхъ уравненій по приближенію.

§ 14. Оканчивая статью о непрерывныхъ дробяхъ скажемъ, что можно бы ихъ разсматривать и въ слѣдующемъ видѣ:

$$\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cdots}{d}}{c}}{b}}{a}$$

Напримѣръ, дробь $\frac{37}{48}$ разлагается въ рядъ

$$\frac{37}{48} = \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2}.$$

Разсматриваніе такого рода дробей доставляетъ весьма простое средство для разложенія обыкновенной дроби на сумму частныхъ дробей, имѣющихъ каждая числителемъ единицу. Дѣйствительно, пусть будетъ

$$\frac{A}{B} = \frac{1+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\cdots+\frac{1}{m}}{a};$$

изобразивъ приближающіяся дроби къ отношенію $\frac{A}{B}$, чрезъ $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, и проч. получимъ

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{p'}{q'} = \frac{1+\frac{1}{b}}{a} = \frac{b+1}{ab} = \frac{pb+1}{qb}$$

$$\frac{p''}{q''} = \frac{1+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{a} = \frac{bc+c+1}{abc} = \frac{p'c+1}{q'c}$$

$$\frac{p'''}{q'''} = \frac{1+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}{a} = \frac{bcd+cd+d+1}{abcd} = \frac{p''d+1}{q''d}$$

. . . .

$$\frac{p^{(m)}}{q^{(m)}} = \frac{A}{B} = \frac{bcd\ldots m+cd\ldots m+d\ldots m+\ldots+m+1}{abcd\ldots\ldots m}$$

$$= \frac{p^{(m-1)}m+1}{q^{(m-1)}m}$$

слѣдовательно

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{abc} + \frac{1}{abcd} + \cdots + \frac{1}{abcd\ldots m}.$$

И такъ, дробь $\frac{37}{48}$, для которой $a = 2$, $b = 3$, $c = 2$, $d = 4$, разлагается на слѣдующія частныя дроби:

$$\frac{37}{48} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{48}.$$

Можно также приложить этого рода выраженіе къ разложенію раціональной дроби $\frac{f(x)}{F(x)}$ на сумму частныхъ дробей, коихъ числители будутъ количества постоянныя. И такъ, если положимъ

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{C_1+\frac{C_2}{X_2}+\frac{C_3}{X_3}+\cdots+\frac{C_m}{X_m}}{X_1},$$

разумѣя подъ X_1, X_2, X_3, ... X_m цѣлыя функціи перемѣнной x, которыя легко будетъ опредѣлить, а подъ C_1, C_2, C_3, ... C_m постоянныя величины, то получимъ

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{C_1}{X_1} + \frac{C_2}{X_1X_2} + \frac{C_3}{X_1X_2X_3} + \cdots + \frac{C_m}{X_1X_2X_3\ldots X_m}.$$

Напримѣръ дробь $\frac{3x+1}{x^2+5}$ разлагается слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{3x+1}{x^2+5} = \frac{9-\frac{46}{x^2+5}}{3x-1},$$

откуда

$$\frac{3x+1}{x^2+5} = \frac{9}{3x-1} - \frac{46}{(3x-1)(x^2+5)}.$$

CONTINUELLEMENT PROPORTIONNEL. (Ариѳ.) **НЕПРЕРЫВНО ПРОПОРЦІОНАЛЬНЫЙ.** Когда говоримъ, что три количества a, b, c *непрерывно пропорціональны*, то разумѣемъ, что они составляютъ *непрерывную пропорцію* $a : b = b : c$. Смот. CONTINUE (PROPORTION).

CONTINUITÉ. (Анал.) **НЕПРЕРЫВНОСТЬ, ПОСЛѢДОВАТЕЛЬНОСТЬ, БЕЗПРЕРЫВНОСТЬ.** Непрерывная связь между различными частями какого либо цѣлаго. *Continuité d'une fonction; непрерывность функціи.* Смот. CONTINUE (FONCTION). *Continuité de mouvement; безпрерывность движенія.*

SOLUTION DE CONTINUITÉ. РАЗРЫВЪ НЕПРЕРЫВНОСТИ. См. CONTINUE (FONCTION).

CONTOUR. (Геом.) **ОБМѢРЪ, ПЕРИМЕТРЪ, ОБВОДЪ.** Смот. PÉRIMÈTRE.

CONTOURNÉES (COURBES). (Геом.) **ПЕРЕГИБНЫЯ** или **ИЗГИБНЫЯ КРИВЫЯ.** Такъ называлъ *Вариньонъ* кривыя линіи, имѣющія точку изгиба. Смот. INFLEXION (POINT D').

CONTRACTIBILITÉ или **CONTRACTILITÉ.** (Физ.) **СЖИМАЕМОСТЬ.** Свойство тѣлъ, по которому они отъ внѣшняго давленія, или отъ какой либо другой причины, уменьшаются въ своемъ объёмѣ.

CONTRACTION. СЖАТІЕ, СЖИМАНІЕ. Смот. выше.

CONTRACTION DE LA VEINE FLUIDE или **CONTRACTION DU JET LIQUIDE.** (Мех.) **СЖАТІЕ СТРУИ.** Когда несжимаемая жидкость вытекаетъ изъ сосуда чрезъ отверстіе какой ни есть фигуры, напримѣръ круглое, то струя не имѣетъ цилиндрическаго вида, а уменьшается въ своемъ діаметрѣ до нѣкотораго разстоянія отъ отверстія, и принимаетъ видъ усѣченнаго конуса. Такое уменьшеніе діаметра называется *сжатіемъ струи*. Причину этого явленія полагаютъ въ томъ, что частицы жидкости, находясь еще въ сосудѣ, приближаются къ отверстію по направленіямъ сходящимся, въ видѣ воронки, и сохраняютъ отчасти эти направленія и по выходѣ изъ сосуда. Опыты доказали, что если снабдятъ отверстіе насадкою или трубкою, одинаковаго вида съ струею, и дадутъ этой насадкѣ длину, равную отстоянію самой узкой части струи отъ отверстія, то количество вытекающей воды, противъ получаемаго безъ насадки, нисколько не измѣнится. Опыты показали также, что площадь отверстія относится къ площади самаго узкаго сѣченія струи, почти какъ 1 къ 0,62.

CONTRADICTION. ПРОТИВОРѢЧІЕ. *Équations contradictoires*; *противорѣчивыя уравненія*, напримѣръ слѣдующія два: $3x - 5y = 6$ и $6x - 10y = 7$.

CONTRAIRE. ПРОТИВНЫЙ. *Valeurs de signes contraires*; *величины съ противными знаками*; то есть, одна положительная, а другая отрицательная. — *Forces agissant en sens contraires*; *силы, въ противныя стороны дѣйствующія.*

CONTRE-BALANCER или **ÉQUILIBRER.** (Мех.) **УРАВНОВѢСИТЬ**; привести въ равновѣсіе. *Ces deux forces se contre-balancent*; *сіи двѣ силы уравновѣшиваются между собою, уничтожаютъ одна другую.*

CONTRE-DIAMÈTRE. Смот. DIAMÈTRE.

CONTRE-HARMONIQUE (PROPORTION.) (Ариѳ.) **ПРОТИВУ-ГАРМОНИЧЕСКАЯ ПРОПОРЦІЯ.** Три числа a, b, c составляютъ *противу-гармоническую пропорцію*, когда разность между вторымъ и первымъ $b - a$, относится къ разности между третьимъ и вторымъ $c - a$, какъ третье число c, къ первому a. То есть, когда имѣемъ:

$$b - a : c - b = c : a.$$

Напримѣръ, числа 3, 5 и 6 составляютъ *противу-гармоническую пропорцію*, ибо

$$5 - 3 : 6 - 5 = 6 : 3.$$

Для опредѣленія *противу-гармонической средней пропорціональной* (*moyenne proportionnelle contre-harmonique*) между двумя данными числами, стоитъ только, изъ приведенной выше пропорціи вывести величину b, принимая a и c за данныя два числа. Найдется

$$b = \frac{a^2 + c^2}{a + c}.$$

Напримѣръ, если бы данныя числа были: 9 и 18, то полагая $a = 9$, $c = 18$, получили бы $b = 15$; и дѣйствительно

$$15 - 9 : 18 - 15 = 18 : 9.$$

Смот. HARMONIQUE.

CONTRE-POIDS. (Мех.) **ПЕРЕВѢСЪ.**

CONTR'ERREURS (MÉTHODE DES). (Анал.) **СПОСОБЪ ВОЗНАГРАЖДЕНІЯ ПОГРѢШНОСТЕЙ, СПОСОБЪ ПРОТИВУОШИБОКЪ.** Когда при вычисленіи по приближенію какой нибудь величины, замѣчаемъ, что ходъ выкладки доставляетъ погрѣшности въ извѣстную сторону, и для уничтоженія ихъ, или для воспрепятствованія дальнѣйшему ихъ распространенію, вводимъ новыя погрѣшности въ противную сторону, то такого рода дѣйствія составляютъ такъ называемый способъ *вознагражденія погрѣшностей.* Отсылаемъ читателей къ тексту таблицъ логариѳмовъ, изданныхъ *Каллетомъ*; тамъ они найдутъ приложенія этого способа къ составленію таблицъ для тригонометрическихъ линій.

CONVENTION. УСЛОВІЕ. *Formule conventionnelle*; *условная формула*; формула, справедливая при нѣкоторыхъ условіяхъ.

CONVERGENCE. (Геом.) **СХОДИМОСТЬ.** *Convergence de deux droites*; *сходимость двухъ прямыхъ.* Свойство прямыхъ, пересѣкающихся взаимно.

CONVERGENCE D'UNE SÉRIE. (Анал.) **СХОДИМОСТЬ, ПРЕДѢЛЬНОСТЬ РЯДА.** Если изъ безконечнаго числа членовъ

$$\varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \cdots\cdot \varrho_m,\ \cdots\cdot$$

выводимыхъ одинъ изъ другаго посредствомъ опредѣленнаго закона, составимъ рядъ

$$(1)\qquad \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots\cdot + \varrho_m + \cdots\cdot,$$

то этотъ рядъ принимаетъ названіе *сходящагося* или *предѣльнаго* (*série convergente*), если сумма m первыхъ его членовъ $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots\cdot + \varrho_m$ будетъ приближаться, по мѣрѣ увеличенія m, къ нѣкоторому предѣлу конечному, и совершенно опредѣленному. Напротивъ того, рядъ (1) называется *расходящимся* (*série divergente*), когда сумма $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots\cdot + \varrho_m$, для безконечнаго значенія числа m, обратится въ величину безконечную или неопредѣленную. Нѣкоторые математики называютъ *полу-сходящимися* (*séries demi-convergentes* или *sémi-convergentes*) такіе ряды, для которыхъ сумма $\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots+\varrho_m$, при $m=\infty$, не дѣлается безконечною, но обращается въ величину неопредѣленную; и такъ, рядъ $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots$, для $x=1$, принадлежитъ къ этому роду. Ряды полу-сходящіеся дѣлаются сходящимися, когда составляющіе ихъ члены $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ будутъ соотвѣтственно замѣнены произведеніями $\varrho_1\theta, \varrho_2\theta^2, \varrho_3\theta^3,\ldots$ гдѣ подъ θ разумѣемъ величину, меньшую единицы. Поэтому говорится иногда, что рядъ $\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots+\varrho_m+\ldots$ равенъ предѣлу, къ которому стремится сумма $\varrho_1\theta+\varrho_2\theta^2+\varrho_3\theta^3+\ldots+\varrho_m\theta^m+\ldots$ по мѣрѣ приближенія числа θ къ единицѣ.

Весьма важно и вмѣстѣ съ тѣмъ весьма трудно рѣшить вообще, будетъ ли какой ни есть рядъ $\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots+\varrho_m+\ldots$ сходящимся или нѣтъ. До сихъ поръ не найдено еще общихъ правилъ, легко прилагаемыхъ на практикѣ, для опредѣленія признаковъ, по которымъ бы можно было судить о сходимости данной строки. Чаще всего для достиженія этой цѣли должно прибѣгать къ особеннымъ пріёмамъ, основаннымъ на частномъ видѣ и свойствѣ предложеннаго ряда.

Первое общее правило выводится изъ самаго опредѣленія сходящагося ряда; оно состоитъ въ томъ, чтобы найти сумму $\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+\ldots+\varrho_m$ въ функціи m, и положить потомъ $m=\infty$. Но, чаще всего, нахожденіе этой суммы представляетъ большія затрудненія. Впрочемъ, аналисты съ успѣхомъ употребляли этотъ способъ для доказательства сходимости рядовъ, происходящихъ отъ разложенія произвольныхъ функцій, и составленныхъ изъ членовъ, которые заключаютъ въ себѣ синусы и косинусы кратныхъ дугъ отъ одной перемѣнной. Этотъ способъ оказался также удовлетворительнымъ для удостовѣренія въ сходимости ряда, выражающаго разложеніе функцій отъ двухъ перемѣнныхъ угловъ, когда предложенный рядъ составленъ изъ цѣлыхъ раціональныхъ функцій синусовъ и косинусовъ этихъ двухъ угловъ. Весьма сомнительно, чтобы способъ, о которомъ говоримъ, могъ быть равно успѣшенъ въ другихъ случаяхъ.

Приложимъ этотъ способъ къ ряду

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(a)\,da &+ \left(\int_0^{2\pi} f(a)\,Cos\,a.da\right) Cos\,x \\ &+ \left(\int_0^{2\pi} f(a)\,Cos\,2a.da\right) Cos\,2x + \ldots \\ &+ \left(\int_0^{2\pi} f(a)\,Cos\,na.da\right) Cos\,nx + \text{и пр.} \\ &+ \left(\int_0^{2\pi} f(a)\,Sin\,a.da\right) Sin\,x \\ &+ \left(\int_0^{2\pi} f(a)\,Sin\,2a.da\right) Sin\,2x + \ldots \\ &+ \left(\int_0^{2\pi} f(a)\,Sin\,na.da\right) Sin\,nx + \text{и пр.}\end{aligned}$$

въ которомъ $f(a)$ изображаетъ функцію, совершенно произвольную, даже прерывную, но только конечную между предѣлами $a=o$ и $a=2\pi$; перемѣнная x заключается также между предѣла и 0 и 2π. Изобразимъ чрезъ s_n сумму

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(a)\,da &+ \left(\int_0^{2\pi} f(a)\,Cos\,a.da\right) Cos\,x + \ldots \\ &+ \left(\int_0^{2\pi} f(a)\,Cos\,na.da\right) Cos\,nx \\ &+ \left(\int_0^{2\pi} f(a)\,Sin\,a.da\right) Sin\,x + \ldots \\ &+ \left(\int_0^{2\pi} f(a)\,Sin\,na.da\right) Sin\,nx;\end{aligned}$$

вопросъ будетъ состоять въ томъ, чтобы опредѣлить s_n для $n=\infty$. Но, замѣтимъ, что общій членъ предложеннаго ряда можетъ быть представленъ въ видѣ

$$\int_0^{2\pi} f(a)\,[Cos\,na.Cos\,nx + Sin\,na.Sin\,nx]\,da = \int_0^{2\pi} f(a)\,Cos\,n\,(x-a).\,da;$$

слѣдовательно найдется

$$s_n = \int_0^{2\pi} [\tfrac{1}{2} + Cos(x-a) + Cos\,2(x-a) + \ldots + Cos\,n(x-a)]\,f(a)\,da.$$

Но извѣстно, что

$$\tfrac{1}{2} + Cos\,(x-a) + Cos\,2\,(x-a) + \ldots + Cos\,n\,(x-a) = \frac{Sin\,(n+\frac{1}{2})\,(x-a)}{2\,Sin\,\frac{1}{2}\,(x-a)},$$

почему и получимъ

$$s_n = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{Sin\,(n+\frac{1}{2})\,(x-a)}{Sin\,\frac{1}{2}\,(x-a)}\,f(a)\,da.$$

Разложимъ этотъ интегралъ на три слѣдующіе:

$$\begin{aligned}s_n = \tfrac{1}{2}\int_0^{x-\omega} &\frac{Sin\,(n+\frac{1}{2})\,(x-a)}{Sin\,\frac{1}{2}\,(x-a)}\,f(a)\,da \\ + \tfrac{1}{2}\int_{x-\omega}^{x+\omega} &\frac{Sin\,(n+\frac{1}{2})\,(x-a)}{Sin\,\frac{1}{2}\,(x-a)}\,f(a)\,da \\ + \tfrac{1}{2}\int_{x+\omega}^{2\pi} &\frac{Sin\,(n+\frac{1}{2})\,(x-a)}{Sin\,\frac{1}{2}\,(x-a)}\,f(a)\,da.\end{aligned}$$

Теперь должно замѣтить, что первый и третій изъ сихъ интеграловъ равны нулю, какъ бы мала ни была величина ω, лишь бы только она не обращалась въ нуль. Для доказательства этого предложенія, разсмотримъ вообще интегралъ

$$\int_p^q \frac{Sin\, m(x-a)}{Sin\, \frac{1}{2}(x-a)} f(a)\, da,$$

въ которомъ m изображаетъ число безконечное, а p и q величины, заключающіяся между предѣлами 0 и 2π, и между которыми x не заключается. Положимъ для краткости $\frac{f(a)}{Sin\frac{1}{2}(x-a)} = F(a)$; предыдущій интегралъ очевидно приметъ видъ

$$\int_p^q Sin\, m(x-a)\, F(a) da =$$
$$Sin\, mx \int_p^q F(a)\, Cos\, ma.da - Cos\, mx \int_p^q F(a)\, Sin\, ma.da,$$

и мы докажемъ, что для $m = \infty$, будетъ

$$\int_p^q F(a)\, Cos\, ma.da = 0 \text{ и } \int_p^q F(a)\, Sin\, ma.da = 0.$$

Разсмотримъ послѣдній изъ сихъ интеграловъ, и разложимъ его на сумму

$$\int_p^q = \int_p^{p+\frac{2\pi}{m}} + \int_{p+\frac{2\pi}{m}}^{p+2\cdot\frac{2\pi}{m}} + \dots + \int_{p+(k-1)\frac{2\pi}{m}}^{q},$$

предполагая $q = p + k\cdot\frac{2\pi}{m}$, и опуская, для сокращенія, подъинтегральную функцію, которая одинакова для всѣхъ интеграловъ. Докажемъ теперь, что каждый изъ интеграловъ, входящихъ во вторую часть предыдущаго уравненія, равенъ нулю. Возьмемъ, напримѣръ, второй изъ нихъ

$$\int_{p+\frac{2\pi}{m}}^{p+2\frac{2\pi}{m}} F(a)\, Sin\, ma.da.$$

Въ основаніяхъ Интегральнаго Исчисленія доказываютъ, что подобная сумма равна нѣкоторой средней величинѣ функціи $F(a)$, помноженной на интегралъ $\int_{p+\frac{2\pi}{m}}^{p+2\cdot\frac{2\pi}{m}} Sin\, ma.da$; слѣдовательно получимъ

$$\int_{p+\frac{2\pi}{m}}^{p+2\cdot\frac{2\pi}{m}} F(a)\, Sin\, ma.da$$
$$= F\left(p+\theta\cdot\frac{2\pi}{m}\right) \int_{p+\frac{2\pi}{m}}^{p+2\cdot\frac{2\pi}{m}} Sin\, ma.da,$$

гдѣ $\theta > 1$ и < 2. Но

$$\int_{p+\frac{2\pi}{m}}^{p+2\cdot\frac{2\pi}{m}} Sin\, ma.da = 0,$$

откуда заключаемъ, что и интегралъ

$$\int_{p+\frac{2\pi}{m}}^{p+2\cdot\frac{2\pi}{m}} F(a)\, Sin\, ma.da = 0,$$

а слѣдовательно и

$$\int_p^q F(a)\, Sin\, ma.da = 0.$$

Точно такимъ образомъ докажется, что

$$\int_p^q F(a)\, Cos\, ma.da = 0,$$

откуда должно будетъ заключить, что каждый изъ двухъ интеграловъ

$$\int_0^{x-\omega} \frac{Sin(n+\frac{1}{2})(x-a)}{Sin\,\frac{1}{2}(x-a)} f(a) da,$$
$$\int_{x+\omega}^{2\pi} \frac{Sin\,(n+\frac{1}{2})(x-a)}{Sin\,\frac{1}{2}(x-a)} f(a)\, da$$

обращается въ нуль. Что касается до интеграла

$$\int_{x-\omega}^{x+\omega} \frac{Sin\,(n+\frac{1}{2})(x-a)}{Sin\,\frac{1}{2}(x-a)} f(a)\, da,$$

то доказанное предъ симъ не можетъ относиться къ нему, ибо подъинтегральная функція $\frac{f(a)}{Sin\,\frac{1}{2}(x-a)}$ обращается въ безконечность между предѣлами интегрированія. Если, какъ выше, положимъ $n+\frac{1}{2} = m$, и сверхъ того возьмемъ $a = x+z$, то получимъ

$$s_n = \tfrac{1}{2}\int_{-\omega}^{+\omega} \frac{Sin\, mz}{Sin\,\frac{1}{2}z} f(x+z)\, dz =$$
$$= \tfrac{1}{2} f(x+\theta\omega) \int_{-\omega}^{+\omega} \frac{Sin\, mz}{Sin\,\frac{1}{2}z} dz = f(x+\theta\omega) \int_0^{\omega} \frac{Sin\, mz}{Sin\,\frac{1}{2}z} dz,$$

разумѣя подъ θ число, заключающееся между -1 и $+1$. И такъ, останется только опредѣлить величину интеграла $\int_0^{\omega} \frac{Sin\, mz}{Sin\,\frac{1}{2}z} dz$; но, замѣтимъ, что означивъ чрезъ λ число, заключающееся между предѣлами 0 и 1, получимъ послѣдовательно

$$\int_0^{\omega} \frac{Sin\, mz}{Sin\,\frac{1}{2}z} dz = \int_0^{\omega} \frac{\frac{1}{2}z}{Sin\,\frac{1}{2}z} \cdot \frac{Sin\, mz}{\frac{1}{2}z} dz$$
$$= \frac{\frac{1}{2}\lambda\omega}{Sin\,\frac{1}{2}\lambda\omega} \int_0^{\omega} \frac{Sin\, mz}{\frac{1}{2}z} dz = 2\int_0^{\omega} \frac{Sin\, mz}{z} dz,$$

ибо ω изображаетъ число, по произволенію малое. Но интегралъ $\int_0^\omega \frac{Sin\, mz}{z} dz$, чрезъ предположеніе $mz = y$, обращается въ $\int_0^\infty \frac{Sin\, y}{y} dy$, который, по *Эйлеру*, равенъ $\frac{\pi}{2}$. Слѣдовательно

$$2\int_0^\omega \frac{Sin\, mz}{z} dz = \pi, \text{ откуда } s_n = \pi f(x)$$

И такъ, по мѣрѣ увеличенія числа n сумма s_n приближается болѣе и болѣе къ предѣлу $\pi f(x)$; отсюда должно заключить, что предложенный рядъ есть *сходящійся*, и имѣетъ предѣломъ своимъ $\pi f(x)$. На этомъ основаніи получаемъ слѣдующую примѣчательную формулу:

$$\pi f(x) = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(a)\,da + \left(\int_0^{2\pi} f(a)\, Cos\, a.da\right) Cos\, x + \cdots$$
$$+ \left(\int_0^{2\pi} f(a)\, Cos\, na.da\right) Cos\, nx + \text{и проч.}$$
$$+ \left(\int_0^{2\pi} f(a)\, Sin\, a.da\right) Sin\, x + \cdots\cdots$$
$$+ \left(\int_0^{2\pi} f(a)\, Sin\, na.da\right) Sin\, nx + \text{и проч.}$$

которая можетъ быть приложена къ рѣшенію многихъ важныхъ вопросовъ изъ высшей Физики.

Другой способъ для различенія рядовъ сходящихся отъ расходящихся, давно уже извѣстный математикамъ, состоитъ въ слѣдующемъ: въ предложенномъ ряду

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots + \varrho_m + \varrho_{m+1} + \cdots$$

составляютъ отношеніе $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$ двухъ послѣдовательныхъ членовъ, и ищутъ предѣлъ этого отношенія, то есть, величину его, соотвѣтствующую значенію $m = \infty$. Ежели *пред.* $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m} < 1$, то рядъ $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 +$ и проч. будетъ *сходящійся*; если же *пред.* $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m} > 1$, то данный рядъ *расходящійся*. Это правило, часто удовлетворительное, имѣетъ однакожъ два недостатка: во первыхъ, оно приводитъ къ сомнительному случаю когда *пред.* $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m} = 1$, а во вторыхъ, должно замѣтить, что иногда бываетъ трудно опредѣлить предѣлъ отношенія $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$.

Вмѣсто отношенія $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$, можно разсматривать выраженіе $(\varrho_m)^{\frac{1}{m}}$, ибо $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$ и $(\varrho_m)^{\frac{1}{m}}$ стремятся къ одному и тому же предѣлу при увеличивающихся величинахъ числа m *). И такъ, рядъ $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots + \varrho_m + \cdots$ будетъ *сходящійся*, если, для $m = \infty$, $(\varrho_m)^{\frac{1}{m}} < 1$, а *расходящійся*, когда $(\varrho_m)^{\frac{1}{m}} > 1$. Случай $(\varrho_m)^{\frac{1}{m}} = 1$ сомнительный. Докажемъ эти предложенія.

Разсмотримъ сперва геометрическую прогрессію $1, z, z^2, z^3, \ldots\ldots$

Сумма m первыхъ ея членовъ будетъ

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{m-1} = \frac{1 - z^m}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} - \frac{z^m}{1 - z}.$$

Замѣтимъ теперь, что для возрастающихъ значеній числа m, дробь $\frac{z^m}{1 - z}$ будетъ стремиться къ нулю или къ безконечности, смотря по тому, будетъ ли $z < 1$ или $z > 1$; отсюда заключаемъ, что безконечный рядъ

$$1 + z + z^2 + z^3 + \text{ и проч.}$$

будетъ *сходящимся* для $z < 1$, а *расходящимся* для $z > 1$.

Теперь примемъ въ разсмотрѣніе какой нибудь есть безконечный рядъ

$$s = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots\cdots + \varrho_m + \varrho_{m+1} + \varrho_{m+2} + \varrho_{m+3} + \text{ и проч.}$$

Мы предполагаемъ, что начиная отъ нѣкоторой конечной величины m, какъ бы она впрочемъ велика ни была, каждое изъ отношеній $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$, $\frac{\varrho_{m+2}}{\varrho_{m+1}}$, $\frac{\varrho_{m+3}}{\varrho_{m+2}}\cdots\cdots$ равно числу, мѣньшему единицы; слѣдовательно

$$\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m} = \theta_1 < 1$$
$$\frac{\varrho_{m+2}}{\varrho_{m+1}} = \theta_2 < 1$$
$$\frac{\varrho_{m+3}}{\varrho_{m+2}} = \theta_3 < 1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Изъ этихъ уравненій выводимъ

$$\varrho_{m+1} = \theta_1 \varrho_m$$
$$\varrho_{m+2} = \theta_1\theta_2 \varrho_m$$
$$\varrho_{m+3} = \theta_1\theta_2\theta_3 \varrho_m$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и изобразивъ чрезъ s_{n-1} конечную сумму $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots + \varrho_{m-1}$, получимъ

$$s = s_{m-1} + \varrho_m(1 + \theta_1 + \theta_1\theta_2 + \theta_1\theta_2\theta_3 + \cdots).$$

*) Доказательство этого предложенія читатели найдутъ въ сочиненіи Г. *Коши*: *Analyse algébrique*, гл. II.

Если между количествами $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ выберемъ наибольшее, и изобразимъ его чрезъ z, то по причинѣ $\theta_1<1$, $\theta_2<1$, $\theta_3<1, \dots$ будетъ и $z<1$; слѣдовательно безконечный рядъ $1+z+z^2+z^3+$ и проч., или что всё равно $1+z+zz+zzz+$ и проч., въ силу доказаннаго выше, будетъ сходящійся, и сумма его выразится дробью $\frac{1}{1-z}$. Но такъ какъ z изображаетъ наибольшую изъ величинъ $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ то очевидно

$$1+z+z.z+z.z.z+\dots > \text{или, по бо́льшей мѣрѣ,} = 1+\theta_1+\theta_1\theta_2+\theta_1\theta_2\theta_3+\dots$$

Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ, сумма s будетъ конечная, ибо она менѣе конечной величины $s_{m-1}+\varrho_m\cdot\frac{1}{1-z}$.

Легко видѣть, что если каждая изъ величинъ $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \dots$ болѣе единицы, то разсматриваемый рядъ будетъ расходящійся; дѣйствительно, выбравъ въ этомъ предположеніи наименьшую изъ величинъ $\theta_1, \theta_2, \theta_3\dots$, и изобразивъ ее чрезъ z, получимъ очевидно

$$1+z+z^2+z^3+\dots<1+\theta_1+\theta_1\theta_2+\theta_1\theta_2\theta_3+\dots$$

Но такъ какъ $z>1$, то сумма $1+z+z^2+z^3+\dots$ будетъ безконечная, а слѣдовательно и сумма $1+\theta_1+\theta_1\theta_2+\theta_1\theta_2\theta_3+\dots$; отсюда заключаемъ, что и $s=\infty$, то есть, что рядъ $\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3+$ и проч. въ этомъ случаѣ *расходящійся*.

Для примѣра возьмемъ безконечную строку

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\dots+\frac{x^m}{1.2.3\dots m}+\frac{x^{m+1}}{1.2.3\dots(m+1)}+\dots$$

Отношеніе двухъ смежныхъ членовъ $\frac{x^{m+1}}{1.2.3\dots(m+1)}$ и $\frac{x^m}{1.2.3\dots m}$ равно $\frac{x}{m+1}$, а это отношеніе, для $m=\infty$, и для какихъ ни есть значеній величины x, обращается въ *нуль*; слѣдовательно, предложенный рядъ будетъ сходящимся отъ $x=-\infty$ до $x=+\infty$, то есть, для всѣхъ возможныхъ величинъ x.

Если бы разсматривали рядъ

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots+\frac{x^m}{m}+\frac{x^{m+1}}{m+1}+\dots,$$

то, по предложенному правилу, надлежало бы найти отношеніе двухъ смежныхъ членовъ $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ и $\frac{x^m}{m}$; это отношеніе равно $\frac{m}{m+1}\cdot x=\frac{x}{1+\frac{1}{m}}$: полагая въ немъ $m=\infty$, найдется для предѣла величина x; слѣдовательно, когда $x<1$, то рядъ будетъ *сходящійся*, а при $x<1$ получается рядъ *расходящійся*. Но при частномъ значеніи $x=1$, предѣлъ, о которомъ говоримъ, обращается въ *единицу*, и слѣдовательно предложенное правило оказывается недостаточнымъ для ряда

$$s=1+\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\dots+\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\dots$$

Впрочемъ, посредствомъ особеннаго пріёма, легко удостовѣриться въ расходимости этого ряда; напишемъ его въ видѣ

$$s=1+\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8})+\dots$$
$$+\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\dots+\frac{1}{m+m}\right)+\dots$$

и замѣтимъ, что каждая совокупность дробей, заключающихся въ скобкахъ, даетъ сумму, бо́льшую $\frac{1}{2}$. Дѣйствительно, возьмемъ общій членъ

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\dots+\frac{1}{m+m},$$

въ которомъ предполагаемъ $m=2^n$; этотъ общій членъ приметъ видъ

$$\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\frac{1}{2^n+3}+\dots+\frac{1}{2^n+2^n}=$$
$$\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\frac{1}{2^n+3}+\dots+\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Очевидно, что послѣдняя дробь $\frac{1}{2^{n+1}}$ менѣе всѣхъ предшествующихъ ей, почему

$$\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\frac{1}{2^n+3}+\dots+\frac{1}{2^n+2^n}>$$
$$\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}+\dots+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}.$$

Отсюда видимъ, что каждая изъ суммъ $(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})$, $(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}),\dots$ которыхъ число будетъ безконечное, болѣе $\frac{1}{2}$; а это самое приводитъ къ тому заключенію, что $s=\infty$, и что слѣдовательно рядъ $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$ и проч. будетъ *расходящійся*.

Другое правило, о которомъ мы упомянули, доказывается слѣдующимъ образомъ: мы предполагаемъ, что выраженіе $(\varrho_m)^{\frac{1}{m}}$, начиная отъ опредѣленнаго значенія числа m, сохраняетъ величину, меньшую единицы; слѣдовательно

$$(\varrho_m)^{\frac{1}{m}}=\theta_1<1$$
$$(\varrho_{m+1})^{\frac{1}{m+1}}=\theta_2<1$$
$$(\varrho_{m+2})^{\frac{1}{m+2}}=\theta_3<1$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

изъ этихъ уравненій выводимъ

$$\varrho_m = \theta_1^{\,m}$$
$$\varrho_{m+1} = \theta_2^{\,m+1}$$
$$\varrho_{m+2} = \theta_3^{\,m+2}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Если изобразимъ чрезъ s сумму безконечнаго ряда $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 +$ и проч., а чрезъ s_{m-1} конечную сумму первыхъ $(m-1)$ его членовъ, то получимъ

$$s = s_{m-1} + (\theta_1^{\,m} + \theta_2^{\,m+1} + \theta_3^{\,m+2} + \ldots).$$

Пусть будетъ z наибольшее изъ количествъ $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \ldots\ldots$, которыя всѣ, по предположенію, менѣе единицы; слѣдовательно и $z < 1$, и сверхъ того

$$\theta_1^{\,m} + \theta_2^{\,m+1} + \theta_3^{\,m+2} + \cdots < z^m + z^{m+1} + z^{m+2} + \cdots = z^m(1 + z + z^2 + \cdots);$$

но такъ какъ рядъ $1 + z + z^2 + \cdots$, а по этому и $z^m(1 + z + z^2 + \cdots) = z^m + z^{m+1} + z^{m+2} + \cdots$ есть сходящійся, а $\theta_1^{\,m} + \theta_2^{\,m+1} + \theta_3^{\,m+2} + \cdots < z^m + z^{m+1} + z^{m+2} + \cdots$, то очевидно, что и сумма $s = s_{m-1} + (\theta_1^{\,m} + \theta_2^{\,m+1} + \theta_3^{\,m+2} + \cdots)$ будетъ конечная; и такъ, если *пред.* $(\varrho_m)^{\frac{1}{m}} < 1$, то рядъ $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 +$ и проч. будетъ *сходящійся*. Если же числа $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \cdots$ будутъ болѣе единицы, то докажется, какъ и выше, что рядъ $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \cdots$ *расходящійся*. Для примѣра пусть будетъ строка

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots + \frac{1}{m^m} + \text{и проч.}$$

выраженіе $\left(\frac{1}{m^m}\right)^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}$, для $m = \infty$, обращается въ 0; слѣдовательно предложенный рядъ есть сходящійся.

Сверхъ предложенныхъ общихъ способовъ, есть еще нѣкоторые частные пріёмы, по которымъ можно иногда удостовѣриться въ сходимости или расходимости рядовъ. Отсылаемъ по сему предмету къ сочиненію Г. *Коши*: *Analyse algébrique*, 1821 г. и къ разсужденіямъ: *Réfléxions sur les suites divergentes ou convergentes* въ *Opuscules mathématiques par d'Alembert*, T. V. (1768 г.). *Sur la convergence des series, par Cauchy* въ *Exercices de Mathématique*. T. II. (1827 г.). Смот. также въ XIII томѣ періодическаго изданія Journal für die reine und angewandte Mathematik, von *A. L. Crelle*, разсужденіе *Понселе* (*Poncelet*) объ этомъ предметѣ и извѣстное сочиненіе *Лежандра*: *Exercices de Calcul Intégral*.

Есть безконечные ряды, которые всегда бываютъ сходящимися: таковы напримѣръ ряды, коихъ члены, начиная съ перваго или съ дальнѣйшаго изъ нихъ, бываютъ попеременно то положительные то отрицательные, и составляютъ рядъ *убывающій*. *Лейбницъ* замѣтилъ первый, что такого рода строки всегда сходящіяся. Примѣчательно то обстоятельство, что *Иванъ Бернулли* не могъ доказать этого предложенія, весьма простаго.

Пусть будетъ безконечный рядъ

$$s = \varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_4 + \varrho_5 - \varrho_6 + \varrho_7 - \text{и проч.}$$

въ которомъ предполагаемъ $\varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3 > \varrho_4 > \cdots$

Легко видѣть, что сумма s будетъ менѣе перваго члена ϱ_1; дѣйствительно, предыдущій рядъ можетъ быть написанъ въ видѣ

$$\varrho_1 - (\varrho_2 - \varrho_3) - (\varrho_4 - \varrho_5) - (\varrho_6 - \varrho_7) - \text{и проч.}$$

гдѣ всѣ разности $\varrho_2 - \varrho_3$, $\varrho_4 - \varrho_5$, $\varrho_6 - \varrho_7, \cdots$, вычитаемыя изъ ϱ_1, суть количества положительныя. Съ другой стороны, сумма s болѣе разности $\varrho_1 - \varrho_2$, ибо

$$s = \varrho_1 - \varrho_2 + (\varrho_3 - \varrho_4) + (\varrho_5 - \varrho_6) + \text{и проч.}$$

а разности $\varrho_3 - \varrho_4$, $\varrho_5 - \varrho_6, \ldots\ldots$ всѣ положительныя.

Впрочемъ, нѣтъ надобности, чтобы члены ряда

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \varrho_5, \varrho_6, \varrho_7, \cdots$$

были попеременно положительные и отрицательные; они могутъ перемѣнять знаки черезъ два, три, четыре ..... члена; такъ напримѣръ рядъ

$$s = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_4 - \varrho_5 - \varrho_6 + \varrho_7 + \varrho_8 + \varrho_9 - \text{и проч.}$$

будетъ сходящійся, если только онъ убывающій; и дѣйствительно, положивъ

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = u_1$$
$$\varrho_4 + \varrho_5 + \varrho_6 = u_2$$
$$\varrho_7 + \varrho_8 + \varrho_9 = u_3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

гдѣ $\varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3 > \varrho_4 > \ldots\ldots$, очевидно будетъ $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots\ldots$; слѣдовательно получимъ рядъ

$$s = u_1 - u_2 + u_3 - \text{и проч.},$$

который относится къ разсмотрѣнному сей-часъ случаю. —

Мнимый рядъ

$$(\lambda_1 + \mu_1\sqrt{-1}) + (\lambda_2 + \mu_2\sqrt{-1}) + (\lambda_3 + \mu_3\sqrt{-1}) + \ldots + (\lambda_m + \mu_m\sqrt{-1}) + \text{и проч.}$$

принимаетъ названіе *сходящагося*, когда вещественные ряды

*

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\ldots+\lambda_m+ \text{ и проч.}$$
$$\mu_1+\mu_2+\mu_3+\ldots+\mu_m+ \text{ и проч.}$$

будутъ оба сходящіеся; въ противномъ случаѣ мнимый рядъ называется *расходящимся*.

Для сличенія отсылаемъ къ статьѣ: SÉRIE.

CONVERGENTES (DROITES) или **CONCOURANTES.** (Геом.) **СХОДЯЩІЯСЯ, ПЕРЕСѢКАЮЩІЯСЯ ПРЯМЫЯ ЛИНІИ.**

HYPERBOLE CONVERGENTE. Сходящаяся гипербола. Такъ называется гипербола третьяго порядка, коей двѣ вѣтви, простираясь въ одну сторону, приближаются постепенно одна къ другой, и имѣютъ общую ассимптоту, проходящую между ними.

CONVERGENTE (FRACTION). Смот. CONTINUE (FRACTION).

SÉRIE CONVERGENTE. Сходящійся, предѣльный рядъ. SÉRIE DEMI-CONVERGENTE, полусходящійся рядъ. Смот. CONVERGENCE.

CONVERGER. (Геом. и Анал.) **СХОДИТЬСЯ, ПРИБЛИЖАТЬСЯ, СТРЕМИТЬСЯ.** *Deux droites qui convergent; двѣ сходящіяся прямыя. — Cette valeur converge vers la limite zéro; эта величина приближается, стремится къ предѣлу нуль.*

CONVERSE (PROPOSITION), или, употребительнѣе, **PROPOSITION INVERSE. ОБРАТНОЕ ПРЕДЛОЖЕНІЕ.** Смот. INVERSE (PROPOSITION). *En raison converse, par conversion de raison,* или *convertendo.* См. COMPOSITION DE RAISON.

CONVERSION. (Ариѳ.) *Par conversion de raison. Чрезъ вычитаніе предыдущаго изъ послѣдующаго.* Когда геометрическую пропорцію $a:b=c:d$ пишемъ въ видѣ $b-a:d-c=a:c$ или $b:d$, то говоримъ, что послѣднія пропорціи выведены изъ первой *чрезъ вычитаніе предыдущаго изъ послѣдующаго.* Смот. COMPOSITION DE RAISON.

CONVERSION DES ÉQUATIONS. Не упот. (Алг.) Уничтоженіе знаменателей въ уравненіяхъ; освобожденіе уравненій отъ знаменателей. Напримѣръ, изъ уравненія $\frac{x^2}{a}-\frac{bx}{3}=\frac{c}{2g}$ выводимъ, *чрезъ уничтоженіе знаменателей*, $6gx^2-2abgx=3ac$. Преимущественно въ этомъ смыслѣ говорятъ: *faire disparoître* или *évanouir les fractions.*

CONVERSION. (Геом. Анал. и Астр.) **ПРЕВРАЩЕНІЕ, ОБРАЩЕНІЕ.** *Conversion d'un carré en un triangle. Превращеніе квадрата въ треугольникъ,* то есть, составленіе треугольника, имѣющаго одинаковую площадь съ квадратомъ. *Conversion d'une fraction ordinaire en fraction continue. Превращеніе обыкновенной дроби въ непрерывную. — Conversion des degrés en temps, et du temps en degrés Превращеніе градусовъ во время, и времени въ градусы; conversion des mesures anciennes en mesures nouvelles; превращеніе старыхъ мѣръ въ новыя.*

CONVERSION (CENTRE DE). (Мех.) **ЦЕНТРЪ ОБРАЩЕНІЯ.** Смот. CENTRE.

CONVERSIONS. Слово, бывшее въ употребленіи у прежнихъ астрономовъ, и подъ которымъ они разумѣли *обращенія* всѣхъ небесныхъ тѣлъ.

CONVERTIBLE. *Formule facilement convertible en nombres; Формула, легко приводимая въ числа. Формула, удобная для численныхъ выкладокъ.*

CONVERTIR. ПРЕВРАТИТЬ, ОБРАТИТЬ, ПРИВЕСТИ. *Convertir une figure en une autre. Превратить одну фигуру въ другую. — Convertir une fraction ordinaire en fraction décimale, continue. Превратить обыкновенную дробь въ десятичную, въ непрерывную. — Convertir le temps en degrés. Превратить время въ градусы.*

CONVEXE. (Геом.) **ВЫПУКЛЫЙ.** Говорится о внѣшней поверхности тѣла, или о внѣшней части кривой линіи, въ противуположность внутренней, именуемой *вогнутою.* См. CONCAVE, CONCAVITÉ.

SURFACE CONVEXE D'UN CÔNE, D'UN CYLINDRE. Выпуклая поверхность конуса, цилиндра. Смот. CONE, CYLINDRE.

POLYGONES CONVEXES. Выпуклые многоугольники, то есть такіе, у которыхъ всѣ углы исходящіе. Свойство выпуклаго многоугольника состоитъ въ томъ, что всякая прямая, проведенная въ его плоскости, можетъ встрѣтить его периметръ только въ двухъ точкахъ. — *Вогнутымъ многоугольникомъ (polygone concave)* можно назвать такой, у котораго одинъ или нѣсколько угловъ *входящихъ.* И такъ фигура *abcdefgh* (черт. 11 Листъ V) изображаетъ *вогнутый многоугольникъ* съ двумя входящими углами d и f. Прямая KL, проведенная въ его плоскости, встрѣчаетъ периметръ этого многоугольника въ шести точкахъ i, j, k, l, m, n.

Miroirs, verres convexes. Выпуклыя зеркала, стеклы. Смот. MIROIR, VERRE.

CONVEXITÉ. (Геом.) **ВЫПУКЛОСТЬ.** Выпуклая сторона кривой поверхности или кривой линіи. Смот. CONCAVITÉ.

COORDONNÉES. (Геом.) **КООРДИНАТЫ, СОПРИЛОЖЕННЫЯ.** Положеніе точки, принадлежащей поверхности или кривой линіи обыкновенно опредѣляется: для поверхностей и для кривыхъ двоякой кривизны, разстояніями той точки отъ трехъ неподвижныхъ плоскостей, а для плоскихъ кривыхъ, отъ двухъ постоянныхъ пересѣкающихся осей, въ плоскости кривой проведенныхъ. Эти разстоянія называются *координатами* разсматриваемой точки.

Неподвижныя плоскости, о которыхъ мы сейчасъ упомянули, предполагаются перпендикулярными между собою; онѣ называются *координатными плоскостями (plans coordonnés)*, а прямыя ихъ пересѣченія — *координатными осями (axes des coordonnées)*. Пусть будутъ $X'OX$, $Y'OY$, $Z'OZ$ (черт. 12 листъ V) эти пересѣченія. Неопредѣленныя прямыя OX, OY, OZ, называются *положительными*, а OX', OY', OZ' *отрицательными полу-осями* x-овъ, y-овъ, z-овъ; плоскости YOZ, ZOX и XOY именуются соотвѣтственно *плоскостями* yz, zx и xy, а общее ихъ пересѣченіе, то есть точка O, *началомъ координатъ (origine des coordonnées)*.

Если изъ разсматриваемой точки M опустимъ на плоскость xy перпендикуляръ MN, а изъ основанія N, на ось x-овъ перпендикуляръ NP, то координаты точки M будутъ прямыя $\overline{OP}=x$, $\overline{PN}=y$, $\overline{NM}=z$. Линія x называется *абсциссою* (*abscisse*) точки M, а y и z ея *ординатами* (*ordonnées*), y обыкновенно *горизонтальною*, а z, *вертикальною*. Когда опредѣляется положеніе точки на плоскости, то достаточно двухъ координатъ. И такъ, точка N на плоскости xy опредѣляется абсциссою $OP=x$ и ординатою $PN=y$.

Разсмотрѣнная нами система координатъ называется *прямоугольною* (*coordonnées rectangles*). Когда неподвижныя плоскости пересѣкаются не подъ прямыми углами, то координаты точки, соотвѣтственно параллельныя тремъ координатнымъ осямъ, принимаютъ названіе *косоугольныхъ* (*coordonnées obliquangles*).

Сверхъ системы прямоугольныхъ и косоугольныхъ координатъ употребляются еще другія, и между прочими, довольно часто, *система полярныхъ координатъ*. Смот. POLAIRES (COORDONNÉES). Отсылаемъ также читателей къ статьѣ: TRANSFORMATION DES COORDONNÉES.

Coordonnées variables или coordonnées courantes. Перемѣнныя, текущія, бѣгущія координаты. Такъ называются координаты кривой линіи или поверхности, когда имъ не приписываютъ никакого частнаго значенія; и такъ, перемѣнныя координаты принадлежатъ произвольной точкѣ кривой линіи или поверхности.

COORDONNER. РАСПОЛОЖИТЬ. Привести въ извѣстный порядокъ. *En coordonnant l'expression* $5a^2b^2-7a^3b+9a^4+6b^4-ab^3$ *par rapport à la lettre a, on trouve* $9a^4-7ba^3+5b^2a^2-b^3a+6b^4$; *располагая выраженіе* $5a^2b^2-7a^3b+9a^4+6b^4-ab^3$ *по степенямъ буквы а, найдемъ* $9a^4-7ba^3+5b^2a^2-b^3a+6b^4$.

COPERNIC (SYSTÊME DE). (Астр.) **КОПЕРНИКОВА СИСТЕМА.** Истинная система міра, по которой земля и всѣ планеты съ спутниками своими обращаются около солнца въ порядкѣ, означенномъ на чертежѣ 17 (Листъ V). Буква S изображаетъ солнце, знаки: ☿, ♀, ☾, ♂, ♃, ♄ по порядку *Меркурія*, *Венеру*, *Луну*, *Марса*, *Юпитера* и *Сатурна*. Буква T означаетъ землю, а малыя круги около планетъ, пути ихъ спутниковъ. Послѣдній кругъ, отмѣченный звѣздочками, принадлежитъ неподвижнымъ звѣздамъ, имѣющимъ, по Копернику, только вращательное движеніе около своихъ осей, и находящихся на неизмѣримомъ разстояніи отъ нашей солнечной системы.

Знаменитый *Коперникъ* родился въ *Торнѣ*, въ Королевской Пруссіи 19 Февраля 1473 года. Получивъ въ Краковѣ достоинство Доктора Медицины, онъ отправился въ Италію; тамъ изучилъ Астрономію подъ руководствомъ *Доминика Марія Новарра* въ Болоньи, и потомъ у *Регіомонтана* (*Іоанна Мюллера*) въ Римѣ, гдѣ самъ, нѣкоторое время, занималъ каѳедру Математики. Въ началѣ XVI вѣка Коперникъ возвратился въ свое отечество, гдѣ дядя его, Эпископъ Эриенскій, далъ ему мѣсто Каноника, которое привело его въ состояніе посвятить себя совершенно любимому своему занятію — Астрономіи. Убѣжденный въ чрезвычайной запутанности и недостаткахъ Птолемеевой системы при объясненіи движеній планетъ посредствомъ эпицикловъ, также въ слабости доказательствъ, на которыхъ основывалась эта система, онъ искалъ у древнихъ болѣе основательныхъ мнѣній. Съ радостнымъ изумленіемъ Коперникъ нашелъ, что Пиѳагорейцы приписывали землѣ суточное вращеніе около своей оси, и годовое движеніе около солнца, и что обращеніе Меркурія и Венеры около солнца принимали уже Египтяне. Пораженный простотою порядка и легкостію объясненій небесныхъ движеній, основанныхъ на этомъ мнѣніи, онъ не усумнился въ правильности своихъ открытій, но обнародовалъ ихъ не прежде, какъ когда тридцатилѣтними наблюденіями убѣдился, что всѣ движенія, до малѣйшихъ ихъ обстоятельствъ, объясняются самымъ легкимъ и удовлетворительнымъ образомъ, допустивъ, что солнце находится въ центрѣ міра, и что около него обращаются отъ запада къ востоку Меркурій, Венера, Земля, Марсъ, Юпитеръ и Сатурнъ. Луна обращается около земли, и увлекается вмѣстѣ съ нею въ годовомъ ея движеніи около солнца. Коперникъ принялъ также, что земля имѣетъ вращательное движеніе отъ запада къ востоку около своей оси; что ось ея всегда параллельна самой себѣ, и наклонена къ эклиптикѣ на $23\frac{1}{2}$ градуса.

Знаменитое твореніе Коперника *De revolutionibus orbium cœlestium*, въ которомъ изложена его система съ возможными подробностями, напечатана въ первый разъ въ Нюренбергѣ въ 1543 г. Коперникъ, передъ самою кончиною, получилъ изъ Нюренберга экземпляръ своего сочиненія. Онъ умеръ 24 Мая 1543 года.

COPERNICIEN. ПОСЛѢДОВАТЕЛЬ КОПЕРНИКА. Тотъ, кто послѣдуетъ ученію Коперника о солнечной системѣ. Смот. выше.

CORDE или **SOUS-TENDANTE.** (Геом.) **ХОРДА, СТЯГИВАЮЩАЯ.** Прямая, соединяющая концы круговой дуги, или, общѣе, какой ни есть кривой линіи.

Въ кругѣ (черт. 13 листъ V) хорда AB перпендикулярна къ линіи CD, проведенной изъ центра C къ серединѣ D дуги AB. Линія ED называется *стрѣлкою* (*la flèche*) дуги AB. Эти два наименованія *хорда* (т. е. тетива) и *стрѣлка* приняты древними геометрами по причинѣ сходства фигуры $ADBE$ съ *лукомъ* (*arc*) и *стрѣлою* на *тетивѣ*.

Когда радіусъ CD принимается за единицу, то стрѣлку ED, въ Тригонометріи, называютъ *обращеннымъ синусомъ* (*sinus verse*).

Для дальнѣйшихъ подробностей о хордахъ, Смот. ANGULAIRES (SECTIONS), TRIGONOMÉTRIE.

Ligne des cordes. *Линія, масштабъ хордъ.* Одна изъ линій, начерченныхъ на геометрической шкалѣ. Смот. COMPAS DE PROPORTION.

Cordes suplémentaires. Дополнительныя хорды. Когда изъ концовъ діаметра кривой линіи проведемъ прямыя къ какой ни есть точкѣ кривой, то одна изъ этихъ двухъ прямыхъ называется *дополнительною хордою* другой. И такъ, въ эллипсѣ $ABDE$ (черт. 14 листъ V), прямыя $\overline{KM}$ и $\overline{LM}$, проведенныя чрезъ концы K и L діаметра KL къ точкѣ M, будутъ *дополнительными хордами* одна въ отношеніи къ другой.

Пусть будетъ a большая полу-ось $\overline{OB}$, а b малая полу-ось $\overline{OD}$ эллипса; $x = \overline{OP}$, $y = \overline{PM}$ координаты точки M. Уравненіе эллипса (Смот. ELLIPSE), отнесеннаго къ центру, будетъ $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. Очевидно, что если изобразимъ чрезъ x' и y' координаты Ol и lL точки L, то для точки K будетъ $Ok = -x'$, $kK = -y'$. Означимъ чрезъ α и β углы MQX и MRX, составляемые дополнительными хордами MK и ML съ положительною осью OX; такъ какъ прямая MK проходитъ чрезъ точку M, то изобразивъ чрезъ X и Y перемѣнныя ея координаты, получимъ

$$Y - y = \tang \alpha\,(X - x);$$

но эта прямая проходитъ также и чрезъ точку K, коей координаты суть $-x'$ и $-y'$; слѣдовательно

$$-y' - y = -\tang \alpha\,(x' + x) \text{ откуда } \tang \alpha = \frac{y + y'}{x + x'}.$$

Точно такимъ образомъ найдемъ

$$\tang \beta = \frac{y - y'}{x - x'};$$

перемножая между собою величины для $\tang \alpha$ и $\tang \beta$, получимъ равенство

$$\tang \alpha . \tang \beta = \frac{y^2 - y'^2}{x^2 - x'^2},$$

которое, въ слѣдствіе уравненій

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \text{ и } y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2),$$

приметъ видъ

$$tang\,\alpha\,.\,tang\,\beta = -\frac{b^2}{a^2}.$$

И такъ, произведеніе тангенсовъ угловъ, составляемыхъ дополнительными хордами съ большою осью эллипса, зависитъ только отъ отношенія осей сего послѣдняго. Когда положимъ $b = a$, то получимъ кругъ, для котораго $tang\,\alpha\,.\,tang\,\beta = -1$, а это уравненіе показываетъ, что уголъ при окружности, опирающійся на діаметръ, есть прямой.

Легко также доказать, что два діаметра эллипса, соотвѣтственно параллельныя двумъ дополнительнымъ хордамъ, будутъ между собою *сопряженными* (См. DIAMÈTRES CONJUGUÉS), а также и на оборотъ: два какіе ни есть сопряженные діаметра соотвѣтственно параллельны двумъ дополнительнымъ хордамъ.

Дополнительныя хорды доставляютъ весьма простое средство для проведенія касательныхъ. Положимъ, что дана на эллипсѣ точка M (черт. 15 листъ V). Проводимъ діаметръ MN, и чрезъ точку A большой оси прямую Am, параллельную этому діаметру; потомъ соединяемъ m съ B. Линія TMT', параллельная хордѣ mB, будетъ касательною къ эллипсу въ точкѣ M. Если бы требовалось провести касательную параллельно данной прямой QR (черт. 15), то слѣдовало бы изъ точки B провести хорду Bm параллельно этой прямой QR; потомъ соединить точку m съ A, и чрезъ центръ O эллипса провести діаметръ MN, параллельный линіи mA. Точки M и N будутъ точками касанія на эллипсѣ.

Если, подобно предыдущему, разсмотримъ дополнительныя хорды BM и MA (черт. 16 листъ V) въ иперболѣ, то увидимъ, что означивъ чрезъ α и β углы MBX и MAX, а чрезъ a и b полу-оси этой кривой, получится уравненіе $tang\,\alpha\,.\,tang\,\beta = \frac{b^2}{a^2}$.

Основываясь на этомъ отношеніи, легко будетъ къ данной точкѣ иперболы провести касательную. Пусть будетъ m данная точка; проводимъ чрезъ m и центръ O діаметръ mn; потомъ, изъ B линію BM, параллельную діаметру mn, и соединяемъ точку M съ A. Линія TmT', параллельная дополнительной хордѣ MA, будетъ искомая касательная.

Предложенное здѣсь построеніе касательныхъ посредствомъ дополнительныхъ хордъ очень легко доказывается на томъ основаніи, что тангенсъ угла, составляемаго касательною съ осью x-овъ будетъ, для эллипса $-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$, а для иперболы $\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$, гдѣ x и y изображаютъ координаты точки касанія.

CORDE. (Мех.) **ВЕРЕВКА.** *Résistance des cordes*, *сопротивленіе веревокъ*; *roideur des cordes*, *негибкость веревокъ*; *tension d'une corde*, *напряженіе веревки*. Смот. TENSION, FUNICULAIRE (POLYGONE).

CORDEAU или **CORDON. НИТЬ.** Малаго діаметра веревка.

CORDES (VIBRATION DES). (Мех.) **СОТРЯСЕНІЕ СТРУНЪ.** Математическое опредѣленіе законовъ колебаній натянутой струны было предметомъ изслѣдованій первостепенныхъ математиковъ прошедшаго столѣтія, и ни одинъ вопросъ, болѣе этого, не способствовалъ къ объясненію теоріи частныхъ дифференціальныхъ уравненій. Мы постараемся въ этой статьѣ изложить рѣшеніе задачи о сотрясеніи струнъ въ самомъ простомъ ея видѣ.

Положимъ, что однородная струна, прикрѣпленная однимъ концомъ въ точкѣ O (черт. 18, Листъ V), проходитъ чрезъ жолобъ блока A, и натягивается грузомъ Q; въ этомъ состояніи, утвердимъ точку A; очевидно, что часть OA будетъ находиться въ равновѣсіи, и что напряженіе струны во всѣхъ ея точкахъ, будетъ равняться Q. Для бо́льшей ясности, откинемъ конецъ AQ струны; тогда получится только часть OA (черт. 19). Вообразимъ теперь, что какимъ либо средствомъ (напримѣръ, помощію цилиндра, подкладываемаго подъ струну, и подымаемаго потомъ съ нѣкоторымъ усиліемъ), отвели струну весьма мало отъ равновѣснаго ея положенія OA. Пусть OMA будетъ новое равновѣсное положеніе струны, которое она приметъ, или отъ того, что поддерживается цилиндромъ, или отъ дѣйствія на нее какихъ либо другихъ силъ. Положимъ теперь, что вдругъ прекращаютъ дѣйствіе этихъ силъ, или внезапно отнимаютъ изъ подъ струны цилиндрическую поверхность; струна придетъ въ сотрясеніе, и опредѣленіе обстоятельствъ этого движенія составляетъ *задачу о сотрясеніи струнъ* (*problême des cordes vibrantes*).

Приступимъ теперь къ разысканію дифференціальнаго уравненія движенія струны. Пусть будетъ OmA (черт. 19) ея положеніе по истеченіи времени t, считаемаго отъ того мгновенія, когда она начала двигаться, то есть, когда отняли изъ подъ нея цилиндрическую поверхность. Разсмотримъ движеніе элемента струны mm', соотвѣтствующаго прямоугольнымъ координатамъ $OP = x$ и $Pm = y$. Мы предположимъ, какъ уже выше о томъ упомянули, что струна отведена весьма мало отъ естественнаго ея положенія OA, въ слѣдствіе чего будемъ откидывать степени уклоненія Pm, превышающія первую. Очевидно, что въ этомъ предположеніи, точка струны, находящаяся первоначально въ M, будетъ двигаться по длинѣ ординаты MP, и, по истеченіи времени t, придетъ въ положеніе m. Изобразимъ чрезъ p напряженіе струны въ точкѣ m; величина p будетъ почти постоянная; такъ какъ p весьма мало разнствуетъ отъ вѣса Q, то и можно положить $p = Q + z$, разумѣя подъ z весьма малое количество перваго порядка. И такъ, элементъ mm' будетъ побуждаемъ по направленію касательной mT силою p, а по направленію mP, силою $-p\frac{dy}{ds}$, разумѣя подъ s дугу Om. Напряженіе струны въ точкѣ m' на часть $m'A$, параллельно оси OY, выразится чрезъ $-p\frac{dy}{ds} - d\left(p\frac{dy}{ds}\right)$; слѣдовательно, элементъ mm', въ точкѣ m', въ сторону $m'm$ и параллельно оси OY, будетъ натянутъ силою $p\frac{dy}{ds} + d\left(p\frac{dy}{ds}\right)$. И такъ, равнодѣйствующая силъ на элементъ mm' изобразится просто чрезъ $d\left(p\frac{dy}{ds}\right)$. Но, съ другой стороны, если означимъ чрезъ ρ массу единичной длины струны, то движущая сила, параллельная оси OY, будетъ $\rho\, ds\,\frac{d^2y}{dt^2}$; слѣдовательно

$$(1)\qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\left(p\frac{dy}{ds}\right)}{ds}.$$

Вотъ дифференціальное уравненіе движенія струны, въ которомъ еще должно откинуть величины втораго и высшихъ порядковъ. Что касается до силъ параллельныхъ оси OX, то легко доказать, что откидывая количества втораго и высшихъ порядковъ, получимъ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

и дѣйствительно, точно такимъ образомъ, какъ было выведено уравненіе (1), найдется

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\left(p\frac{dx}{ds}\right)}{ds};$$

но разность между элементомъ дуги $mm' = ds$ и элементомъ абсциссы $PP' = dx$ есть безконечно малая величина втораго порядка, ибо

$$ds = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = dx + \tfrac{1}{2}\,dx\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \ldots;$$

слѣдовательно должно принять $ds = dx$, и предыдущее уравненіе обратится въ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{dp}{dx} = 0,$$

потому что напряженіе, какъ мы замѣтили выше, почти постоянно. Въ слѣдствіе этого замѣчанія, уравненіе (1) приметъ видъ

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{p}{\rho}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Но $p = Q + z$, гдѣ z весьма малая величина перваго порядка; слѣдовательно, можно поставить Q вмѣсто p въ послѣднее уравненіе. Полагая для краткости $\frac{Q}{\rho} = a^2$, получимъ

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a^2\,\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Кромѣ этого уравненія имѣемъ еще четыре другихъ, необходимыхъ для полнаго рѣшенія занимающей насъ задачи, и которыя выводятся изъ соображеній, не относящихся уже къ Механикѣ. Во первыхъ ясно, что когда положимъ $t = 0$, то должны получить $y = PM$, а PM изображаетъ линію, данную въ функціи $OP = x$. Пусть будетъ $f(x)$ эта функція, весьма малая, но впрочемъ совершенно произвольная. Съ другой стороны, такъ какъ $\frac{dy}{dt}$ изображаетъ скорость элемента mm' по оси y-овъ, то при $t = 0$, эта скорость должна также обратиться въ нуль. И такъ, $\frac{dy}{dt} = 0$ при $t = 0$. Далѣе, очевидно, что при какомъ ни есть времени t, должно быть $y = 0$ для $x = 0$ и для $x = l$, разумѣя подъ l длину OA струны. И такъ, получаемъ слѣдующія пять уравненій, которымъ должно удовлетворить въ совокупности:

$$(2)\qquad \frac{d^2y}{dt^2} = a^2\,\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} y = f(x) \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{array}\right\}\ \text{когда } t = 0$$

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{ll} y = 0 & \text{когда } x = 0 \\ y = 0 & \text{когда } x = l. \end{array}\right.$$

Мы начнемъ съ интегрированія уравн. (2); для этого положимъ $x + at = u$, $x - at = v$, и перемѣнимъ дифференціалы, относящіеся къ x и t въ другіе, относящіеся къ перемѣннымъ u и v; таким образомъ получимъ:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dt} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dt} = a\left(\frac{dy}{du} - \frac{dy}{dv}\right)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx} = \frac{dy}{du} + \frac{dy}{dv}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = a\left(\frac{d^2y}{du^2} - \frac{d^2y}{dudv}\right)\frac{du}{dt} + a\left(\frac{d^2y}{dudv} - \frac{d^2y}{dv^2}\right)\frac{dv}{dt}$$
$$= a^2\left(\frac{d^2y}{du^2} + \frac{d^2y}{dv^2} - 2\frac{d^2y}{dudv}\right)$$
$$\frac{d^2y}{d\ ^2} = \left(\frac{d^2y}{du^2} + \frac{d^2y}{dudv}\right)\frac{du}{dx} + \left(\frac{d^2y}{dudv} + \frac{d^2y}{dv^2}\right)\frac{dv}{dx}$$
$$= \frac{d^2y}{du^2} + \frac{d^2y}{dv^2} + 2\frac{d^2y}{dudv}.$$

Подставляя эти выраженія въ уравн. (2), найдется $4a^2\frac{d^2y}{dudv} = 0$, или

$$\frac{d^2y}{dudv} = 0,$$

а интегралъ этого уравненія будетъ $y = \varphi(u) + \psi(v)$, разумѣя подъ φ и ψ произвольныя функціи; подставляя на мѣсто u и v ихъ величины, получимъ

(5) $$y = \varphi(x + at) + \psi(x - at).$$

Что касается до вида произвольныхъ функцій φ и ψ, то онъ долженъ быть опредѣленъ посредствомъ уравненій (3) и (4).

Полагая въ уравн. (5) $t = 0$, найдется

(6) $$f(x) = \varphi(x) + \psi(x);$$

диффренцируя то же уравн. (5) относительно времени t, и сдѣлавъ потомъ $t = 0$, получимъ

$$0 = \varphi'(x) - \psi'(x),$$

откуда, чрезъ интегрированіе,

$$\varphi(x) - \psi(x) = C,$$

разумѣя подъ C постоянную величину. Совокупленіе послѣдняго уравненія съ (6) доставитъ

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}[f(x) + C]$$
$$\psi(x) = \tfrac{1}{2}[f(x) - C],$$

и слѣдовательно

$$\varphi(x + at) = \tfrac{1}{2}[f(x + at) + C]$$
$$\psi(x - at) = \tfrac{1}{2}[f(x - at) - C],$$

откуда, въ силу уравн. (5), получимъ

(7) $$y = \tfrac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)].$$

Положимъ теперь въ этой формулѣ $x = o$ и $x = l$; въ слѣдствіе уравненій (4), для какого ни есть времени t, будетъ

$$o = f(at) + f(-at)$$
$$o = f(l + at) + f(l - at).$$

Если замѣнимъ буквою x произведеніе at, то очевидно x будетъ количество положительное, и послѣднія двѣ формулы примутъ видъ

$$o = f(x) + f(-x)$$
$$o = f(l + x) + f(l - x).$$

Первое изъ сихъ двухъ уравненій доставляетъ величину функціи $f(-x)$ посредствомъ $f(x)$; слѣдовательно, достаточно знать величины функціи $f(x)$ для положительныхъ значеній перемѣнной x. Изъ втораго уравненія, доставляющаго $f(l + x) = -f(l - x)$, выводимъ непосредственно величину функціи f отъ $x = l$ до $x = 2l$; перемѣнивъ въ предыдущемъ уравненіи x въ $l + x$, найдется $f(2l + x) = -f(-x) = f(x)$, а это уравненіе уже доставитъ величину функціи f для всѣхъ положительныхъ значеній перемѣнной x.

Приведемъ это рѣшеніе къ геометрическому построенію. Пусть будетъ OMA (черт. 20 листъ V) данный видъ струны въ началѣ движенія. Кривая OMA доставляетъ величину функціи $f(x)$ отъ $x = o$ до $x = l$, а уравненіе

$$f(l + x) = -f(l - x)$$

показываетъ, что $f(x)$, отъ $x = l$ до $x = 2l$, изображена кривою $AM'A'$, одинаковою съ OMA, но имѣющею обратное положеніе, такъ что ординаты PM и $P'M'$, равно-удаленныя отъ точки A, равны между собою, но направлены въ противныя стороны. И такъ, мы теперь въ состояніи построить функцію $f(x)$ отъ $x = o$ до $x = 2l$. Далѣе, уравненіе

$$f(2l + x) = f(x)$$

показываетъ, что функція f, отъ $x = 2l$, то есть отъ точки A', выражается кривою, изображенною на чертежѣ, гдѣ части $A'M''A''$, $A'''M^{IV}A^{IV}$ и проч. совершенно одинаковы съ частію OMA, а части $A''M'''A'''$, $A^{IV}M^{V}A^{V}$ и проч. съ $AM'A'$. Такимъ образомъ величина функціи $f(x)$, для всѣхъ положительныхъ значеній перемѣнной x, будетъ извѣстна, а уравненіе $f(-x) = -f(x)$ доставляетъ непосредственно ея величину для отрицательныхъ значеній x. Кривая ONB выводится изъ кривой OMA, ибо ординаты QN и PM, равно удаленныя отъ точки O, равны между собою и противуположны. Часть $BN'B'$ кривой выводится точно такимъ образомъ изъ части $AM'A'$, и такъ далѣе.

Легко привести это построеніе къ простому механическому дѣйствію. Беремъ кривую OMA, и перекладываемъ ее, отъ O къ X, точно такъ, какъ еслибъ измѣряли длину посредствомъ какой либо линейной единицы, то есть, принимаемъ точку A за неподвижную, и переносимъ O до совпаденія съ A'; потомъ оборачиваемъ кривую ASA', и получаемъ часть $AM'A'$; продолжаемъ точно такимъ образомъ, какъ будто имѣемъ цѣлію измѣрить линію OX, и не забывая притомъ, что при каждомъ пріёмѣ должно оборачивать фигуру. Для отрицательныхъ x-овъ производимъ совершенно тѣ же дѣйствія, но только въ противную сторону, то есть, отъ O къ X'. Это построеніе предложено *Эйлеромъ*; оно доставляетъ величину ординаты y, соотвѣтствующую какой ни есть абсциссѣ x и какому ни есть времени t.

Положимъ, напримѣръ, что $l = 1$, $a = 1$, и опредѣлимъ величину y посредствомъ формулы

$$y = \tfrac{1}{2}\,[f(x+t) + f(x-t)]$$

для $x = \frac{1}{2}$ а $t = 10$. Получимъ

$$y = \tfrac{1}{2}\,[f(10\tfrac{1}{2}) + f(-9\tfrac{1}{2})] = \tfrac{1}{2}\,[f(10\tfrac{1}{2}) - f(9\tfrac{1}{2})]$$
$$= \tfrac{1}{2}\,[f(\tfrac{1}{2}) - f(1\tfrac{1}{2})];$$

но, по причинѣ

$$f(1+x) = -f(1-x),$$

найдемъ

$$f(1\tfrac{1}{2}) = -f(\tfrac{1}{2}),$$

и слѣдовательно

$$y = f(\tfrac{1}{2}).$$

Теперь легко будетъ вывести время колебанія струны, то есть промежутокъ времени, въ продолженіи котораго струна, изъ первоначальнаго своего положенія OMA, переходитъ въ обратное ANO (черт. 19). Если въ уравненіи (7) примемъ $t = \frac{kl}{a}$, разумѣя подъ k какое ни есть цѣлое положительное число, то получимъ

$$y = \tfrac{1}{2}\,[f(x+kl) + f(x-kl)];$$

но, въ слѣдствіе выведенныхъ выше уравненій $f(x) + f(-x) = o$, $f(l+x) + f(l-x) = o$, имѣемъ

$$\begin{array}{ll} f(x+l) = f(x+l) & f(x-l) = f(x+l) \\ f(x+2l) = f(x) & f(x-2l) = f(x) \\ f(x+3l) = f(x+l) & f(x-3l) = f(x+l) \\ f(x+4l) = f(x) & f(x-4l) = f(x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

Слѣдовательно, для k *чётнаго* получимъ $y = f(x)$, а для k *нечётнаго*, $y = f(x+l) = -f(l-x)$. Изъ этого должно заключить, что кривая принимаетъ начальную свою фигуру для k *чётнаго*, а обратную, для k *нечётнаго*. Время, въ которое совершится этотъ переходъ, то есть *время колебанія*, опредѣляется очевидно отношеніемъ $\frac{l}{a}$. И такъ, по истеченіи промежутковъ времени, равныхъ $2\frac{l}{a}$, струна будетъ принимать прежнія положенія. Несмотря на это, не должно заключить, чтобы во всѣхъ случаяхъ струна, въ продолженіе времени $2\frac{l}{a}$, совершала только два колебанія. Если кривая OMA (черт. 19) имѣетъ только одинъ изгибъ, то дѣйствительно время колебанія будетъ $\frac{l}{a}$; но если бы струна, въ начальномъ состояніи, имѣла нѣсколько изгибовъ, напримѣръ два равныхъ OMA и $AM'A'$ (черт. 20), то она совершила бы 4 колебанія въ промежутокъ времени $2\frac{l}{a}$. Вообще, при бо́льшемъ числѣ изгибовъ равныхъ, число качаній изобразится удвоеннымъ числомъ изгибовъ, и слѣдовательно будетъ всегда чётнымъ.

Положимъ, что струна имѣетъ только одинъ изгибъ OMA между неподвижными точками O и A (черт. 19). Время колебанія, которое изобразимъ чрезъ T, будетъ $\frac{l}{a}$; но такъ какъ $a = \sqrt{\frac{Q}{\rho}}$ (Смот. выше), то и получимъ $T = \sqrt{\frac{\rho l^2}{Q}}$. Чтобы получить число колебаній струны въ одну секунду времени, стоитъ только составить пропорцію $T : 1 = 1'' : \frac{1}{T}$; и такъ $\sqrt{\frac{Q}{\rho l^2}} = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{Q}{\rho}}$ изобразитъ искомое число колебаній, которое принимается за мѣру напряженія звука. Слѣдовательно, *при равномъ напряженіи и толщинѣ, звукъ, издаваемый струною, обратно пропорціоналенъ ея длинѣ.*

Нѣкоторые геометры, и въ особенности Д'Аламбертъ, оспаривали справедливость, или по крайней мѣрѣ всеобщность строенія, предложеннаго Эйлеромъ. Д'Аламбертъ утверждалъ, что это строеніе справедливо только въ томъ случаѣ, когда функція $f(x)$ такого свойства, что, для всякаго x, она получаетъ величину, одинаковую съ тою, которую доставляетъ предыдущее строеніе. Это возраженіе до такой степени противорѣчитъ настоящимъ понятіямъ математиковъ объ этомъ предметѣ, что трудно понять, какъ оно могло представиться уму, одаренному безспорно высшими способностями. Мы считаемъ даже неизлишнимъ объяснить, въ чёмъ собственно состоитъ возраженіе д'Аламберта. Функція $f(x)$ изображаетъ нѣкоторый рядъ дѣйствій, которыя должно произвести надъ перемѣнною x; эти дѣйствія могутъ быть различны для различныхъ значеній x; при такомъ общемъ опредѣленіи функціи $f(x)$, возраженіе Д'Аламберта становится вовсе непонятнымъ. И дѣйствительно, Д'Аламбертъ исключалъ этотъ случай; онъ предполагалъ, что функція $f(x)$ получается посредствомъ однихъ и тѣхъ же дѣйствій отъ $x = o$ до $x = l$; въ противномъ случаѣ, по его утвержденію, строеніе Эйлера было ошибочно. Но даже, предполагая, что $f(x)$ изображаетъ функцію, получаемую посредствомъ одного и того же ряда дѣйствій, Д'Аламбертъ утверждалъ, что строеніе, о которомъ говорится, справедливо только въ томъ случаѣ, когда, производя надъ величинами x, превосходящими l или отрицательными, тѣ же дѣйствія, какія совершаемъ надъ положительными значеніями x, непревышающими l, получаемъ одни результаты съ тѣми, которые доставляетъ Эйлерово строеніе.

Мы не можемъ привести здѣсь доводовъ, которыми каждый изъ двухъ знаменитыхъ геометровъ защищалъ свое мнѣніе; отсылаемъ читателей къ *Запискамъ Берлинской и Петербургской Академій*, а также къ сочиненію *Opuscules mathématiques de d'Alembert*. Скажемъ только, что возраженіе д'Аламберта признано нынѣ совершенно неосновательнымъ.

Сверхъ упомянутаго сей-часъ пренія между Эйлеромъ и д'Аламбертомъ, первый изъ сихъ геометровъ имѣлъ, по тому же предмету, учёный споръ съ *Даніиломъ Бернулли*. Знаменитость именъ побуждаетъ насъ войти въ подробности спорной статьи. Для этого мы должны возвратиться къ уравненіямъ (2), (3) и (4), и интегрировать ихъ посредствомъ способа, отличнаго отъ того, который былъ изложенъ выше. Прежде всего, постараемся удовлетворить уравненіямъ (2) и (4) посредствомъ частныхъ рѣшеній. На сей конецъ положимъ

$$y = T \operatorname{Sin} \theta x + U \operatorname{Cos} \theta x,$$

разумѣя подъ T и U нѣкоторыя неизвѣстныя функціи перемѣнной t, а подъ θ величину постоянную. Такъ какъ для $x = o$ должно быть $y = o$, то отсюда заключаемъ, что $U = o$. И такъ

$$y = T \operatorname{Sin} \theta x.$$

Полагая $x = l$, должны также получить $y = o$, то есть, $T \operatorname{Sin} l\theta = o$; но такъ какъ нельзя положить $T = o$, ибо отсюда вывели бы $y = o$ для всякаго x, то и слѣдуетъ принять

$$\operatorname{Sin} \theta l = o. \tag{8}$$

Подставимъ теперь въ уравн. (2) предыдущую величину y; получимъ

$$\frac{d^2T}{dt^2} + a^2\theta^2 T = o,$$

откуда, чрезъ интегрированіе,

$$T = A \operatorname{Cos} a\theta t + B \operatorname{Sin} a\theta t,$$

гдѣ A и B изображаютъ постоянныя величины. Слѣдовательно

$$y = (A \operatorname{Cos} a\theta t + B \operatorname{Sin} a\theta t) \operatorname{Sin} \theta x.$$

Но уравн. (8) доставляетъ безчисленное множество различныхъ значеній для θ, именно: $\theta = o$, $\frac{\pi}{l}$, $\frac{2\pi}{l}$, $\frac{3\pi}{l}$, ... $-\frac{\pi}{l}$, $-\frac{2\pi}{l}$, $-\frac{3\pi}{l}$, ... и вообще $\theta = \frac{n\pi}{l}$, гдѣ n изображаетъ число цѣлое, положительное или отрицательное, включая сюда и нуль. Каждая величина θ опредѣлитъ величину для y, и, по причинѣ линейнаго вида уравненія въ y-ахъ, можно будетъ взять для сего послѣдняго сумму всѣхъ частныхъ его величинъ. И такъ

$$y = \Sigma \left(A_n \operatorname{Cos} \frac{a\pi n t}{l} + B_n \operatorname{Sin} \frac{a\pi n t}{l}\right) \operatorname{Sin} \frac{\pi n x}{l},$$

гдѣ знакъ Σ относится ко всѣмъ цѣлымъ величинамъ числа n, положительнымъ и отрицательнымъ. Значеніе $n = o$ можетъ быть исключено, потому что частная величина для y, соотвѣтствующая этому предположенію, сама обращается въ нуль. Предыдущая формула очевидно можетъ быть также написана въ видѣ

$$y = \sum_1^\infty \left[(A_n - A_{-n}) \operatorname{Cos} \frac{a\pi n t}{l} + (B_n + B_{-n}) \operatorname{Sin} \frac{a\pi n t}{l}\right] \operatorname{Sin} \frac{\pi n x}{l},$$

или, замѣняя разность $A_n - A_{-n}$ величиною A_n, а сумму $B_n + B_{-n}$ величиною B_n,

$$y = \sum_1^\infty \left(A_n \operatorname{Cos} \frac{a\pi n t}{l} + B_n \operatorname{Sin} \frac{a\pi n t}{l}\right) \operatorname{Sin} \frac{\pi n x}{l}.$$

Вотъ рѣшеніе задачи о сотрясеніи струнъ, которое Даніилъ Бернулли выдавалъ за общее. Но такъ какъ оставалось еще удовлетворить уравненіямъ (3), то Эйлеръ и утверждалъ, что это невозможно, между тѣмъ какъ Даніилъ Бернулли защищалъ противное, основывая свое утвержденіе на томъ, что въ величину y входитъ безчисленное множество произвольныхъ коэффиціентовъ. Споръ между знаменитыми противниками остался нерѣшеннымъ, ибо ни тотъ ни другой не предложилъ строгаго доказательства въ защиту своего мнѣнія.

*

Мы не должны умолчать объ одномъ возраженіи Эйлера, которое, по его мнѣнію, рѣшительно опровергало теорію Даніила Бернулли. Эйлеру казалось очевиднымъ, что невозможно удовлетворить уравненію

$$f(x) = \sum_1^\infty A_n \, Sin \frac{\pi n x}{l},$$

когда функція $f(x)$ имѣетъ дѣйствительныя величины только для нѣкоторой части x-овъ, заключающихся между предѣлами 0 и l, какъ напримѣръ, если бы функція $f(x)$ допускала извѣстныя значенія между 0 и $\frac{1}{2}l$, а отъ $\frac{1}{2}l$ до l постоянно равнялась нулю. Непонятно, почему Эйлеръ исключалъ этотъ случай скорѣе нежели другіе; но еще удивительнѣе, что послѣ того какъ Лагранжъ разрѣшилъ вполнѣ всѣ возраженія, сдѣланныя противъ теоріи Даніила Бернулли, нашлись математики, возобновившіе ихъ. Нынѣ всѣ недоразумѣнія по сему предмету уничтожены. *Лагранжъ* и *Фурье* доказали, что во всѣхъ случаяхъ можно удовлетворить уравненіямъ (3), которыя, по подстановленіи въ нихъ величины y, примутъ видъ

$$f(x) = \sum_1^\infty A_n \, Sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$0 = \sum_1^\infty n B_n \, Sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Впрочемъ, очевидно, что стоитъ только удовлетворить первому изъ сихъ уравненій, ибо второе есть частный случай перваго; чтобы удовлетворить упомянутому уравненію, надлежитъ взять

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \, Sin \frac{\pi n x}{l} \, dx.$$

Если вмѣсто функціи $f(x)$ поставимъ 0, то получимъ $nB_n = 0$, откуда $B_n = 0$; слѣдовательно

$$y = \sum_1^\infty A_n \, Cos \frac{a\pi n t}{l} \cdot Sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Если случится, что функція $f(x)$ имѣетъ дѣйствительныя величины только между нѣкоторыми предѣлами, напримѣръ, отъ $x = 0$ до $x = \frac{1}{2}l$, то въ такомъ случаѣ надобно будетъ положить

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^{\frac{1}{2}l} f(x) \, Sin \frac{\pi n x}{l} \, dx.$$

Чтобъ освободить анализъ Даніила Бернулли отъ главнаго, или, лучше, отъ единственнаго возраженія Эйлера, достаточно показать справедливость уравненія

$$f(x) = \sum_1^\infty A_n \, Sin \frac{\pi n x}{l},$$

а эта формула доказана строгимъ образомъ въ статьѣ: CONVERGENCE D'UNE SÉRIE.

Въ заключеніе покажемъ, что рѣшеніе Даніила Бернулли совершенно согласуется съ рѣшеніемъ, предложеннымъ Эйлеромъ. Возьмемъ два уравненія

$$f(x) = \sum_1^\infty A_n \, Sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$y = \sum_1^\infty A_n \, Cos \frac{a\pi n t}{l} \cdot Sin \frac{\pi n x}{l};$$

послѣднее, по причинѣ

$$Cos \frac{a\pi n t}{l} \cdot Sin \frac{\pi n x}{l} = \tfrac{1}{2}\left[Sin \, n\pi\,(x+at) + Sin \, n\pi\,(x-at)\right]$$

приметъ видъ

$$y = \tfrac{1}{2}\sum_1^\infty A_n \, Sin \, n\pi\,(x+at) + \tfrac{1}{2}\sum_1^\infty A_n \, Sin \, n\pi\,(x-at).$$

Ежели теперь въ первомъ изъ двухъ разсматриваемыхъ уравненій замѣнимъ x сперва суммою $x+at$, а потомъ разностію $x-at$, то получимъ

$$f(x+at) = \sum_1^\infty A_n \, Sin \frac{n\pi(x+at)}{l}$$

$$f(x-at) = \sum_1^\infty A_n \, Sin \frac{n\pi(x-at)}{l},$$

и слѣдовательно

$$y = \tfrac{1}{2}\left[f(x+at) + f(x-at)\right],$$

а это уравненіе не разнится отъ уравн. (7). Сверхъ того очевидно, что

$$f(-x) = -\sum_1^\infty A_n \, Sin \frac{\pi n x}{l} = -f(x),$$

почему $f(x) + f(-x) = 0$, откуда заключаемъ

$$f(l+x) + f(l-x) =$$

$$\sum_1^\infty A_n\left[Sin \frac{\pi n(l+x)}{l} + Sin \frac{\pi n(l-x)}{l}\right] = 0,$$

что также сообразно съ результатомъ, полученнымъ Эйлеромъ.

Читатели, желающіе ближе ознакомиться съ мнѣніями Эйлера, д'Аламберта, Кондорсета, Лагранжа и Лапласа по предмету, изложенному въ этой статьѣ, могутъ обратиться къ Разсужденію *Арбогаста*, увѣнчанному въ 1790 году С. Петербургскою Академіею Наукъ. Это Разсужденіе издано подъ заглавіемъ: *Mémoire sur la nature des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles.* St.-Pétersbourg, 1791.

CORNET ACOUSTIQUE. (Акуст.) **АКУСТИЧЕСКІЙ, СЛУХОВОЙ РОЖОКЪ.** Инструментъ, употребляемый глухими. Онъ состоитъ изъ металлической трубки съ широкимъ отверстіемъ, которому даютъ обыкновенно видъ параболическій, чтобы звукъ, отражаясь въ одну точку, именуемую *фокусомъ*, производилъ сильнѣйшее впечатлѣніе на органъ слуха. См. PORTE-VOIX.

CORNU (ANGLE). Не упот. **ДУГОВОЙ УГОЛЪ.** Такъ называли прежде нѣкоторые геометры уголъ, составляемый прямою линіею, касательною или сѣкущею, съ окружностію круга. Смот. CONTINGENCE (ANGLE DE).

COROLLAIRE или **CONSÉQUENCE.** (Мат.) **СЛѢДСТВІЕ.** Заключеніе, выводимое изъ одного или нѣсколькихъ предложеній, доказанныхъ, или только допускаемыхъ. Такъ напримѣръ, изъ предложенія: „*площадь параллелограмма равняется произведенію основанія его на высоту*" — выводимъ слѣдствіе: *площади параллелограммовъ, имѣющихъ равныя основанія, относятся между собою какъ ихъ высоты.*

CORPS или **SOLIDE.** (Геом.) **ТѢЛО** (геометрическое). Смот. SOLIDE, POLYÈDRE.

CORPS RONDS. КРУГОВЫЯ, КРУГЛЫЯ ТѢЛА. Такъ называются въ начальной Геометріи три тѣла: *цилиндръ, конусъ* и *шаръ*. См. CYLINDRE, CONE, SPHÈRE.

CORPS D'ARCHIMÈDE или **POLYÈDRES SEMI-RÉGULIERS.** (Геом.) **ТѢЛА АРХИМЕДОВЫ** или **ПОЛУ-ПРАВИЛЬНЫЯ МНОГОГРАННИКИ.** Такъ называются многогранники, коихъ грани суть обыкновенные правильные многоугольники (равносторонній треугольникъ, квадратъ и правильный пятиугольникъ), но не всѣ одного рода, какъ въ извѣстныхъ правильныхъ многогранникахъ. Совокупленіе равносторонихъ треугольниковъ, квадратовъ и пятиугольниковъ, приводитъ къ *тринадцати полу-правильнымъ многогранникамъ*, которые могутъ быть вписаны въ шарѣ и описаны около него. Разсматриваніе этого рода тѣлъ полезно въ Кристаллографіи; они описаны Г. *Лидономъ* (*Lidonne*) въ концѣ его книги *Tables de tous les diviseurs des nombres* и проч. изданной въ 1808 году.

CORPS (PROBLÊME DES TROIS). (Мех.) **ЗАДАЧА О ДВИЖЕНІИ ТРЕХЪ ТѢЛЪ.** Такъ называется задача, состоящая въ опредѣленіи обстоятельствъ движенія трехъ тѣлъ, принимаемыхъ за вещественныя точки, подверженныя взаимному притяженію по Ньютонову закону. См. ATTRACTION NEUTONIENNE. Легко вывести дифференціальныя уравненія этого движенія; но интегрированіе сихъ уравненій представляетъ такія затрудненія, что до сихъ поръ усиліями первостепенныхъ геометровъ задача рѣшена только по приближенію, и то въ частныхъ случаяхъ, подъ которые, къ счастію, подходитъ движеніе небесныхъ тѣлъ.

Приведемъ здѣсь дифференціальныя уравненія задачи о трехъ тѣлахъ. Пусть будутъ M, m и m' массы разсматриваемыхъ тѣлъ, и, для утвержденія понятій, положимъ, что M изображаетъ массу солнца, а m и m' массы двухъ планетъ. Означимъ чрезъ k притяженіе двухъ единичныхъ массъ на единичномъ разстояніи; чрезъ r, r' разстоянія: отъ солнца до планеты m и отъ солнца до планеты m'; и наконецъ чрезъ ρ взаимное разстояніе двухъ планетъ. Притягательныя силы, побуждающія солнце, будутъ $\frac{kMm}{r^2}$, $\frac{kMm'}{r'^2}$; $\frac{kMm}{r^2}$ и $\frac{kmm'}{\rho^2}$ изобразятъ силы, дѣйствующія на планету m, а $\frac{kMm'}{r'^2}$ и $\frac{kmm'}{\rho^2}$ на планету m'. И такъ, если назовемъ X, Y, Z прямоугольныя координаты солнца относительно какой нибудь неподвижной точки въ пространствѣ, $X+x$, $Y+y$, $Z+z$ координаты планеты m, а $X+x'$, $Y+y'$, $Z+z'$ координаты планеты m' относительно тѣхъ же осей, то, изобразивъ чрезъ t время, получимъ по извѣстнымъ правиламъ Динамики [Смот. CURVILIGNE (MOUVEMENT)] слѣдующія девять уравненій:

$$\frac{d^2X}{dt^2}=\frac{kmx}{r^3}+\frac{km'x'}{r'^3}$$
$$\frac{d^2Y}{dt^2}=\frac{kmy}{r^3}+\frac{km'y'}{r'^3}$$
$$\frac{d^2Z}{dt^2}=\frac{kmz}{r^3}+\frac{km'z'}{r'^3}$$
$$\frac{d^2X}{dt^2}+\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{kMx}{r^3}+\frac{km'(x'-x)}{\rho^3}$$
$$\frac{d^2Y}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{kMy}{r^3}+\frac{km'(y'-y)}{\rho^3}$$
$$\frac{d^2Z}{dt^2}+\frac{d^2z}{dt^2}=-\frac{kMz}{r^3}+\frac{km'(z'-z)}{\rho^3}$$

$$\frac{d^2X}{dt^2}+\frac{d^2x'}{dt^2}=-\frac{kMx'}{r'^3}-\frac{km(x'-x)}{\rho^3}$$
$$\frac{d^2Y}{dt^2}+\frac{d^2y'}{dt^2}=-\frac{kMy'}{r'^3}-\frac{km(y'-y)}{\rho^3}$$
$$\frac{d^2Z}{dt^2}+\frac{d^2z'}{dt^2}=-\frac{kMz'}{r'^3}-\frac{km(z'-z)}{\rho^3}.$$

Если изъ этихъ формулъ исключимъ координаты X, Y, Z, то получимъ новую систему уравненій, опредѣляющихъ относительное движеніе планетъ въ разсужденіи солнца. Чтобы произвести исключеніе, о которомъ говоримъ, стоитъ только подставить величины $\frac{d^2X}{dt^2}, \frac{d^2Y}{dt^2}, \frac{d^2Z}{dt^2}$, доставляемыя первыми тремя уравненіями, въ остальныя шесть; такимъ образомъ получимъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k(M+m)x}{r^3}=km'\left(\frac{x'-x}{\rho^3}-\frac{x'}{r'^3}\right)$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{k(M+m)y}{r^3}=km'\left(\frac{y'-y}{\rho^3}-\frac{y'}{r'^3}\right)$$
$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{k(M+m)z}{r^3}=km'\left(\frac{z'-z}{\rho^3}-\frac{z'}{r'^3}\right)$$
$$\frac{d^2x'}{dt^2}+\frac{k(M+m')x'}{r'^3}=km\left(\frac{x-x'}{\rho^3}-\frac{x}{r^3}\right)$$
$$\frac{d^2y'}{dt^2}+\frac{k(M+m')y'}{r'^3}=km\left(\frac{y-y'}{\rho^3}-\frac{y}{r^3}\right)$$
$$\frac{d^2z'}{dt^2}+\frac{k(M+m')z'}{r'^3}=km\left(\frac{z-z'}{\rho^3}-\frac{z}{r^3}\right).$$

Замѣтимъ теперь, что

$$\frac{x'-x}{\rho^3}=\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{dx},\quad \frac{y'-y}{\rho^3}=\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{dy},\quad \frac{z'-z}{\rho^3}=\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{dz},$$

а также

$$\frac{x'}{r'^3}=\frac{d\left(\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right)}{dx},\quad \frac{y'}{r'^3}=\frac{d\left(\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right)}{dy},$$
$$\frac{z'}{r'^3}=\frac{d\left(\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right)}{dz};$$

слѣдовательно, вторыя части первыхъ трехъ изъ приведенныхъ шести уравненій будутъ не иное что̀, какъ частныя производныя по x, y и z функціи $km'\left(\frac{1}{\rho}-\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right)$; изобразивъ сію послѣднюю чрезъ R, получимъ

$$(A)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k(M+m)x}{r^3}=\frac{dR}{dx}\\&\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{k(M+m)y}{r^3}=\frac{dR}{dy}\\&\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{k(M+m)z}{r^3}=\frac{dR}{dz}.\end{aligned}\right.$$

Означивъ чрезъ R' функцію $km\left(\frac{1}{\rho}-\frac{xx'+yy'+zz'}{r^3}\right)$, найдемъ точно такимъ образомъ

$$(B)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d^2x'}{dt^2}+\frac{k(M+m')x'}{r'^3}=\frac{dR'}{dx'}\\&\frac{d^2y'}{dt^2}+\frac{k(M+m')y'}{r'^3}=\frac{dR'}{dy'}\\&\frac{d^2z'}{dt^2}+\frac{k(M+m')z'}{r'^3}=\frac{dR'}{dz'}.\end{aligned}\right.$$

Въ настоящемъ состояніи Анализа интегрированіе шести совокупныхъ уравненій (A) и (B) невозможно. Но ежели примемъ въ соображеніе то обстоятельство, что массы планетъ несравненно менѣе массы солнца, то можно будетъ отбросить величины r и r', помноженныя на массы планетъ, въ сравненіи съ членами, заключающими множителемъ суммы $M+m$ и $M+m'$. Въ такомъ предположеніи, первое приближеніе доставитъ

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k(M+m)x}{r^3}=0\\&\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{k(M+m)y}{r^3}=0\\&\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{k(M+m)z}{r^3}=0\end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d^2x'}{dt^2}+\frac{k(M+m')x'}{r'^3}=0\\&\frac{d^2y'}{dt^2}+\frac{k(M+m')y'}{r'^3}=0\\&\frac{d^2z'}{dt^2}+\frac{k(M+m')z'}{r'^3}=0.\end{aligned}\right.$$

Уравненія (1) и (2) составляютъ двѣ системы, независимыя одна отъ другой; каждая система интегрируется безъ затрудненія, и приводитъ къ извѣстнымъ свойствамъ эллиптическаго движенія. Выразивъ координаты x, y, z, x', y', z' въ функціи времени, обращаемся опять къ уравненіямъ (A) и (B), и подставляемъ въ заключающіяся въ нихъ функціи R и R' найденныя величины для x, y, z, x', y', z'. Такимъ образомъ получаемъ двѣ новыя системы дифференціальныхъ уравненій; интегрированіе ихъ приведетъ ко второму приближенію, которое будетъ вѣрно до квадратовъ возмутительныхъ массъ m и m'. —

Предѣлы нашего Лексикона не позволяютъ намъ даже коснуться способовъ, придуманныхъ для этого интегрированія. Теорія, о которой говоримъ, была предметомъ обширныхъ трактатовъ, и, несмотря на то̀, ожидаетъ еще новыхъ воздѣлователей. Окончимъ статью краткими историческими указаніями на труды геометровъ въ разсужденіи задачи о трехъ тѣлахъ.

Нютонъ, рѣшившій вполнѣ задачу объ эллиптическомъ движеніи планетъ, сообщаемаго имъ притягательнымъ дѣйствіемъ солнца, оставилъ, такъ сказать, только нѣкоторыя предположенія относительно теоріи ихъ возмущеній. Онъ думалъ, и весьма справедливо, что эллиптическое движеніе Юпитера и Сатурна подвергается весьма чувствительному измѣненію отъ взаимнаго дѣйствія сихъ двухъ планетъ, имѣющихъ значительныя массы. Несовершенство только-что возникающаго Интегральнаго Исчисленія не позволяло ему углубиться въ эту теорію, весьма трудную; Смот. SATELLITE.

Знаменитые математики, современники Нютона, *Лейбницъ* и два брата *Яковъ* и *Иванъ Бернулли* не послѣдовали ученію о всеобщемъ тяготѣніи, и не занялись изслѣдованіями о движеніи планетъ. Но они усовершенствовали Высшій Анализъ, и этимъ самымъ доставили возможность своимъ преемникамъ приступить къ рѣшенію труднаго вопроса о возмущеніяхъ планетъ. *Эйлеръ* является первый на этомъ поприщѣ; способъ, которымъ наука одолжена сему великому геометру, безъ сомнѣнія изящнѣйшій и простѣйшій изъ всѣхъ предложенныхъ донынѣ, можетъ быть легко распространенъ на случай сколькихъ угодно тѣлъ. Эйлеръ выражаетъ координаты возмущенной планеты рядами, простирающимися по синусамъ и косинусамъ кратныхъ угловъ отъ средней аномаліи; а какъ эта самая аномалія входитъ и внѣ знаковъ синусовъ и косинусовъ, отчего выраженія радіуса вектора и долготы по прошествіи значительнаго времени оказались бы неточными, то Эйлеръ, посредствомъ особенно-остроумнаго способа, замѣняетъ члены, содержащіе среднюю аномалію внѣ знаковъ синуса и косинуса другими, заключающими ее только подъ сими знаками. На этомъ основаніи, онъ опредѣляетъ вѣковыя неравенства, эксцентрицитеты, положенія перигелія и отступленіе узловъ.

Клеро и *д'Аламбертъ* также занимались задачею о трехъ тѣлахъ; но они мало прибавили къ теоріи Эйлера.

Лагранжъ, которому труды Эйлера не были извѣстны, напечаталъ Разсужденіе о возмущеніяхъ Юпитера и Сатурна; результаты этихъ изслѣдованій не согласовались съ выводами Эйлера, что и побудило *Лапласа* заняться снова рѣшеніемъ того же вопроса. Лапласъ, трудясь надъ этою теоріею, былъ приведенъ къ важному открытію неизмѣняемости большихъ осей планетныхъ орбитъ и средняго движенія планетъ, а также къ объясненію причины большаго неравенства въ движеніи Юпитера и Сатурна. Въ позднѣйшихъ Разсужденіяхъ Лагранжъ распространилъ теорему о неизмѣняемости большихъ осей, и доказалъ ее несравненно строже, нежели Лапласъ. Небесная Механика обязана также Лагранжу доказательствомъ неизмѣнности солнечной системы; позже, это доказательство было предложено Лапласомъ въ болѣе общемъ видѣ.

Въ этомъ краткомъ очеркѣ трудовъ, предпринятыхъ геометрами для рѣшенія задачи о трехъ тѣлахъ, мы не должны умолчать о теоремѣ Г. *Пуассона* (*Poisson*) относительно неизмѣняемости большихъ планетныхъ орбитъ въ томъ случаѣ, когда принимаются въ соображеніе вторыя степени возмутительныхъ массъ, ибо, въ доказательствѣ Лагранжа, удерживаются только первыя степени.

Здѣсь также мѣсто упомянуть объ общей теоріи *измѣненія постоянныхъ произвольныхъ величинъ*, предложенной Лагранжемъ, и которую онъ приложилъ къ рѣшенію задачи о трехъ тѣлахъ. Смот. VARIATIONS DES CONSTANTES ARBITRAIRES. Но справедливость требуетъ замѣтить, что Лапласъ, въ одно время съ Лагранжемъ, вывелъ подобныя формулы; но онѣ относились только къ частному случаю задачи о трехъ тѣлахъ, между тѣмъ какъ теорія Лагранжа примѣняется ко всѣмъ вопросамъ о движеніи, и, какъ недавно замѣтилъ Англійскій математикъ *Гамильтонъ*, много облегчаетъ интегрированіе дифференціальныхъ уравненій Динамики.

Читатели найдутъ самыя обстоятельныя подробности о задачѣ трехъ тѣлъ, а также ссылки на сочиненія объ этомъ предметѣ, въ знаменитомъ твореніи Лапласа: *Mécanique Céleste, Tome* 5me *Livre XV*.

CORPS D'UNE MACHINE. (Прикл. Мех.) **КОРПУСЪ, ОСТАВЪ МАШИНЫ.** Вообще, главная часть машины. *Corps de pompe*; *труба, стволъ насоса.*

CORPS. (Физ.) **ТѢЛО.** Часть вещества, со всѣхъ сторонъ ограниченная. Но что такое вещество, на этотъ вопросъ, кажется, невозможно отвѣчать удовлетворительнымъ образомъ. Обыкновенное опредѣленіе вещества — *всё то, что можетъ дѣйствовать на наши чувства,* — не выдержитъ строгаго разбора, и всѣмъ извѣстны возраженія спиритуалистовъ противъ показаній нашихъ чувствъ.

Для объясненія явленій, представляемыхъ вообще тѣлами, физики допускаютъ, что вещество состоитъ изъ весьма малыхъ частей, называемыхъ *частицами* (*molécules, corpuscules*), которыя находятся однѣ отъ другихъ на нѣкоторыхъ разстояніяхъ; эти частицы удерживаются въ связи между собою силами притягательными, а не приходятъ въ соприкосновеніе въ слѣдствіе силъ отталкивающихъ, которыя, какъ увидимъ ниже, дѣйствуютъ на частицы въ одно время съ притягательными.

Частицы, хотя и чре́звычайно малы, но сами составлены еще изъ другихъ частицъ, несравненно ме́ньшихъ, называемыхъ *атомами* (*atômes*). Частицы всѣхъ тѣлъ представляются въ состояніи твердомъ. Состояніе тѣлъ твердыхъ, жидкихъ и воздухообразныхъ зависитъ отъ силъ притягательныхъ и отталкивающихъ, которыя изъявляютъ свое дѣйствіе на частицы, а не зависитъ отъ свойства сихъ послѣднихъ. Опытъ подтверждаетъ эту истину; дѣйствительно, посредствомъ сильнаго давленія или значительнаго пониженія температуры можно привести въ твердое состояніе тѣла жидкія и газы, и напротивъ того, посредствомъ усиленной теплоты, превратить тѣла твердыя и жидкія въ воздухообразныя. Чтобы составить себѣ ясное понятіе о трехъ состояніяхъ, въ которыхъ представляются тѣла, надобно прибѣгнуть къ разсмотрѣнію притягательныхъ и отталкивающихъ силъ, дѣйствующихъ на частицы тѣлъ. Каждый атомъ частицы есть центръ силъ притягательныхъ, дѣйствующихъ во всѣ стороны. И такъ, атомы одной и той же частицы притягиваются взаимно, и вмѣстѣ съ тѣмъ притягиваютъ атомы смежныхъ частицъ. Законъ этого притяженія неизвѣстенъ. Изъ усматриваемыхъ нами явленій выводимъ только то заключеніе, что это притяженіе выражается суммою двухъ членовъ, изъ которыхъ одинъ обратно пропорціоналенъ квадрату взаимнаго разстоянія двухъ притягивающихся атомовъ, а другой, изображаетъ неизвѣстную функцію этого самаго разстоянія, подчиненную тому условію, что величина ея дѣлается нечувствительною, какъ скоро разстояніе сдѣлалось ощутительнымъ. Законъ, о которомъ говоримъ, выражается формулою

$$\frac{k}{r^2} + \varphi(r),$$

гдѣ k изображаетъ количество постоянное, r разстояніе между двумя притягивающимися атомами, а $\varphi(r)$ такую функцію, которая, для чувствительныхъ величинъ r, дѣлается вовсе нечувствительною.

Объясненіе усматриваемыхъ нами въ тѣлахъ явленій требуетъ, чтобы между атомами ихъ, сверхъ притягательныхъ дѣйствій, обнаруживались и взаимныя отталкиванія. Но такъ какъ противно здравому разсудку допустить, чтобы атомъ былъ одаренъ въ одно время двумя свойствами, совершенно противуположными, именно, притягательною и вмѣстѣ отталкивающею силами, то физики и предполагаютъ, что отталкиваніе происходитъ отъ атомовъ не разсматриваемаго тѣла, но другаго вещества, несравненно рѣдчайшаго, наполняющаго всё пространство, и называемаго *эѳиромъ* (*éther*). Атомы эѳира прилипаютъ къ атомамъ, составляющимъ частицы тѣла; и такъ какъ первые отталкиваются взаимно, то между послѣдними и обнаруживаются отталкивающія силы.

Эѳиръ есть вещество совершенно отличное отъ другихъ: оно не составлено изъ частицъ какъ прочія тѣла, а состоитъ единственно изъ атомовъ. Эти атомы ни въ какомъ случаѣ не притягиваются между собою, но всегда отталкиваются взаимно.

Теперь мы въ состояніи опредѣлить взаимодѣйствіе двухъ атомовъ какого ни есть вещества; дѣйствіе, о которомъ говоримъ, можетъ быть, какъ и выше, выражено формулою $\frac{k}{r^2} + \varphi(r)$; но функція $\varphi(r)$ будетъ заключать въ себѣ не только часть, относящуюся къ взаимному притяженію атомовъ, но еще и дѣйствія ихъ на атомы эѳира, и взаимныя отталкиванія сихъ послѣднихъ. И такъ, $\varphi(r)$ будетъ состоять: 1) изъ функціи $f(r)$, выражающей взаимное притяженіе двухъ атомовъ тѣла; 2) изъ функціи $f_1(r)$, изображающей дѣйствіе одного атома тѣла, на атомъ эѳира, соприкосновеннаго съ другимъ атомомъ тѣла; 3) изъ функціи $f_2(r)$, изображающей дѣйствіе втораго атома тѣла на атомъ эѳира, прилипшаго къ первому атому тѣла, и 4), изъ функціи $F(r)$, выражающей взаимное отталкиваніе атомовъ эѳира, соединившихся съ двумя атомами тѣла. И такъ, полное дѣйствіе между двумя какими ни есть атомами тѣла, выразится формулою

$$\frac{k}{r^2} + f(r) + f_1(r) + f_2(r) - F(r).$$

Если, для простоты, изобразимъ чрезъ $\psi(r)$ сумму всѣхъ положительныхъ членовъ, то получимъ разность

$$\psi(r) - F(r),$$

изображающую взаимное дѣйствіе двухъ атомовъ тѣла. Обѣ функціи $\psi(r)$ и $F(r)$ убываютъ съ увеличеніемъ разстоянія r, и дѣйствіе атомовъ будетъ притягательное или отталкивающее, смотря по тому, будетъ ли разность $\psi(r) - F(r)$ положительная или отрицательная.

Каждый изъ атомовъ, составляющихъ одну частицу тѣла, побуждается столькими силами такого рода, сколько та частица заключаетъ въ себѣ составныхъ атомовъ, безъ одного; когда разсматривается одна частица, то равнодѣйствующая всѣхъ этихъ силъ изобразитъ силу, побуждающую атомъ. Но ежели разсматриваемъ нѣсколько частицъ тѣла, то каждый атомъ будетъ еще побуждаемъ силами, происходящими отъ дѣйствія атомовъ смежныхъ частицъ. Мы постараемся объяснить теперь различныя состоянія тѣлъ, подлежащихъ нашимъ чувствамъ, принимая въ соображеніе какъ взаимныя дѣйствія атомовъ, составляющихъ одну и ту же частицу, такъ и дѣйствія, происходящія отъ смежныхъ съ нею частицъ разсматриваемаго тѣла.

Въ тѣлахъ твердыхъ, и въ особенности въ тѣлахъ окристаллованныхъ, взаимное дѣйствіе частицъ зависитъ отъ числа и отъ расположенія атомовъ внутри каждой частицы, почему сіи послѣднія могутъ дѣйствовать однѣ на другія сильнѣе или слабѣе, смотря на относительныя ихъ положенія. Онѣ располагаются между собою такъ, что положенія ихъ свойственны устойчивому равновѣсію, отъ чего и происходитъ правильный видъ тѣлъ окристаллованныхъ. Въ тѣлахъ неокристаллованныхъ вліяніе формы частицъ на взаимныя ихъ дѣйствія менѣе ощутительно, но не ничтожно; и въ самомъ дѣлѣ, можно сказать, что нѣтъ въ природѣ ни одного твердаго тѣла, которое бы совершенно было лишено свойства кристаллизованія. Когда механическимъ образомъ разламываемъ твердое тѣло, то частицы въ томъ мѣстѣ, гдѣ произошло переломленіе, отдѣляются однѣ отъ другихъ, и, очень естественно полагать, что въ это время атомы ихъ приведены въ движеніе; по сей-то причинѣ всегда замѣчаемъ при разламываніи тѣла бо́льшее или ме́ньшее освобожденіе теплоты, ибо, при быстромъ сотрясеніи частицъ, происходитъ звукъ (Смот. SON, ACOUSTIQUE), а движеніе атомовъ внутри частицъ приводитъ въ сотрясеніе эѳиръ, движеніе котораго производитъ теплоту (Смот. CHALEUR). Но когда разрушаемъ тѣло химическимъ образомъ, то есть чрезъ соединеніе его съ другимъ тѣломъ, то всѣ его частицы раздробляются, и атомы перваго тѣла соединяются съ атомами втораго, и составляютъ частицы, принадлежащія уже вновь образовавшемуся тѣлу. Вотъ почему всѣ химическія дѣйствія сопровождаются освобожденіемъ теплоты. Бо́льшее или ме́ньшее сродство двухъ веществъ въ особенности зависитъ отъ вида ихъ частицъ, или, правильнѣе, отъ той части частичнаго дѣйствія, которая зависитъ отъ этого вида.

Отъ взаимныхъ ли разстояній частицъ, или отъ ихъ вида, но въ жидкихъ тѣлахъ притягательная сила мало ощутительна. Дѣйствіе между двумя жидкими частицами производится точно такъ, какъ если бы составляющіе ихъ атомы были сосредоточены въ центрахъ инерціи частицъ, а это значитъ, что видъ сихъ послѣднихъ не имѣетъ почти никакого вліянія на ихъ взаимодѣйствія. Для раздробленія жидкости достаточно малаго усилія; но для уменьшенія ея объёма требуется значительное давленіе. Это происходитъ оттого, что притягательныя взаимодѣйствія частицъ весьма слабы, между тѣмъ какъ для сжатія жидкости надобно непремѣнно приблизить всѣ частицы однѣ къ другимъ. Дѣйствительно, если бы желали сжать только нѣкоторую часть какой либо жидкости, употребляя на сей конецъ значительное давленіе, то частицы, подверженныя давленію, тотчасъ устремились бы въ ту сторону, гдѣ давленіе меньше. И такъ, надлежитъ подвергнуть жидкость давленію, равному во всѣ стороны, и этимъ средствомъ приблизить всѣ ея частицы, безъ исключенія, однѣ къ другимъ; Смот. FLUIDE. Напротивъ того, можно сжать какую угодно часть твердаго тѣла, и остальныя его части не подвергнутся чрезъ то никакому измѣненію. По сей-то причинѣ твердыя тѣла, по видимому, одарены въ бо́льшей степени свойствомъ сжимаемости, нежели тѣла жидкія.

Наконецъ, въ тѣлахъ упругихъ, какъ-то въ газахъ и парахъ [Смот. AÉRIFORME (FLUIDE)], видъ частицъ не имѣетъ никакого вліянія на ихъ взаимодѣйствія, и отталкивающая сила преобладаетъ надъ силою притягательною, въ слѣдствіе чего частицы воздухообразныхъ тѣлъ стремятся къ взаимному удаленію. Вотъ почему тѣла упругія сжимаются отъ слабѣйшаго усилія, а расширяются отъ малѣйшаго уменьшенія давленія. Законы сгущенія и расширенія воздухообразныхъ жидкостей открыты *Маріоттомъ*; они легко могутъ быть доказаны и посредствомъ вычисленія. Отсылаемъ по сему предмету къ 12 книгѣ V тома *Небесной Механики* Лапласа.

Ежели станемъ постепенно возвышать температуру газа, подверженнаго опредѣленному давленію, то объёмъ его будетъ увеличиваться, и это увеличеніе объясняется самымъ естественнымъ образомъ, принявъ въ соображеніе приращеніе количества теплорода и отталкивающее дѣйствіе между атомами этого вещества. Для аналитическаго доказательства закона расширенія газовъ отъ теплоты, открытаго *Ге-Люссакомъ* и *Дальтономъ*, отсылаемъ къ 12 книгѣ V тома упомянутой выше *Небесной Механики*. Въ статьѣ AÉRIFORME (FLUIDE) нашего Лексикона, читатели найдутъ формулу, выражающую этотъ законъ.

CORPUSCULAIRE. (Физ.) **ЧАСТИЧНЫЙ.** Смот. MOLÉCULAIRE.

CORPUSCULE. (Физ.) **ЧАСТИЦА.** Смот. MOLÉCULE, CORPS.

CORRECTION. (Анал.) **ПОПРАВКА.** Количество прибавляемое къ какой нибудь величинѣ для уточненія сей послѣдней. *Petite correction, малая поправка.* Смот. APPROCHÉE (VALEUR), CARRÉS (MÉTHODE DES MOINDRES), AVANTAGEUX (RÉSULTATS LES PLUS).

CORRÉLATION. СООТНОШЕНІЕ. Взаимное отношеніе. *Corrélation des quantités, des figures; соотношеніе количествъ, фигуръ.*

CORRESPONDANCE. СООТВѢТСТВЕННОСТЬ.

CORRESPONDANT. СООТВѢТСТВЕННЫЙ, СООТВѢТСТВУЮЩІЙ, ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ. *Angles correspondants; соотвѣтственные углы.* Смот. ANGLE.

CORRESPONDANTES (MÉTHODE DES HAUTEURS). (Астр.) **СПОСОБЪ СООТВѢТСТВЕННЫХЪ ВЫСОТЪ.** Смот. HAUTEURS.

CORRIGER. (Анал.) **ИСПРАВИТЬ.–УТОЧНИТЬ.** Смот. CORRECTION.

COSA. (Алг.) Такъ называли Италіанскіе Алгебристы *неизвѣстную, искомую* величину въ алгебрическомъ уравненіи. — Это самое слово употреблялось также иногда для означенія *коэффиціента* у первой степени неизвѣстной въ алгебрическомъ уравненіи; и такъ, число 7 въ уравненіи $x^3+7x-5=0$, называлось *cosa* или еще *res*.

COSÉCANTE. (Триг.) **КОСЕКАНСЪ.** Косекансомъ какого ни есть угла называется секансъ дополненія того угла къ 90°. И такъ, косекансъ 30° есть не иное что, какъ секансъ 60°. Смот. SÉCANTE.

COSINUS. (Триг.) **КОСИНУСЪ.** Косинусъ угла есть синусъ дополненія того угла къ 90°. И такъ, косинусъ 30° равняется синусу 60°. Смот. SINUS, TRIGONOMÉTRIE.

COSINUS-VERSE. (Триг.) **КОСИНУСЪ-ВЕРСУСЪ** или **ОБРАЩЕННЫЙ КОСИНУСЪ.** Косинусъ-версусъ какого нибудь угла есть синусъ-версусъ дополненія того угла къ 90°. – Иногда обращеннымъ косинусомъ называютъ разность между діаметромъ и обращеннымъ синусомъ. Смот. SINUS-VERSE.

COSMIQUE. (Астр.) **КОСМИЧЕСКІЙ.** Когда звѣзда восходитъ или заходитъ вмѣстѣ съ солнцемъ, то восхожденіе или захожденіе той звѣзды называется *космическимъ*.

COSMOGONIE. КОСМОГОНІЯ. Наука имѣющая предметомъ изслѣдованія объ образованіи міра.

COSMOGRAPHIE. (Отъ Греч. *κοσμος*, міръ и *γραφω*, *пишу*.) **КОСМОГРАФІЯ, МІРООПИСАНІЕ.** Наука описывающая видъ міра, его величину, взаимное положеніе и отношеніе составляющихъ его частей, и предлагающая способы для изображенія сихъ послѣднихъ на планѣ. Изслѣдованія Космографіи распространяются и на движенія небесныхъ тѣлъ: но преимущественно эта наука разсматриваетъ состояніе земнаго шара, его положеніе въ отношеніи къ другимъ небеснымъ тѣламъ, общее его раздѣленіе и измѣреніе, причину увеличивающейся и уменьшающейся долготы дня, перемѣну временъ года и атмосферу земли. Однимъ словомъ, Космографія есть часть Физики, разсуждающая о всеобщей системѣ міра, и въ особенности о землѣ; въ этомъ смыслѣ, она обнимаетъ Астрономію и Географію.

COSMOLABE. КОСМОЛЯБІЯ. Астрономическій инструментъ, очень похожій на *астролябію*. Космолябію употребляли прежде для наблюденія высотъ свѣтилъ и для изображенія круговъ небесной сферы; она давно уже оставлена астрономами.

COSMOLOGIE. (Отъ Греч. *κοσμος*, *міръ* и *λόγος*, *слово*). **КОСМОЛОГІЯ, МІРОСЛОВІЕ, МІРОЗНАНІЕ.** Наука, имѣющая предметомъ изученіе міра. Собственно говоря, Космологія есть общая, умозрительная Физика. Но она не входитъ въ подробный разборъ фактовъ, а разсматриваетъ только выводимые изъ нихъ результаты со стороны метафизической, показываетъ аналогію и взаимную связь, существующую между ними, и потомъ, посредствомъ сихъ данныхъ, старается открыть общіе законы, управляющіе міромъ.

COSSIQUES (NOMBRES). Не упот. (Ариѳ. и Алг.) Такъ назывались *численные корни уравненій* въ старыхъ сочиненіяхъ объ Алгебрѣ. Впослѣдствіи подъ симъ наименованіемъ стали разумѣть *ирраціональныя числа*, потому, что корни алгебрическаго уравненія часто бываютъ *ирраціональные*. И въ этомъ смыслѣ слово *cossique* совсѣмъ вышло изъ употребленія.

COTANGENTE. (Триг.) **КОТАНГЕНСЪ.** Котангенсъ какого нибудь угла, есть тангенсъ дополненія того угла къ 90^0. И такъ, котангенсъ 30^0 равняется тангенсу 60^0. Смот. TANGENTE.

COTE. (Нивел.) **ВЫСОТА.** Высота нивеллируемой точки надъ горизонтальною плоскостію.

COTÉ. (Геом.) **СТОРОНА, БОКЪ.** Стороною фигуры называется всякая прямая линія, составляющая часть очертанія этой самой фигуры. *Côté d'un triangle, d'un pentagône; сторона треугольника, пятиугольника.* — Иногда подъ симъ словомъ разумѣютъ *грань* какого нибудь тѣла, напримѣръ куба и проч.; но въ этомъ смыслѣ преимущественно употребляютъ слово FACE (Смот.).

CÔTÉ D'UN TRIANGLE SPHÉRIQUE. БОКЪ, СТОРОНА, СФЕРИЧЕСКАГО ТРЕУГОЛЬНИКА. Смот. TRIANGLE SPHÉRIQUE.

COTÉ. (Ариѳ. и Алг.) **СТОРОНА.** *Стороною* фигурнаго числа называется число членовъ ариѳметической прогрессіи, коей сумма изображаетъ данное фигурное число. И такъ, *сторона* треугольнаго числа 15 есть 5, ибо $1+2+3+4+5=15$, и вообще n будетъ стороною треугольнаго числа $\frac{n(n+1)}{2}$. Квадратное число 49 имѣетъ стороною число 7; пятиугольное 92, изображающее сумму ариѳметической прогрессіи $1+4+7+10+13+16+19+22$, имѣетъ стороною 8, и такъ далѣе. Смот. FIGURÉS (NOMBRES). — Иногда сторонами предложеннаго числа называются множители, изъ которыхъ оно составлено; и такъ, стороны числа 30 суть 2, 3 и 5, или 2 и 15, или 3 и 10 или наконецъ 5 и 6.

COTES (THÉORÊME DE). (Геом. и Анал.) **ТЕОРЕМА КОТЕСА.** Теорема, удержавшая имя своего изобрѣтателя Англійскаго математика *Котеса*, родившагося въ 1682 году, а умершаго въ 1716. Эта теорема состоитъ въ слѣдующемъ свойствѣ круга: Положимъ, что радіусомъ $OA=r$ (черт. 1 Листъ VI) описали окружность круга, которую потомъ раздѣлили на чётное число $2n$ равныхъ частей (на чертежѣ $2n=10$). Пусть будутъ $A, a, B, b, C, c, D, d, E, e\ldots$ точки дѣленія. Возьмемъ на діаметрѣ Ac произвольную точку P, и положимъ $OP=a$. Соединивъ точку P съ точками дѣленія $A, a, B, b, \ldots\ldots$ окажется, что разность степеней

$$(1)\qquad r^n-a^n=\overline{PA}\times\overline{PB}\times\overline{PC}\times\overline{PD}\times\overline{PE}\times\ldots.$$

а сумма ихъ

$$(2)\qquad r^n+a^n=\overline{Pa}\times\overline{Pb}\times\overline{Pc}\times\overline{Pd}\times\overline{Pe}\times\ldots..$$

Уравненія (1) и (2) заключаютъ въ себѣ аналитическое выраженіе *Котесовой теоремы*.

Если точка P будетъ находиться внѣ круга па продолженномъ діаметрѣ cA, напримѣръ въ P', то въ уравн. (1) надобно будетъ замѣнить разность r^n-a^n разностію a^n-r^n; второе же уравненіе не измѣнится въ своемъ видѣ.

Французскій математикъ *Моавръ* (*Moivre*) распространилъ эту теорему на тотъ случай, когда вмѣсто двучленнаго выраженія $r^n \pm a^n$ разсматривается трехчленное $r^{2n}-2a^nr^n \, Cos\alpha + a^{2n}$. Вотъ въ чемъ состоитъ *теорема Моавра*: Радіусомъ $OA=r$, описываемъ кругъ ACE (черт. 2 Листъ VI); беремъ дугу $AM=\alpha$, и откладываемъ отъ точки A дугу $AB=\frac{\alpha}{n}$, разумѣя подъ n какое ни есть цѣлое число (на чертежѣ $n=5$).

Отъ точки B раздѣляемъ окружность на n равныхъ частей; пусть будутъ C, D, E, F..... точки дѣленія, такъ что дуги BC, CD, DE, EF..... равны между собою, и каждая изъ нихъ $=\frac{2\pi}{n}$. На радіусѣ OA (или на его продолженіи) беремъ произвольную точку P (или P'); пусть будетъ $PO=a$. Соединивъ точку P съ каждою изъ точекъ дѣленія B, C, D, E, F..... докажется, что трехчленное количество

$$r^{2n}-2a^nr^n \, Cos\alpha + a^{2n} = \overline{PB}^2 \times \overline{PC}^2 \times \overline{PD}^2 \times \overline{PE}^2 \times \overline{PF}^2 \times \ldots .$$

Свойство круга, выражаемое этою формулою, составляетъ *теорему Моавра*, изъ которой легко вывести предложеніе Котеса. Дѣйствительно, принявъ $AM=\alpha=\pi$, получимъ $cos\alpha=-1$, слѣдовательно

$$r^{2n}+2a^nr^n+a^{2n}=(r^n+a^n)^2$$
$$=\overline{PB}^2 \times \overline{PC}^2 \times \overline{PD}^2 \times \overline{PE}^2 \times \overline{PF}^2 \times \ldots .$$

или

$$(a) \quad r^n+a^n=\overline{PB} \times \overline{PC} \times \overline{PD} \times \overline{PE} \times \overline{PF} \times \ldots .$$

Полагая же $\alpha=o$, будетъ $cos\alpha=1$, и точка B совпадетъ съ точкою A, которая слѣдовательно будетъ первою точкою дѣленія. И такъ, получимъ (черт. 1)

$$r^{2n}-2a^nr^n+a^{2n}=(r^n-a^n)^2$$
$$=\overline{PA}^2 \times \overline{PB}^2 \times \overline{PC}^2 \times \overline{PD}^2 \times \overline{PE}^2 \times \ldots .$$

или

$$(b) \qquad \pm(r^n-a^n)=\overline{PA} \times \overline{PB} \times \overline{PC} \times \overline{PD} \times \overline{PE} \times \ldots$$

Сличеніе уравненій (*a*) и (*b*) съ уравненіями (2) и (1), выражающими теорему Котеса, покажетъ намъ, что они однозначущи между собою.

Для доказательства теоремы Моавра, выведемъ сперва слѣдующее предложеніе, которое, хотя несвойственно, но также называется иногда теоремою Моавра:

Теорема. *Для возвышенія мнимаго количества*

$$Cos\varphi \pm Sin\varphi . \sqrt{-1}$$

въ степень m, стоитъ только перемѣнить въ немъ φ на mφ; и такъ получимъ

$$(Cos\varphi \pm Sin\varphi . \sqrt{-1})^m = Cosm\varphi \pm Sinm\varphi . \sqrt{-1}.$$

Доказательство. Изобразимъ чрезъ $\varphi, \varphi', \varphi''$... различныя дуги, и перемножимъ между собою выраженія

$$Cos\varphi \pm Sin\varphi . \sqrt{-1}, \; Cos\varphi' \pm Sin\varphi' . \sqrt{-1}, \; Cos\varphi'' \pm Sin\varphi'' . \sqrt{-1} \ldots$$

найдемъ послѣдовательно

$$(Cos\varphi \pm Sin\varphi . \sqrt{-1}) \; (Cos\varphi' \pm Sin\varphi' \sqrt{-1})$$
$$=Cos\varphi . Cos\varphi' - Sin\varphi . Sin\varphi' \pm (Sin\varphi . Cos\varphi' + Cos\varphi . Sin\varphi') \sqrt{-1}$$
$$= Cos(\varphi+\varphi') \pm Sin(\varphi+\varphi') . \sqrt{-1}.$$
$$[Cos(\varphi+\varphi') \pm Sin(\varphi+\varphi') \sqrt{-1}][Cos\varphi'' \pm Sin\varphi'' \sqrt{-1}]$$
$$= Cos(\varphi+\varphi') . Cos\varphi'' - Sin(\varphi+\varphi') . Sin\varphi''$$
$$\pm [Sin(\varphi+\varphi') . Cos\varphi'' + Cos(\varphi+\varphi') . Sin\varphi''] \sqrt{-1}$$
$$= Cos(\varphi+\varphi'+\varphi'') \pm Sin(\varphi+\varphi'+\varphi'') . \sqrt{-1}.$$

Отсюда заключаемъ, что при какомъ ни есть числѣ m дугъ $\varphi, \varphi', \varphi''$....., будетъ

$$(Cos\varphi \pm Sin\varphi . \sqrt{-1})(Cos\varphi' \pm Sin\varphi' . \sqrt{-1})(Cos\varphi'' \pm Sin\varphi'' . \sqrt{-1}) \ldots$$
$$= Cos(\varphi+\varphi'+\varphi''+\ldots) \pm Sin(\varphi+\varphi'+\varphi''+\ldots)\sqrt{-1};$$

положивъ $\varphi=\varphi'=\varphi''=$....., найдется формула

$$(Cos\varphi \pm Sin\varphi . \sqrt{-1})^m = Cosm\varphi \pm Sinm\varphi \sqrt{-1}.$$

Это самое предложеніе можно распространить и на случай отрицательнаго показателя m; дѣйствительно, такъ какъ

$$(Cos\varphi \pm Sin\varphi . \sqrt{-1})^{-m} = \frac{1}{(Cos\varphi \pm Sin\varphi . \sqrt{-1})^m}$$
$$= \frac{1}{Cosm\varphi \pm Sinm\varphi . \sqrt{-1}},$$

то помноживъ на $Cosm\varphi \mp Sinm\varphi . \sqrt{-1}$ числителя и знаменателя послѣдней дроби, и наблюдая что $Cos^2m\varphi + Sin^2m\varphi = 1$, получимъ

$$(Cos\varphi \pm Sin\varphi . \sqrt{-1})^{-m} = Cosm\varphi \mp Sinm\varphi \sqrt{-1};$$

но $Cos(-m\varphi)=Cosm\varphi$ а $Sin(-m\varphi)=-Sinm\varphi$; слѣдовательно

$$(Cos\varphi \pm Sin\varphi . \sqrt{-1})^{-m} = Cos(-m\varphi) \pm Sin(-m\varphi) . \sqrt{-1},$$

что и имѣли въ виду доказать *).

*) Легко доказать предложеніе, о которомъ говоримъ для какого ни есть показателя m. Пусть будетъ

$$y = Cosx \pm Sinx . \sqrt{-1};$$

диференцируя это выраженіе, получимъ

$$dy = - Sinx . dx \pm Cosx . dx \sqrt{-1}$$
$$= \pm dx \sqrt{-1} \; (Cosx \pm Sinx . \sqrt{-1}) = \pm ydx \sqrt{-1};$$

Обратимся теперь къ теоремѣ Моавра; легко видѣть, что

$$r^{2n}-2a^nr^n\,Cos\alpha+a^{2n}$$
$$=[r^n-a^n(Cos\alpha+Sin\alpha.\sqrt{-1})]\,[r^n-a^n(Cos\alpha-Sin\alpha.\sqrt{-1})].$$

Если уравнимъ нулю каждый изъ двухъ множителей $r^n-a^n\,(Cos\alpha+Sin\alpha.\sqrt{-1})$ и......... $r^n-a^n\,(Cos\alpha-Sin\alpha.\sqrt{-1})$, то получимъ два уравненія; изъ перваго выведемъ

$$r=a(Cos\alpha+Sin\alpha\cdot\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}(1)^{\frac{1}{n}}=a(Cos\tfrac{a}{n}+Sin\tfrac{a}{n}\cdot\sqrt{-1})(1)^{\frac{1}{n}}.$$

Но $(1)^{\frac{1}{n}}=Cos\frac{2k\pi}{n}\pm Sin\frac{2k\pi}{n}\cdot\sqrt{-1}$ [Смот. BINOMES (ÉQUATIONS)], гдѣ k изображаетъ цѣлыя числа 1, 2, 3,.... до ближайшаго цѣлаго къ $\frac{n}{2}$. Слѣдовательно

$$r=a\,(Cos\tfrac{a}{n}+Sin\tfrac{a}{n}.\sqrt{-1})(Cos\tfrac{2k\pi}{n}+Sin\tfrac{2k\pi}{n}.\sqrt{-1})$$
$$=(Cos\frac{a+2k\pi}{n}+Sin\frac{a+2k\pi}{n}\cdot\sqrt{-1}).$$

Второй изъ двухъ множителей доставляетъ

$$r=a\,(Cos\tfrac{a}{n}-Sin\tfrac{a}{n}.\sqrt{-1})(Cos\tfrac{2k\pi}{n}-Sin\tfrac{2k\pi}{n}\cdot\sqrt{-1})$$
$$=a\,(Cos\frac{a+2k\pi}{n}-Sin\frac{a+2k\pi}{n}\cdot\sqrt{-1}),$$

и вообще будетъ

$$r=a\,(Cos\frac{a\pm2k\pi}{n}\pm Sin\frac{a\pm2k\pi}{n}\cdot\sqrt{-1}).$$

И такъ, трехчленное выраженіе

$$r^{2n}-2a^nr^n\,Cos\alpha+a^{2n}$$

будетъ разлагаться на множители вида

$$r-a\,Cos\frac{a\pm2k\pi}{n}-a\,Sin\frac{a\pm2k\pi}{n}\cdot\sqrt{-1}$$

и $$r-a\,Cos\frac{a\pm2k\pi}{n}+a\,Sin\frac{a\pm2k\pi}{n}\cdot\sqrt{-1}.$$

а слѣдовательно и на вещественные множители второй степени

$$\left(r-a\,Cos\frac{a\pm2k\pi}{n}-a\,Sin\frac{a\pm2k\pi}{n}\cdot\sqrt{-1}\right)\times$$
$$\left(r-a\,Cos\frac{a\pm2k\pi}{n}+a\,Sin\frac{a\pm2k\pi}{n}\cdot\sqrt{-1}\right)$$
$$=r^2-2ar\,Cos\frac{a\pm2k\pi}{n}+a^2.$$

И такъ, въ слѣдствіе сказаннаго, получимъ:

$$r^{2n}-2a^nr^nCos\alpha+a^{2n}=(r^2-2ar\,Cos\tfrac{a}{n}+a^2)\times$$
$$(r^2-2ar\,Cos\frac{a+2\pi}{n}+a^2)\times$$
$$(r^2-2ar\,Cos\frac{a+4\pi}{n}+a^2)\times$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(r^2-2ar\,Cos\frac{a+(n-1)2\pi}{n}+a^2).$$

Но такъ какъ, по предположенію, дуга $AB=\frac{a}{n}$, а каждая изъ дугъ $BC, CD, DE, EF, FB\ldots$ равна $\frac{2\pi}{n}$, то изъ треугольниковъ PBO, PCO, PDO, PEO, PFO... выводимъ

$$\overline{PB}^2=r^2+a^2-2ar\,Cos\tfrac{a}{n}$$
$$\overline{PC}^2=r^2+a^2-2ar\,Cos\frac{a+2\pi}{n}$$
$$\overline{PD}^2=r^2+a^2-2ar\,Cos\frac{a+4\pi}{n}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\overline{PF}^2=r^2+a^2-2ar\,Cos\frac{a+(n-1)2\pi}{n}.$$

Слѣдовательно, произведеніе квадратовъ линій PB, PC, PD.... PF (черт. 2) будетъ равняться трехчленному выраженію $r^{2n}-2a^nr^n\,Cos\alpha+a^{2n}$, въ чемъ и состоитъ *теорема Моавра*.

COUCHANT, Occident или Ouest. (Астр.) **ЗАКАТЪ**, Западъ, Вестъ.

COUCHER d'un astre. (Астр.) **ЗАХОЖДЕНІЕ** свѣтила.

COUCHES DE NIVEAU. (Гидрост.) **УРОВЕННЫЕ СЛОИ.** Возьмемъ общее уравненіе равновѣсія жидкихъ тѣлъ (Смот. HYDROSTATIQUE)

$$dp=\varrho(Xdx+Ydy+Zdz),$$

въ которомъ p изображаетъ давленіе на единичную площадь въ точкѣ, опредѣляемой координатами x, y, z, ϱ плотность жидкости, а X, Y, Z ускорительныя силы, параллельныя тремъ координатнымъ осямъ, и приложенныя къ разсматриваемой точкѣ. Выраженіе $Xdx+Ydy+Zdz$ для силъ притягательныхъ и отталкивающихъ направляющихся къ неподвижнымъ центрамъ, и зависящихъ отъ разстояній къ этимъ центрамъ есть полный дифференціалъ. И такъ, въ этомъ

слѣдовательно

$$\frac{dy}{y}=\pm dx\,\sqrt{-1};$$

интегрируя это выраженіе, и наблюдая, что для $x=o$ должно быть $y=1$, найдемъ

$$log y=\pm x\sqrt{-1},\ \text{откуда}\ y=e^{\pm x\sqrt{-1}}.$$

И такъ

$$e^{\pm x\sqrt{-1}}=Cosx\pm Sinx.\sqrt{-1}.$$

Измѣнивъ въ этой формулѣ x въ mx, получимъ

$$e^{\pm mx\sqrt{-1}}=(e^{\pm x\sqrt{-1}})^m$$
$$=(Cosx\pm Sinx.\sqrt{-1})^m=Cosmx\pm Sinmx.\sqrt{-1},$$

гдѣ m изображаетъ какое угодно число.

случаѣ, къ которому относится бо́льшая часть извѣстныхъ намъ силъ въ природѣ, будетъ

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\varphi(x,y,z),$$

разумѣя подъ $\varphi(x,y,z)$ нѣкоторую опредѣленную функцію перемѣнныхъ x, y, z.

Если примемъ теперь въ разсмотрѣніе всѣ системы величинъ x, y, z, для которыхъ функція $\varphi(x,y,z)$ сохраняетъ одну и ту же величину c, то очевидно, что эти системы опредѣлятъ такую поверхность, для которой будетъ $d\varphi(x,y,z) = o$. И такъ, если поверхность, опредѣляемая уравненіемъ $\varphi(x,y,z) = c$, проходитъ сквозь жидкость, то для всѣхъ точекъ этой поверхности, находящихся внутри разсматриваемой жидкой массы, будетъ $Xdx + Ydy + Zdz = o$, а это уравненіе показываетъ, что равнодѣйствующая силъ X, Y, Z имѣетъ направленіе нормальное къ сей самой поверхности; вотъ почему сія послѣдняя называется *уровенною*.

Легко видѣть, что существуетъ безчисленное множество уровенныхъ поверхностей, и всѣ онѣ опредѣляются общимъ уравненіемъ $\varphi(x,y,z) = c$; одна поверхность отличается отъ другой только величиною постояннаго количества c, которое для одной поверхности имѣетъ опредѣленное значеніе, а при переходѣ къ другой, перемѣняется. Что касается до дифференціальнаго уравненія $Xdx + Ydy + Zdz = o$ уровенныхъ поверхностей, то, по причинѣ его независимости отъ c, оно принадлежитъ всѣмъ имъ, и показываетъ, что равнодѣйствующая силъ X, Y, Z въ какой ни есть точкѣ, нормальна къ уровенной поверхности, проходящей чрезъ разсматриваемую точку. Двѣ смежныя уровенныя поверхности, то есть такія, которыя соотвѣтствуютъ двумъ величинамъ c безконечно мало разнствующимъ между собою, ограничиваютъ безконечно тонкій слой, называемый *уровеннымъ*. Очевидно, что вся жидкая масса можетъ быть раздѣлена на безчисленное множество уровенныхъ слоевъ поверхностями, опредѣляемыми уравненіемъ $\varphi(x,y,z) = c$, гдѣ количеству c приписываются всѣ значенія, для которыхъ упомянутыя поверхности встрѣчаютъ жидкую массу. Легко видѣть, что въ тяжелыхъ жидкостяхъ уровенные слои *горизонтальны*. Когда всѣ частицы жидкой массы подвержены дѣйствію притягательной силы, направляющейся къ неподвижной точкѣ, то уровенные слои будутъ *сферическіе*, и вмѣстѣ съ тѣмъ одноцентренные; ихъ общій центръ совпадетъ съ центромъ притяженія.

Обратимся опять къ уравненію

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz);$$

положивъ въ немъ $Xdx + Ydy + Zdz = d\varphi$, получимъ

$$dp = \rho d\varphi.$$

Для интегрируемости этого уравненія, надобно чтобы плотность ρ была функціею величины φ, въ слѣдствіе чего и давленіе p будетъ функціею той же величины φ; сверхъ того, такъ какъ для опредѣленнаго уровеннаго слоя количество c есть постоянное, то отсюда заключаемъ, что плотность и давленіе жидкости, во всемъ протяженіи каждаго уровеннаго слоя, постоянны, въ чемъ и состоитъ отличительное свойство уровенныхъ слоевъ.

Нѣкоторые авторы называютъ *уровенными поверхностями* тѣ, которыя опредѣляются дифференціальнымъ уравненіемъ $dp = o$. Конечное уравненіе ихъ будетъ $p = c$, гдѣ c сохраняетъ одну и ту же величину для всѣхъ точекъ опредѣленной поверхности, а измѣняется при переходѣ отъ одной поверхности къ другой. Это опредѣленіе уровенныхъ поверхностей согласуется съ предложеннымъ выше только въ томъ случаѣ, когда выраженіе $Xdx + Ydy + Zdz$ есть полный дифференціалъ; и дѣйствительно, въ противномъ случаѣ, плотность ρ уже не будетъ постоянна для одного и того же уровеннаго слоя. Поверхности, выражаемыя уравненіемъ $p = c$ кажется лучше назвать *поверхностями равнаго давленія* (*surfaces d'égale pression*); сіи послѣднія не будутъ отличаться отъ уровенныхъ въ томъ случаѣ, когда $Xdx + Ydy + Zdz$ изобразитъ полный дифференціалъ, а это справедливо для бо́льшей части вопросовъ изъ Естественной Философіи. Но когда выраженіе $Xdx + Ydy + Zdz$ не есть полный дифференціалъ, то поверхности равнаго давленія существенно отличны отъ уровенныхъ.

COUDE. (Мех.) **КОЛѢНО.** — Колѣнчатая, согнутая труба. *Levier coudé*; *колѣнчатый рычагъ*. Такъ называется рычагъ, состоящій изъ двухъ частей или плечъ, которыя составляютъ между собою уголъ, отличный отъ двухъ прямыхъ. За точку подпоры обыкновенно принимаютъ ту точку, въ которой плечи колѣнчатаго рычага соединяются. Смот. LEVIER.

COULEUR. (Физ.) **ЦВѢТЪ.** Цвѣтъ обыкновенно опредѣляютъ *впечатлѣніемъ, производимымъ на органъ зрѣнія дѣйствіемъ свѣта.* Смот. LUMIÈRE.

Нѣкоторыя изъ главныхъ свойствъ свѣта, какъ то: отражаемость и преломляемость его лучей, теплота, обнаруживающаяся въ фокусѣ выпуклаго стекла, когда посредствомъ него собираютъ солнечные лучи и проч. были уже давно извѣстны. Но ни одинъ изъ древнихъ естествоиспытателей не оставилъ истиннаго объясненія *цвѣтовъ*, основаннаго на опытахъ, хотя многіе философы, въ томъ числѣ *Эпикуръ, Эмпедоклъ, Платонъ, Зенонъ, Аристотель,* и предлагали разныя умозрѣнія. Сія теорія находилась въ самомъ жалкомъ состояніи до *Декарта,* который первый предложилъ ипотезу, хотя еще весьма несовершенную, но по справедливости заслужившую вниманіе современныхъ физиковъ. Декартъ полагалъ, что свѣтъ состоитъ изъ частицъ сферическаго вида, имѣющихъ два движенія, одно, вращательное около своихъ центровъ, а другое, поступательное; различіе цвѣтовъ, по его мнѣнію, происходитъ отъ взаимнаго отношенія сихъ двухъ движеній. Когда вращательное движеніе частицъ свѣта значительно превосходитъ поступательное, то видимъ *красный цвѣтъ*; съ уменьшеніемъ разности между скоростями двухъ движеній, красный цвѣтъ постепенно переходитъ въ *желтый.* Когда же скорость вращательнаго движенія будетъ нѣсколько менѣе скорости поступательнаго, то обнаруживается *зеленый цвѣтъ,* который, съ ускореніемъ поступательнаго движенія, переходитъ въ *синій,* и такъ далѣе.

Послѣ Декарта нѣкоторые другіе физики занимались теоріею цвѣтовъ; но попытки ихъ не имѣли никакого особеннаго успѣха.

Знаменитый *Нютонъ* тридцать лѣтъ обдумывалъ теорію свѣта, и въ продолженіи этого времени производилъ многочисленные опыты. Наконецъ, въ 1706 году, онъ издалъ свою Оптику; въ этомъ безсмертномъ твореніи онъ предложилъ теорію цвѣтовъ, которая, до нашего времени, была принята всѣми физиками. Мы приведемъ здѣсь вкратцѣ главные опыты Нютона надъ разсѣяніемъ свѣта и главныя слѣдствія, которыя онъ вывелъ изъ нихъ.

Въ тёмной комнатѣ *ABCD* (черт. 3, Листъ VI), сквозь круглое отверстіе *O*, сдѣланное въ ставнѣ окна, Нютонъ пропустилъ кисть солнечнаго свѣта, которую, въ нѣсколькихъ футахъ отъ отверстія, принялъ на стеклянную треугольную призму *P*, установленную такъ, что одна грань ея была горизонтальна. Лучи свѣта, проходя сквозь призму, преломляются два раза: въ первый разъ, при вхожденіи въ нее, а во второй разъ, при выхожденіи, и оба раза направленія ихъ подымаются. При такомъ опытѣ Нютонъ усмотрѣлъ, что кисть свѣта, при выходѣ изъ призмы, принимаетъ видъ опахала, какъ означено на чертежѣ фигурою *abc*; принявъ преломленный призмою свѣтъ на бѣлую стѣну или щитъ *QR* въ разстояніи около 15 футовъ отъ призмы, онъ увидѣлъ одно изъ примѣчательнѣйшихъ оптическихъ явленій — яркую радужную полосу *bc*, сверху и снизу округленную, а съ боковъ примѣтнымъ образомъ ограниченную двумя параллельными линіями. Длина полосы была около пяти разъ болѣе поперечной ея ширины. Цвѣтное изображеніе, о которомъ говоримъ, называется *солнечнымъ призракомъ* (*spectre solaire*); на немъ усматриваются семь главныхъ или *первоначальныхъ цвѣтовъ* (*couleurs primitives*); эти цвѣта идутъ одинъ за другимъ въ слѣдующемъ порядкѣ: *красный, оранжевый, желтый, зеленый, голубой, синій и фіолетовый,* при чемъ красный цвѣтъ занимаетъ нижнюю часть изображенія, а фіолетовый верхнюю. Пространство, занимаемое каждымъ изъ сихъ цвѣтовъ, не могло быть опредѣлено совершенно точнымъ образомъ, потому что цвѣта переходили постепенно отъ одного къ другому чрезъ всѣ послѣдовательные оттѣнки. Послѣ этого, Нютонъ производилъ слѣдующій опытъ: сквозь небольшую скважину, сдѣланную въ щитѣ *QR*, онъ пропустилъ только одинъ цвѣтной лучъ, напримѣръ красный, и принялъ его на другую стеклянную призму; этотъ лучъ, по преломленіи, не разлагался на другіе, а оставался постоянно краснымъ; то же самое случилось и съ другими цвѣтными лучами: каждый изъ нихъ, по преломленіи, сохранилъ свой цвѣтъ. Нютонъ подвергалъ также каждый изъ лучей нѣсколькимъ преломленіямъ посредствомъ многихъ призмъ, и во всѣхъ случаяхъ цвѣтъ луча не перемѣнялся.

Вотъ третій опытъ: на нѣкоторомъ разстояніи отъ призмы P, Нютонъ собралъ посредствомъ выпуклаго стекла цвѣтной свѣтъ, и въ фокусѣ стекла получилъ солнечный или *бѣлый* свѣтъ.

Наконецъ, Нютонъ взялъ стеклянную призму, имѣющую основаніемъ прямоугольный треугольникъ. Перпендикулярно къ одной изъ ея мѣньшихъ сторонъ онъ принялъ солнечный лучъ, пропущенный въ тёмную компату сквозь небольшое отверстіе. Такимъ образомъ въ 5 или 6 футахъ отъ призмы онъ получилъ на бѣломъ щитѣ цвѣтное изображеніе, на которомъ цвѣта были расположены въ обыкновенномъ ихъ порядкѣ. Обращая потомъ призму около ея оси, онъ замѣтилъ, что когда направленіе солнечнаго луча составляетъ съ бо̀льшею стороною призмы уголъ мало разнствующій отъ 50 градусовъ, то въ цвѣтномъ изображеніи на щитѣ изчезаетъ фіолетовый цвѣтъ, который показывается въ другомъ мѣстѣ комнаты; продолжая поворачивать призму онъ усмотрѣлъ, что послѣ фіолетоваго цвѣта изчезаетъ синій, потомъ голубой, и такъ далѣе, и наконецъ красный.

Изъ сихъ главныхъ и многихъ другихъ второстепенныхъ опытовъ, Нютонъ вывелъ слѣдующія заключенія:

1°. Свѣтъ не есть простое однородное вещество, но разлагается на *семь* разнородныхъ цвѣтныхъ лучей съ безчисленными ихъ оттѣнками.

2°. Первоначальныя цвѣта̀ не разлагаются.

3°. Отъ соединенія первоначальныхъ семи цвѣтовъ происходитъ *бѣлый*.

4°. Ощущеніе такъ называемаго *чернаго цвѣта* происходитъ отъ отсутствія всякаго цвѣта. И такъ, тѣло кажется намъ *чернымъ*, когда оно не отражаетъ никакихъ лучей свѣта.

5°. Отраженіе одного первоначальнаго луча есть причина первоначальнаго цвѣта, замѣчаемаго нами въ тѣлахъ. И такъ, если поверхность какого нибудь тѣла отражаетъ только *красные лучи*, то это тѣло покажется намъ совершенно краснымъ.

6°. *Второстепенные* или *составные цвѣта̀* (*couleurs secondaires* или *composées*) происходятъ отъ совокупленія первоначальныхъ по̀-два, по̀-три и проч. Такъ напримѣръ, если поверхность тѣла отражаетъ лучи *желтые* и *голубые*, то она покажется намъ *зеленою*. Различіе между *составнымъ* и *первоначальнымъ зеленымъ цвѣтомъ* состоитъ въ томъ, что первый посредствомъ призмы разложится на первоначальные цвѣта: желтый и голубой, между тѣмъ какъ первоначальный зелёный цвѣтъ, подверженный сколькимъ угодно преломленіямъ, останется всегда зелёнымъ.

7°. Бѣлый солнечный свѣтъ разлагается посредствомъ преломленія на разноцвѣтные лучи, и каждому цвѣтному лучу соотвѣтствуетъ особый показатель преломленія, который зависитъ отъ природы преломляющей средины. Наиболѣе преломляющійся лучъ есть *фіолетовый*, наименѣе — *красный*; *зеленый* лучъ, по преломляемости своей, занимаетъ середину между фіолетовымъ и краснымъ. Смот. RÉFRACTION (RAPPORT DE).

Вотъ самый краткій очеркъ теоріи разложенія свѣта, предложенной Нютономъ. При объясненіи сей теоріи, онъ допускалъ, что свѣтъ есть особенная жидкость, истекающая изъ свѣтящихся тѣлъ. Въ наше время почти всѣ физики соглашаются въ томъ, что свѣтъ не есть особенная жидкость, но обнаруживается отъ сотрясенія атомовъ эфира. Объясненіе цвѣтовъ по *системѣ волненія* требуетъ подробнаго изложенія; желающіе ознакомиться съ этимъ предметомъ могутъ прибѣгнуть къ новѣйшимъ курсамъ Физики. Смот. также въ этомъ Лексиконѣ статьи: LUMIÈRE, ANNEAUX COLORÉS, ARC-EN-CIEL и проч.

COULEURS ACCIDENTELLES. Случайные цвѣта. Когда смотримъ пристально и довольно долго на какую либо окрашенную фигуру, напримѣръ на квадратикъ краснаго цвѣта, находящійся на бѣлой бумагѣ, то по прошествіи нѣкотораго времени увидимъ какъ около квадратика образуется родъ рамки, зеленаго цвѣта. Если перестанемъ смотрѣть на красное изображеніе, а обратимъ зрѣніе на другое мѣсто бѣлой бумаги, то усмотримъ въ томъ мѣстѣ точно такой величины квадратикъ свѣтло-зеленаго цвѣта. Этотъ мнимо зеленый цвѣтъ и называется *случайнымъ*. *Бюффонъ* производилъ много опытовъ надъ случайными цвѣтами; онъ подвергнулъ испытанію и другіе первоначальные цвѣта, и нашелъ слѣдующіе результаты:

Красный цвѣтъ производитъ *Зеленый случайный.*
Желтый . . . . *Голубой.*
Зеленый . . . . *Пурпуровый.*
Голубой . . . . *Красный.*
Черный . . . . *Бѣлый.*
Бѣлый . . . . *Черный.*

При послѣднемъ опытѣ предполагается, что бѣлый квадратикъ находится первоначально на черномъ полѣ.

Предложенныя физиками объясненія случайныхъ цвѣтовъ читатели найдутъ въ *Encyclopédie Méthodique, Mathématiques*, статья: Couleurs accidentelles и въ нѣкоторыхъ курсахъ Физики.

COULISSE или **RAINURE. ВЫЕМКА, ПАЗЪ, ДОЛЖЕЯ.**

COUP. (Мех.) **УДАРЪ.** Смот. CHOC. Въ Исчисленіи Вѣроятностей *coup* значитъ *разъ, пріёмъ, ударъ, бросаніе, игра.—Deux joueurs jouent à condition que celui qui gagne dix coups avant l'autre, gagne la partie; два игрока играютъ на условіи, что тотъ изъ нихъ, кто выиграетъ прежде десять игръ, выигрываетъ и партію. On suppose qu'à chaque coup il puisse arriver deux événements etc.; предполагается, что при каждомъ пріёмѣ, могутъ быть два случая* и проч.

COUP DE NIVEAU. ПРІЕМЪ НИВЕЛЛИРОВКИ. Говорится о цѣломъ разстояніи между двумя нивеллируемыми точками. Смот. NIVELLER.

COUP FOUDROYANT или Commotion électrique. **ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ СОТРЯСЕНІЕ.**

COUPE. (Геом.) **РАЗРѢЗЪ.** Слово преимущественно употребляемое въ Архитектурѣ, и вообще въ строительномъ искусствѣ. Въ Геометріи въ томъ же смыслѣ употребляютъ слово *сѣченіе.* Смот. SECTION.

COUPE DES PIERRES. РАЗРѢЗКА КАМНЕЙ. Прикладная часть Начертательной Геометріи, предлагающая правила для разложенія свода (или другаго каменнаго сооруженія) на *клинья* (*voussoirs*), также и способы, посредствомъ которыхъ каждому клину даютъ форму, опредѣляемую чертежомъ.

Для историческихъ подробностей о состояніи искусства Разрѣзки Камней, отсылаемъ къ предисловію книги: *Traité de Géométrie Descriptive, par M. Hachette*, 1822. Въ этомъ же сочиненіи читатели найдутъ и обстоятельное изложеніе правилъ сей науки. На Русскомъ языкѣ, руководствомъ по сему предмету можетъ служить книга: *Начальныя основанія разрѣзки камней*, соч. *Потье*, переведенная *Я. А. Севастьяновымъ*, и изданная вмѣстѣ съ Французскимъ текстомъ. Для подробнѣйшихъ же свѣдѣній въ этомъ искусствѣ, отсылаемъ читателей ко второй части сочиненія: *Cours élémentaire théorique et practique de construction, par Douliot.*

COUPE-CERCLE. КРУЖАЛО; циркуль для вырѣзыванія кружковъ; одна ножка его снабжена небольшимъ рѣзцомъ, а другая, обыкновенная. — Перка.

COUPÉE. (Геом.) **АБСЦИССА, ОТСѢЧЕННАЯ.** Смот. ABSCISSE.

COUPER. (Геом.) **ПЕРЕСѢЧЬ, ОТСѢЧЬ.** *Ces deux lignes se coupent; эти двѣ линіи пересѣкаются. Couper une portion de cône; отсѣчь часть конуса.*

COUPLE. (Мех.) **ПАРА СИЛЪ, ПАРА.** Такъ называется совокупность двухъ параллельныхъ силъ (P, $-P$) (черт. 4 Листъ VI) равныхъ между собою, дѣйствующихъ въ противныя стороны, и приложенныхъ къ неизмѣняемой линіи $\overline{AB}$.

Линія $\overline{ab}$, изображающая перпендикулярное разстояніе между направленіями двухъ силъ P и $-P$, называется *плечомъ пары* (*bras du couple*).

Для совершеннаго опредѣленія дѣйствія пары силъ, надобно знать 1°) ея величину, то есть, моментъ пары; 2°) ея направленіе, или, что всё равно, положеніе ея плоскости, и 3°) сторону вращательнаго движенія, которое она стремится произвести.

Моментомъ пары или *ея усиліемъ* (*moment du couple* или *énergie du couple*) называется произведеніе силы на плечо пары, то есть, $P \times \overline{ab}$.

Направленіе пары (*direction du couple*), или положеніе ея плоскости, опредѣляется перпендикуляромъ къ этой плоскости.

Для опредѣленія *стороны вращательнаго движенія* (*sens du mouvement de rotation*) предположимъ, что точка O, середина плеча $\overline{ab}$, дѣлается неподвижною. Очевидно, что въ такомъ случаѣ пара (P, $-P$) будетъ стремиться сообщить плечу $\overline{ab}$ вращательное движеніе около точки O. Чтобы различить сторону вращательнаго движенія вообразимъ изъ точки O перпендикуляръ къ плоскости пары, проведенный въ ту сторону, гдѣ зритель, находящійся въ надлежащемъ положеніи, увидѣлъ бы вращательное движеніе происходящимъ отъ лѣвой руки къ правой. Всѣ пары, для которыхъ перпендикуляры имѣютъ одинакія направленія, называются *содѣйствующими* (*couples de même sens*), а тѣ, для которыхъ перпендикуляры имѣютъ противуположныя направленія, именуются *противодѣйствующими* (*couples de sens opposés*) въ отношеніи къ первымъ, и содѣйствующими между собою.

Осью пары (*axe du couple*) называется линія, изображающая моментъ и направленіе пары, а иногда, одно только направленіе.

Равнодѣйствующею парою (*couple résultant*) двухъ или нѣсколькихъ другихъ именуется такая пара, которая совершенно замѣняетъ дѣйствіе *составляющихъ паръ* (*couples composants*).

Приведемъ главныя предложенія, относящіяся къ теоріи паръ.

1.) *Пара можетъ быть перенесена по произволенію въ своей плоскости, или въ плоскость ей параллельную, также и обращаема какъ угодно, лишь бы только не перемѣнили стороны ея дѣйствія, и соединили неизмѣняемымъ образомъ прежнее плечо съ новымъ.*

2.) *Пара можетъ быть замѣнена другою, содѣйствующею съ нею парою, и коей моментъ равенъ моменту первой.*

3.) *Сколько бы ни было паръ, и какое бы положеніе онѣ не имѣли, всегда возможно привести ихъ къ одной парѣ, которой легко опредѣлить какъ положеніе, такъ и моментъ.*

Для доказательства перваго предложенія, положимъ, что въ плоскости LK (черт. 5 Листъ VI) имѣемъ пару $(P, -P)$, приложенную къ прямой AB; въ плоскости LK, или въ другой lk, параллельной ей, беремъ линію ab, равную и параллельную AB. Соединяемъ точку A съ b, а B съ a; линія Ab и Ba пересѣкутся въ извѣстной точкѣ O, которая будетъ серединою прямыхъ Ab и Ba. Сверхъ того предполагаемъ, что линіи AB и ab соединены между собою неизмѣняемымъ образомъ. Приложимъ теперь къ каждой изъ двухъ точекъ a и b двѣ силы P', P'', равныя и параллельныя силѣ P; такимъ образомъ получимъ въ плоскости lk двѣ противодѣйствующія пары $(P', -P')$ и $(P'', -P'')$, равныя какъ между собою, такъ и парѣ $(P, -P)$, въ плоскости LK заключающейся. Такъ какъ пары $(P', -P')$, и $(P'', -P'')$ взаимно уничтожаются, то очевидно что чрезъ введеніе ихъ, дѣйствіе первоначальной пары $(P, -P)$ не измѣнится. Но легко видѣть, что пары $(P, -P)$ и $(P'', -P'')$ также взаимно уничтожаются; дѣйствительно, двѣ силы равныя P и P'', приложенныя къ точкамъ A и b, совокупляются въ одну силу Q, параллельную имъ, равную ихъ суммѣ $P + P''$, и проходящую чрезъ середину O прямой приложенія Ab; Смот. COMPOSITION DES FORCES PARALLÈLES. То же самое можно сказать и о силахъ $-P$ и $-P''$, приложенныхъ къ точкамъ B и a; ихъ равнодѣйствующая Q', равная ихъ суммѣ, пройдетъ чрезъ ту же точку O, и уничтожитъ силу Q; слѣдовательно останется только пара $(P', -P')$, которая равна первоначальной, перенесенной параллельно самой себѣ въ своей плоскости, или въ плоскость ей параллельную.

Докажемъ теперь, что пара можетъ быть обращаема какъ угодно въ своей плоскости. Для этого положимъ что дана пара $(P, -P)$; пусть будетъ AB ея плечо (черт. 6 Листъ VI). Въ плоскости этой пары, подъ произвольнымъ угломъ съ AB, проводимъ прямую $ab = AB$ такъ чтобы AB и ab пересѣкались въ общей ихъ серединѣ O; сверхъ того предполагаемъ, что линіи AB и ab соединены между собою неизмѣняемымъ образомъ. Принимаемъ ab за плечо двухъ противодѣйствующихъ паръ $(P', -P')$ и $(P'', -P'')$, равныхъ какъ между собою, такъ и первоначальной $(P, -P)$; противодѣйствующія пары уничтожаются, слѣдовательно введеніе ихъ не измѣнитъ дѣйствія пары $(P, -P)$. Но замѣтимъ теперь, что пары $(P, -P)$ и $(P'', -P'')$ также уничтожаются, ибо равнодѣйствующая Q двухъ равныхъ силъ P и $-P''$, проходящая чрезъ точку K взаимнаго ихъ пересѣченія, уничтожается прямопротивною силою Q', изображающею равнодѣйствующую силъ $-P$ и P'', и которая проходитъ чрезъ точку L, на направленіи силы Q находящуюся. И такъ, останется пара $(P', -P')$, приложенная къ плечу ab, составляющему какой ни есть уголъ съ прежнимъ плечомъ AB; эта пара совершенно замѣнитъ дѣйствіе первоначальной $(P, -P)$.

Второе предложеніе доказывается слѣдующимъ образомъ: пусть дана пара $(P, -P)$ приложенная къ плечу AB (черт. 7 Листъ VI), и положимъ, что желаемъ замѣнить ее другою, приложенною къ плечу BC. Откладываемъ BC на продолженіи AB, и вводимъ двѣ пары $(P', -P')$ и $(P'', -P'')$, равныя между собою и прямопротивныя, приложенныя къ прямой BC, которая принимается за общее ихъ плечо. Очевидно, что дѣйствіе пары $(P, -P)$ не измѣнится. Если предположимъ теперь, что силы P и P' обратно пропорціональны длинамъ AB и BC, то есть что $\frac{P}{P'} = \frac{BC}{AB}$, то равнодѣйствующая $P + P''$ силъ P и $P'' = P'$, пройдетъ чрезъ точку B (Смот. COMPOSITION DES FORCES PARALLÈLES), и уничтожитъ дѣйствіе силъ $-P$ и $-P''$, приложенныхъ къ той же точкѣ, но въ прямопротивную сторону. И такъ, останется только пара $(P', -P')$, имѣющая плечомъ своимъ линію BC; эта пара замѣняетъ совершенно первоначальную $(P, -P)$. Изъ сего предложенія можно заключить, что дѣйствіе какой ни есть пары $(P, -P)$, приложенной къ плечу $\overline{AB}$, можетъ измѣряться ея моментомъ, то есть произведеніемъ $P \times \overline{AB}$ силы P на плечо $\overline{AB}$.

Положимъ теперь, что имѣемъ двѣ пары, заключающіяся въ одной плоскости; посредствомъ предыдущаго предложенія можно будетъ измѣнить каждую изъ нихъ такъ, чтобы плечи новыхъ паръ были равны между собою. Но, въ слѣдствіе перваго предложенія, пары могутъ быть переносимы и вращаемы въ своей плоскости по произволенію; слѣдовательно, разсматриваемыя нами пары, имѣющія плечи равныя, могутъ быть совмѣщены, чрезъ что получится одна равнодѣйствующая пара, равная суммѣ или разности составляющихъ, смотря по тому, будутъ ли первоначальныя пары содѣйствующими или противодѣйствующими.

Точно такимъ образомъ докажется, что двѣ пары, заключающіяся въ плоскостяхъ параллельныхъ, совокупляются въ одну, равную суммѣ или разности составляющихъ паръ, и, очевидно, что это предложеніе можетъ быть распространено на какое угодно число паръ, находящихся въ одной плоскости, или въ плоскостяхъ параллельныхъ между собою.

Когда пары заключаются въ разныхъ плоскостяхъ, не параллельныхъ между собою, то совокупляются въ одну равнодѣйствующую пару по правилу параллелограмма силъ. Дѣйствительно, положимъ что даны двѣ пары $(P, -P)$ и $(Q, -Q)$, заключающіяся: первая, въ плоскости IK (черт. 8 Листъ VI), а вторая въ LM; пусть будетъ XY пересѣченіе двухъ плоскостей. Обращаемъ пару $(P, -P)$ въ своей плоскости такъ, чтобы плечо ея AB приняло положеніе, параллельное прямой XY, и измѣняемъ это плечо въ другое mn, равное напримѣръ линейной единицѣ. Потомъ переносимъ пару до совпаденія плеча mn съ прямою mn на линіи XY; такимъ образомъ получимъ пару $(P', -P')$. Дѣлаемъ то же самое съ парою $(Q, -Q)$; измѣнивъ плечо ab въ mn, и совмѣстивъ его послѣ измѣненія съ линіею mn на общемъ пересѣченіи плоскостей, получимъ пару $(Q', -Q')$. И такъ, первоначальныя пары $(P, -P)$ и $(Q, -Q)$ будутъ замѣнены двумя парами $(P', -P')$ и $(Q', -Q')$, приложенными къ общему плечу mn, совпадающему съ прямою XY. Совокупляя силы P' и Q', приложенныя къ точкѣ m, получимъ по правилу параллелограмма силъ равнодѣйствующую R, коей величина и направленіе будутъ совершенно извѣстны. Дѣлая то же самое съ силами $-P'$ и $-Q'$, приложенными къ точкѣ n, найдется равнодѣйствующая $-R'$, имѣющая относительно прямой mn такое же положеніе какъ и R, но направляющаяся въ противную сторону. Слѣдовательно, пары $(P, -P)$ и $(Q, -Q)$ можно будетъ замѣнить одною парою $(R, -R)$, приложенною къ плечу mn. Если бы имѣли третью пару $(S, -S)$, то совокупивъ ее съ парою $(R, -R)$, нашли бы точно такимъ образомъ равнодѣйствующую имъ пару $(R', -R')$, которая замѣнила бы дѣйствіе трехъ паръ $(P, -P)$, $(Q, -Q)$, $(S, -S)$, и такъ далѣе.

Согласно съ мнѣніемъ многихъ математиковъ мы думаемъ, что *теорія паръ* доставляетъ самые простые и легкіе способы для рѣшенія вопросовъ, относящихся къ совокупленію и равновѣсію силъ, приложенныхъ къ неизмѣняемой системѣ. Эта теорія, заслуживающая особеннаго вниманія, принадлежитъ *Г-ну Поэнсо* (*Poinsot*). Для дальнѣйшихъ подробностей отсылаемъ читателей къ сочиненію *Élémens de Statique, par Poinsot*, или къ Русскому переводу этой книги: *Началь-*

ныя основанія Статики, 1831 г. переводъ ***М. Ленина.***

COURANT. (Физ.) **ТОКЪ.—ТЕЧЕНІЕ, ПОТОКЪ.** *Courant électrique, электрическій токъ.*

COURANTES (COORDONNÉES). Смот. **COORDONNÉES.**

COURBE. (Геом.) **КРИВАЯ ЛИНІЯ, КРИВАЯ.** Линія, коей смежныя безконечно малыя части имѣютъ различныя направленія. Такъ обыкновенно опредѣляютъ кривую линію; но намъ кажется, что это опредѣленіе, а также и другія, предлагаемыя для объясненія понятія о кривыхъ, равно неудовлетворительны. Въ подтвержденіе этого мнѣнія, приводимъ слова *д'Аламберта* о линіяхъ вообще (Смот. въ *Encyclopédie Méthodique* статью COURBE).

„Весьма трудно предложить о линіяхъ понятіе, болѣе вразумительное того простаго понятія, которое заключается для насъ въ самыхъ словахъ: *прямой* и *кривой*. Можетъ быть самое точное опредѣленіе линій есть слѣдующее: *прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками, а кривая есть линія, проведенная отъ одной точки къ другой не по кратчайшему пути.* Но первое изъ сихъ опредѣленій выражаетъ скорѣе второстепенное свойство прямой линіи, чѣмъ ея сущность; второе же, сверхъ того что заключаетъ въ себѣ только свойство отрицательное, приличествуетъ столько же совокупленію конечныхъ прямыхъ, составляющихъ между собою какіе ни есть углы, какъ и собственно *кривой линіи*, которую можно разсматривать какъ совокупность безконечно малыхъ прямыхъ, пересѣкающихся подъ углами, безконечно мало разнствующими отъ 180°. Кажется, лучше бы не предлагать никакого опредѣленія прямой и кривой линіямъ по причинѣ трудности, а можетъ быть и совершенной невозможности, привести ихъ объясненіе къ понятію, болѣе простому нежели то, которое онѣ представляютъ нашему уму сами собою."

Кривыя линіи раздѣляются на *плоскія (courbes planes* или *courbes à simple courbure)* и на *кривыя двоякой кривизны (courbes à double courbure)*. Первыя могутъ быть начерчены на плоскости; вторыя, напротивъ того, не могутъ лежать всѣми своими точками на одной плоскости *).

Для изслѣдованія *плоской кривой* чаще всего принимаютъ ея плоскость за одну изъ координатныхъ, напримѣръ за плоскость xy; Смот. COORDONNÉES. Въ такомъ предположеніи, кривая будетъ опредѣляться двумя уравненіями $z=0$ и $f(x,y)=0$. Для простоты координаты предполагаются прямоугольными. Уравненія $z=0$ и $f(x,y)=0$, разсматриваемыя отдѣльно, принадлежатъ: первое, плоскости xy, а второе, цилиндрической поверхности, коей производящая перпендикулярна къ этой плоскости. И такъ, плоскую кривую линію принимаютъ за пересѣченіе одной изъ координатныхъ плоскостей съ цилиндрическою поверхностію, перпендикулярною къ этой самой плоскости. Замѣтимъ, что при разсматриваніи плоской кривой употребляютъ обыкновенно только одно уравненіе $f(x,y)=0$; но, въ такомъ случаѣ, первое уравненіе, $z=0$, подразумѣвается.

Кривыя двоякой кривизны разсматриваются также какъ пересѣченія двухъ поверхностей; но ни одна изъ сихъ послѣднихъ не должна быть плоскою. Если изобразимъ чрезъ $f(x,y,z)=0$ и $F(X,Y,Z)=0$ уравненія этихъ двухъ поверхностей, то кривая ихъ пересѣченія, для которой должно быть $X=x$, $Y=y$, $Z=z$, опредѣлится двумя уравненіями

$$f(x,y,z)=0 \quad \text{и} \quad F(x,y,z)=0,$$

изъ которыхъ можно также вывести два слѣдующія:

$$y=\varphi(x) \text{ и } z=\psi(x).$$

Эти два уравненія принадлежатъ проэкціямъ кривой пересѣченія на координатныхъ плоскостяхъ xy и xz. Очевидно, что уравненія $y=\varphi(x)$

*) *Д'Аламбертъ*, въ VIII томѣ своихъ *Opuscules Mathématiques* въ Разсужденіи подъ заглавіемъ: *Sur les courbes à courbure multiple*, употребляетъ наименованія *courbe à triple courbure*, *à quadruple courbure*, и вообще *à multiple courbure* (*кривая тройкой, четверной* и вообще *кратной кривизны*). По д'Аламберту, линія A будетъ двоякой кривизны, ежели кривая B, перпендикулярная къ общему сѣченію безконечно близкихъ плоскостей, опредѣляющихъ положеніе элементовъ линіи A, есть плоская кривая. Въ противномъ случаѣ кривая B будетъ *тройкой*, и вообще *кратной кривизны*. — Сколько намъ извѣстно никто, кромѣ д'Аламберта, не употреблялъ этихъ наименованій.

и $z = \psi(x)$ можно принимать за уравненія двухъ цилиндрическихъ поверхностей, соотвѣтственно перпендикулярныхъ плоскостямъ xy и xz; взаимное пересѣченіе сихъ поверхностей образуетъ разсматриваемую кривую двоякой кривизны. Для примѣровъ отсылаемъ читателей къ кривымъ: HÉLICE, LOXODROMIE и проч.

Можно съ достовѣрностію полагать, что знанія древнихъ геометровъ о кривыхъ ограничивались свойствами *круговой линіи*. Впослѣдствіи, когда представились новые вопросы, какъ напримѣръ вопросъ *объ удвоеніи куба*, *задача о раздѣленіи угла на три равныя части*, *о квадратурѣ круга*, тогда начали разсматривать и другія, сложнѣйшія кривыя, какъ то: *коническія сѣченія*, *конхоиду*, *циссоиду*, *квадратрису* и *спираль Архимедову*; Смот. CONIQUES (SECTIONS), CONCHOIDE, CISSOIDE, QUADRATRICE, SPIRALE. Но всѣ эти изслѣдованія, основанныя на способахъ синтетическихъ, были болѣе или менѣе односторонни, и не подводили теоріи кривыхъ линій подъ правила общія, безъ которыхъ всякая теорія неудовлетворительна. Знаменитый *Декартъ*, жившій въ первой половинѣ XVII вѣка, сдѣлалъ самый счастливый переворотъ въ Геометріи кривыхъ линій, придумавъ выражать всякую кривую уравненіемъ между двумя перемѣнными величинами, называемыми *координатами*, и опредѣляющими положеніе какой ни есть точки на кривой. Сочиненіе Декарта, изданное на Французскомъ языкѣ подъ заглавіемъ *Géométrie*, въ которомъ онъ излагаетъ свои открытія, напечатано въ первый разъ въ 1637 году.

Многіе авторы приписываютъ также Декарту первую мысль о приложеніи Алгебры къ рѣшенію опредѣленныхъ геометрическихъ вопросовъ; но первые опыты по сему предмету находимъ у нѣкоторыхъ математиковъ, жившихъ прежде Декарта, и преимущественно у Французскаго математика *Віета (Viète)*. Прибавимъ къ этому, что гораздо прежде Декарта выражали свойства нѣкоторыхъ кривыхъ отношеніемъ прямыхъ линій, параллельныхъ между собою, и проведенныхъ изъ всѣхъ точекъ кривой къ постоянной прямой линіи. Въ этомъ способѣ усматриваемъ основную мысль Декартова анализа; но никто, до него, не замѣтилъ всей важности такого воззрѣнія на кривыя, и не указалъ на обширную пользу, которую можно было извлечь изъ подобныхъ соображеній. Однимъ изъ первыхъ опытовъ Декарта въ новомъ его анализѣ было рѣшеніе слѣдующей общей задачи, надъ которою тщетно трудились первостепенные изъ древнихъ геометровъ *Эвклидъ*, *Аполлоній* и *Паппъ*. Дано на плоскости какое ни есть число прямыхъ линій $A, B, C, D \ldots$; найти такую точку M, изъ которой можно бы было провести столько же другихъ прямыхъ $a, b, c, d \ldots$, по одной къ каждой изъ данныхъ $A, B, C, D \ldots$, составляющихъ съ послѣдними данные же углы, и съ тѣмъ условіемъ: чтобы произведеніе двухъ изъ проведенныхъ линій, напримѣръ $a \times b$, было въ данномъ отношеніи къ квадрату c^2 третьей, когда даны три прямыя A, B, C; или къ произведенію $d \times c$ двухъ остальныхъ, если даны четыре линіи A, B, C, D; или, когда дано пять прямыхъ, то произведеніе трехъ линій должно быть въ данномъ отношеніи къ произведенію двухъ остальныхъ, помноженному еще на извѣстную постоянную прямую, и такъ далѣе. Декартъ, въ своей Геометріи, предложилъ рѣшеніе этого вопроса, во всей его обширности. Читатели найдутъ частный случай изложенной задачи въ статьѣ: CONCHOIDE PARABOLIQUE.

Мы не будемъ объяснять какимъ образомъ составляется по способу Декарта уравненіе кривой на основаніи отличительнаго ея свойства: примѣры составленія такихъ уравненій помѣщены во многихъ статьяхъ нашего Лексикона. Но чтобы дать читателямъ нѣкоторое понятіе о пріёмахъ Декарта при изслѣдованіи кривыхъ, мы приведемъ здѣсь хотя одинъ изъ его способовъ, напримѣръ, способъ для проведенія касательныхъ къ плоскимъ кривымъ.

Положимъ, что имѣемъ кривую AMB (черт. 9 Листъ VI), опредѣляемую уравненіемъ между прямоугольными координатами $AP = x$ и $PM = y$. Изъ нѣкоторой точки C оси AX описываемъ кругъ, пересѣкающій кривую по крайней мѣрѣ въ двухъ точкахъ N и N'. Въ этихъ точкахъ ординаты NQ и $N'Q'$ будутъ общія кривой и кругу. Если будемъ теперь уменьшать радіусъ CN круга, то точки N и N' начнутъ приближаться одна къ другой, и наконецъ, при надлежащей величинѣ радіуса, онѣ совмѣстятся въ одну, отмѣченную на чертежѣ буквою M. Въ этой точкѣ M радіусъ MC будетъ перпендикуляренъ къ кривой, а слѣдовательно также и къ касательной TMT'. И такъ, рѣшеніе задачи о проведеніи касательной къ кривой линіи, приводится къ опредѣленію радіуса MC.

Для достиженія этой цѣли, Декартъ составляетъ уравненіе, заключающее въ себѣ неопредѣленный радіусъ CN и разстоянія ординатъ точекъ пересѣченія кривой съ кругомъ отъ начала A. При двухъ точкахъ пересѣченія N и N', упомянутое уравненіе будетъ второй степени, ибо оно должно опредѣлять величины AQ и AQ'; но если предположимъ, что точки N и N' совмѣщаются въ одну M, то и ординаты NQ и $N'Q'$ совмѣстятся съ ординатою MP, и слѣдовательно въ такомъ случаѣ $AQ = AQ' = AP$, а это значитъ, что уравненіе второй степени будетъ имѣть два корня *равные*. Выражая алгебрически равенство этихъ двухъ корней, получимъ уравненіе для опредѣленія искомаго радіуса CM.

Положимъ, напримѣръ, что кривая AMB есть обыкновенная парабола, опредѣляемая уравненіемъ $y^2 = px$, въ которомъ p изображаетъ ея параметръ. Пусть будетъ $AC = a$, радіусъ $CN = r$; слѣдовательно, для точекъ N и N', получимъ въ одно время

$$r^2 = (a-x)^2 + y^2 \quad \text{и} \quad y^2 = px,$$

откуда

$$r^2 = (a-x)^2 + px \text{ или } x^2 - (2a-p)\,x + a^2 - r^2 = 0.$$

Чтобы корни этого уравненія были равны между собою, должно быть $\left(\frac{2a-p}{2}\right)^2 = a^2 - r^2$, откуда $r = \sqrt{p\left(a - \frac{p}{4}\right)}$. Но $a = x + \overline{PC}$, $r^2 = y^2 + \overline{PC}^2$; слѣдовательно

$$y^2 + \overline{PC}^2 = p\left(x + \overline{PC} - \frac{p}{4}\right);$$

съ другой стороны, такъ какъ $y^2 = px$, то и получимъ $\overline{PC}^2 = p.\,\overline{PC} - \frac{p^2}{4}$, откуда $\overline{PC} = \frac{p}{2}$. Этотъ выводъ показываетъ, что поднормальная параболы равна полу-параметру, изъ чего уже весьма легко заключить, что подкасательная равна удвоенной абсциссѣ.

Очевидно, что вмѣсто сѣкущаго круга можно употребить сѣкущую прямую, что во многихъ случаяхъ упроститъ рѣшеніе задачи о проведеніи касательныхъ къ кривымъ линіямъ.

Декартъ, въ своей *Геометріи*, предлагаетъ разныя изслѣдованія о кривыхъ, какъ то: опредѣленіе особенныхъ точекъ, предѣловъ кривой, разысканіе наибольшихъ и наименьшихъ ординатъ, строеніе корней алгебрическихъ уравненій высшихъ степеней посредствомъ кривыхъ линій, и проч. и проч.

До Декарта, авторы называли *геометрическими* тѣ кривыя, которыя могутъ быть начерчены посредствомъ циркуля и линейки; всѣ другія кривыя именовались *механическими*. Декартъ исправилъ это раздѣленіе помѣстивъ въ разрядъ *геометрическихъ кривыхъ* всѣ тѣ, для которыхъ зависимость между прямолинейными координатами выражается *алгебрически*; къ разряду же *кривыхъ механическихъ* онъ отнесъ всѣ тѣ, для которыхъ упомянутая зависимость не можетъ быть выражена алгебрически.

Нынѣ, слѣдуя *Лейбницу*, геометрическія кривыя называютъ *алгебрическими* (*courbes algébriques*), а механическія, *трансцендентными* (*transcendantes*). И такъ, кривая называется *алгебрическою* въ томъ случаѣ, когда уравненіе ея въ прямолинейныхъ координатахъ будетъ алгебрическое, а *трансцендентною*, когда опредѣляющее ее уравненіе будетъ трансцендентное.

Алгебрическія кривыя раздѣляются на *порядки* или *степени* (*ordres, degrés*), сообразно съ степенью уравненій, ихъ опредѣляющихъ. Прямая линія, выражаемая уравненіемъ первой степени

$$Ax + By + C = o,$$

составляетъ разрядъ линій *первой степени*; Смот. DROITE.

Коническія кривыя, опредѣляемыя общимъ уравненіемъ

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = o,$$

принадлежатъ къ разряду кривыхъ *втораго порядка* или *степени*.

Кривыя *третьяго порядка* опредѣляются общимъ уравненіемъ

$$Ax^3 + By^3 + Cx^2y + Dxy^2 + Ex^2 + Fy^2 + Gxy + Hx + Iy + J = o,$$

и такъ далѣе.

Очевидно, что съ возвышеніемъ порядка кривыхъ линій увеличивается и число постоянныхъ величинъ, входящихъ въ общія ихъ уравненія. Различныя соотношенія между сими постоянными величинами приводятъ къ различнымъ кривымъ; каждая изъ сихъ послѣднихъ хотя и принадлежитъ къ одному и тому же порядку, но пользуется особеннымъ свойствомъ, отличающимъ ее отъ другихъ. Чѣмъ выше степень общаго уравненія, тѣмъ будетъ больше и число различныхъ кривыхъ, опредѣляемыхъ симъ уравненіемъ. Напримѣръ, общее уравненіе кривыхъ втораго порядка доставляетъ четыре коническія сѣченія: *кругъ, эллипсъ, параболу* и *иперболу*. Общее уравненіе кривыхъ третьей степени приводитъ, по *Эйлеру*, къ 16 родамъ кривыхъ, допускающимъ до 80 отмѣнъ. Ясно, что число кривыхъ, опредѣляемыхъ уравненіемъ одной и той же степени, должно возрастать весьма быстро по мѣрѣ увеличенія этой степени.

Прежде, кривыя втораго порядка назывались *кривыми перваго рода* (*courbes du premier genre*), кривыя третьяго порядка — *кривыми втораго рода*, и такъ далѣе. Причина такого раздѣленія состоитъ въ томъ, что уравненіе первой степени принадлежитъ прямой линіи, и слѣдовательно кривыя линіи, собственно говоря, начинаются только съ уравненій второй степени. Нынѣ это раздѣленіе вышло изъ употребленія.

Знаменитый *Ферматъ*, современникъ Декарта, обогатившій многія отрасли математическихъ наукъ своими глубокомысленными изслѣдованіями, подвинулъ впередъ и Геометрію кривыхъ. Переписка Фермата съ Робервалемъ доказываетъ даже, что бо́льшая часть изъ открытій Декарта была извѣстна ему прежде появленія въ свѣтъ Декартовой Геометріи. Умалчивая о многихъ примѣчательныхъ изслѣдованіяхъ Фермата въ Геометріи, мы приведемъ здѣсь только способъ, придуманный имъ для опредѣленія *наибольшихъ* и *наименьшихъ величинъ*, и который, по времени своего изобрѣтенія, конечно заслуживаетъ особенное вниманіе.

Способъ, о которомъ говоримъ, основанъ на той истинѣ, что когда какая либо величина, напримѣръ ордината кривой линіи, достигла своего *наибольшаго* или *наименьшаго* состоянія, то, въ сопредѣльности этого состоянія, приращеніе разсматриваемой величины равно нулю. Отсюда легко выводится правило, предлагаемое Ферматомъ для опредѣленія *наибольшихъ* и *наименьшихъ*; это правило состоитъ въ томъ, чтобы въ данное выраженіе, положимъ въ функцію $f(x)$, подставить вмѣсто перемѣнной x сперва $x+\varepsilon$, а потомъ $x-\varepsilon$, и уравнять оба вывода между собою, то есть положить $f(x+\varepsilon)=f(x-\varepsilon)$, разумѣя подъ ε весьма малую величину. По разложеніи функцій $f(x+\varepsilon)$ и $f(x-\varepsilon)$ по обыкновеннымъ правиламъ, уничтожаемъ равныя величины въ обѣихъ частяхъ уравненія $f(x+\varepsilon)=f(x-\varepsilon)$, и раздѣляемъ остающіеся члены на высшую степень приращенія, на какую только можно будетъ раздѣлить; положивъ потомъ $\varepsilon=o$, получимъ окончательное уравненіе, изъ котораго выводится уже значеніе x, обращающее величину функціи $f(x)$ въ *наибольшую* или *наименьшую*.

Чтобы показать употребленіе Ферматова способа, положимъ что ищется *наибольшая* ордината *зміевидной иперболы*. Эта кривая (Смот. ANGUINÉE) опредѣляется уравненіемъ.

$$y=\frac{a^2x}{ab+x^2}.$$

Въ слѣдствіе сказаннаго выше получимъ

$$\frac{a^2(x+\varepsilon)}{ab+(x+\varepsilon)^2}=\frac{a^2(x-\varepsilon)}{ab+(x-\varepsilon)^2},$$

или

$$a^3bx+a^3b\varepsilon+a^2x^3-a^2\varepsilon x^2-a^2\varepsilon^2x+a^2\varepsilon^3$$
$$=a^3bx-a^3b\varepsilon+a^2x^3+a^2\varepsilon x^2-a^2\varepsilon^2x-a^2\varepsilon^3.$$

Это уравненіе, по сокращеніи и по раздѣленіи на ε, обратится въ слѣдующее:

$$ab-x^2+\varepsilon=o,$$

откуда, положивъ $\varepsilon=o$, получимъ

$$x=\pm\sqrt{ab} \text{ и } y=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a^3}{b}}.$$

И такъ, наибольшая ордината зміевидной иперболы, соотвѣтствующая абсциссѣ $\sqrt{ab}$, будетъ $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^3}{b}}$.

Читатели, знакомые съ полною теоріею *наибольшихъ* и *наименьшихъ величинъ*, замѣтятъ безъ сомнѣнія недостаточность, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, изложеннаго Ферматова способа. Отсылаемъ для дальнѣйшихъ подробностей къ статьѣ MAXIMUM.

Ферматъ занимался также съ особеннымъ успѣхомъ опредѣленіемъ криволинейныхъ площадей; такого рода вопросы, въ его время, сопряжены были съ большими затрудненіями.

Геометрія Декарта не нашла во всѣхъ геометрахъ своего времени тѣхъ ревнителей, какихъ была въ правѣ ожидать. Между многими противниками, большею частію престарѣлыми математиками, которые, не рѣшаясь изучить Новой Геометріи и отказаться отъ старой, къ сожалѣнію былъ и *Роберваль*, извѣстный нѣкоторыми полезными трудами въ математическихъ наукахъ. Возраженія Роберваля противъ теорій Декарта были всѣ неосновательны, и свидѣтельствовали только объ его настойчивости и пристрастіи.

Французскій математикъ *Бонъ* (*Beaune*), другъ Декарта, оцѣнилъ вполнѣ Новую Геометрію. Онъ изучилъ ее въ совершенствѣ, и, съ цѣлію распространить ученія Декарта, написалъ пояснительныя примѣчанія на его Геометрію, которыя всѣ были одобрены самимъ авторомъ. Бонъ извѣстенъ также задачею, удержавшею его имя, и которую онъ предложилъ Геометрамъ своего времени; задача Бона примѣчательна тѣмъ, что была первою, въ которой требовалось найти кривую линію по свойству ея касательной. Смот. BEAUNE (PROBLÈME DE).

Послѣ Бона въ особенности занимались Геометріею Декарта Голландскіе и Фламанскіе математики, между которыми преимущественно извѣстны: *Шоотенъ* (*Schooten*), *Вассенааръ* (*Vassenaar*), *Гугенсъ*, *де Виттъ* (*de Witt*), *Гуддъ* (*Hudde*), *Ванъ-Гейретъ* (*Van-Heuraet*), *Слузъ* (*Sluse*) и нѣкоторые другіе.

Шоотенъ, съ цѣлію распространить ученія Декарта, перевелъ его Геометрію на Латинскій языкъ, и напечаталъ свой переводъ съ превосходными комментаріями въ 1649 году. Нѣсколько лѣтъ спустя онъ перепечаталъ свой трудъ обогативъ его многими прибавленіями, какъ то: примѣчаніями *Бона*, двумя письмами *Гудда* объ уравненіяхъ и способѣ наибольшихъ и наименьшихъ величинъ, однимъ письмомъ *Ванъ-Гейрета* о спрямленіи кривыхъ и еще нѣкоторыми другими любопытными статьями. Шоотенъ извѣстенъ также собственнымъ сочиненіемъ: *Exercitationes Geometricae*, изданнымъ въ 1646 году.

Мы думаемъ, что наши читатели прочтутъ не безъ любопытства остроумный способъ, о которомъ мы сей-часъ упомянули, и посредствомъ котораго спрямленіе кривой линіи приводится къ квадратурѣ криволинейной площади. Хотя нѣкоторые и приписываютъ изобрѣтеніе этого способа *Ванъ-Гейрету*, но, должно полагать, по свидѣтельству *Вальиса* и *Брункера*, что онъ придуманъ прежде соотечественникомъ ихъ *Вильгельмомъ Нейлемъ* (*Neil*). Вотъ этотъ способъ: Положимъ, что дана кривая OMA (черт. 10 Листъ VI), отнесенная къ прямоугольнымъ координатнымъ осямъ OX, OY. Пусть будетъ PM ордината точки M, MN нормальная къ кривой въ той же точкѣ. Сверхъ того, изобразимъ чрезъ l какую ни есть постоянную линію. Если составимъ слѣдующую пропорцію: ордината PM относится къ нормали MN, такъ какъ постоянная линія l къ четвертой пропорціональной, то изобразивъ сію послѣднюю длиною PM', и отложивъ ее по перпендикуляру PM отъ точки P, получимъ извѣстную точку M'. Повторивъ это самое построеніе для другихъ точекъ первоначальной кривой OMA, опредѣлимъ столько же новыхъ точекъ, коихъ совокупность образуетъ новую кривую $O'M'B$. Свойство послѣдней кривой таково, что криволинейная площадь $OO'M'P$, раздѣленная на постоянную линію l, равна дугѣ OM первоначальной кривой OMA; отсюда заключаемъ, что если кривая $O'M'B$ *сплощадима* (*carrable*), то OMA будетъ *спрямляема*. Легко усмотрѣть, что параболы, опредѣляемыя уравненіями $y^3=px^2$, $y^5=px^4$, $y^7=px^6$ .... всѣ *спрямляемы*.

Этотъ способъ, примѣчательный тѣмъ, что былъ придуманъ до изобрѣтенія Интегральнаго Исчисленія, можетъ быть доказанъ весьма простымъ образомъ посредствомъ Анализа Безконечныхъ. Дѣйствительно, если положимъ $OP=x$, $PM=y$, $PM'=y'$, то получимъ $MN=y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$ (Смот. NORMALE) и пропорція, о которой упомянуто выше, доставитъ

$$\frac{y}{y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dy^2}}}=\frac{l}{y'},\text{ откуда } y'=l\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}};$$

помноживъ послѣднее уравненіе на dx, взявъ интегралъ, и раздѣливъ потомъ на l, получимъ

$$\frac{\int y'dx}{l}=\int dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}};$$

но такъ какъ $\int y'dx$ изображаетъ площадь кривой $O'M'B$, а $\int dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$ дугу кривой OMA (Смот. AIRE, ARC), то отсюда и заключаемъ о справедливости предложеннаго построенія.

Гугенсъ также обогатилъ Геометрію кривыхъ своими трудами. Онъ изобрѣлъ весьма важную теорію *развертывающихся* или *эволютъ*, которую изложилъ въ третей части своего сочиненія *Horlogium oscillatorium*. Смот. DÉVELOPPEE

Предѣлы нашего Лексикона не позволяютъ намъ распространиться объ дальнѣйшихъ успѣхахъ Геометріи кривыхъ линій, или, какъ ее называли прежде, *Высшей Геометріи* (*Géométrie Sublime*). Впрочемъ, во многихъ статьяхъ этой книги, читатели найдутъ нѣкоторыя подробности по сему предмету. Смот. ASYMTOTE, BRANCHE, CONSTRUCTION, CONTACT, CRAMER (PARADOXE DE), FAMILLE DE COURBES, POINTS SINGULIERS, QUADRATURE, RECTIFICATION, TANGENTE и проч. и проч.

Сверхъ математиковъ, о которыхъ уже говорено въ этой статьѣ, почти всѣ геометры XVII и XVIII столѣтій способствовали трудами своими усовершенствованію теоріи кривыхъ линій. Поименуемъ здѣсь главнѣйшихъ изъ нихъ: *Чирнгаузъ*, *Паскаль*, *Барровъ* (*Barrow*), *Ньютонъ*, *Лейбницъ*, *Вольфъ*, *Маркизъ де л'Опиталь*, *Яковъ* и *Иванъ Бернулли*, *Маклоренъ*, *Стирлингъ*, *Гисней* (*Guisnée*), *Клеро*, *Эйлеръ*, *д'Аламбертъ*, *Аббатъ де Гюа* (*Gua*), *Крамеръ*, *Монжъ* и нѣкоторые другіе.

Въ заключеніе приводимъ заглавія нѣкоторыхъ сочиненій, въ которыхъ можно почерпнуть обширныя познанія въ теоріи кривыхъ линій:

Ньютона: Enumeratio linearum tertii ordinis.

Маклорена: Geometria organica.

Маркиза де л'Опиталь: Analyse des infiniment petits.— Traité analytique des sections coniques et de la construction des lieux géométriques, 1707.

Гиснея: Application de l'Algèbre à la Géométrie.

Клеро: Recherches sur les courbes à double courbure.

Аббата де Гюа: Usages de l'Analyse de Descartes и проч.

Эйлера: Introductio in analysin infinitorum. Lausannae 1748. — Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes.

Крамера: Introduction à l'analyse des lignes courbes. Genève, 1750.

Лакроа: Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral; 3 тома in 4°.

Коши: Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la Géométrie; 2 тома 1826 г.

POURSUITE (COURBE или LIGNE DE). (Геом.) **ПОГОННАЯ КРИВАЯ.** Такъ назвалъ *Бугеръ* кривую, образуемую равномѣрнымъ движеніемъ корабля, преслѣдующаго другой корабль, который идетъ по прямой линіи. Бугеръ предложилъ рѣшеніе этого вопроса въ *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* за 1732 годъ. Въ томъ же томѣ *Мопертюи* помѣстилъ свое рѣшеніе задачи о погонной кривой, распространивъ способъ на тотъ случай, когда преслѣдуемый корабль описываетъ не прямую линію, а какую ни есть данную кривую.

Положимъ, что преслѣдующій корабль находится въ точкѣ A (черт. 1 Листъ VII), а преслѣдуемый въ B; пусть будетъ BC направленіе, по которому идетъ корабль B. Изъ точки A возставляемъ перпендикуляръ AQ къ направленію BC, и беремъ линію AX за ось x-овъ, а AY, перпендикулярную къ AX, за ось y-овъ. Линіи $AQ = a$ и $QB = b$ будутъ извѣстны, а также и уголъ $BAQ = \theta$, котораго тангенсъ равенъ отношенію $\frac{BQ}{AQ} = \frac{b}{a}$. Положимъ, что корабль A достигъ положенія M; пусть будутъ $AP = x$, $PM = y$ координаты этой точки, а s дуга AM. Въ то же время корабль B пройдетъ нѣкоторое прямолинейное пространство, напримѣръ BE. Но такъ какъ корабль A непрестанно направляетъ свой путь къ идущему по направленію BC кораблю B, то ясно что линія, соединяющая носъ корабля A съ его кормою, будетъ также непрестанно направлена къ движущейся точкѣ B; слѣдовательно прямая TME должна быть касательною къ погонной кривой. Вотъ одно условіе; другое выводится изъ того соображенія, что если означимъ чрезъ n и m скорости кораблей A и B, то дуга $AM = s$ и прямая BE, то есть пространства, перейденныя кораблями A и B, будутъ пропорціональны числамъ n и m. И такъ $s : \overline{BE} :: n : m$, откуда $\overline{BE} = \frac{m}{n} s$. Сверхъ того, въ слѣдствіе перваго условія, и по причинѣ подобія треугольниковъ MTP и ETQ, имѣемъ

$$\overline{TP} : \overline{PM} :: \overline{TQ} : \overline{QE};$$

но $\overline{TP}$ есть подкасательная кривой, почему и равна $y\frac{dx}{dy}$; $\overline{PM} = y$, $\overline{TQ} = \overline{AQ} - \overline{AP} + \overline{TP} = a - x + y\frac{dx}{dy}$, $\overline{QE} = \overline{BE} + \overline{BQ} = \frac{m}{n} s + b$; слѣдовательно

$$y\frac{dx}{dy} : y = a - x + y\frac{dx}{dy} : \frac{m}{n} s + b,$$

откуда получаемъ

$$\left(\frac{m}{n}s+b\right)\frac{dx}{dy}=a-x+y\frac{dx}{dy}$$

или

$$\frac{m}{n}s=-b+(a-x)\frac{dy}{dx}+y.$$

Если возьмемъ дифференціалъ этого уравненія, замѣнимъ ds выраженіемъ $dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$, и положимъ $\frac{dy}{dx}=p$, то получимъ

$$\frac{m}{n}\sqrt{1+p^2}=(a-x)\frac{dp}{dx},$$

откуда

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{m}{n}\cdot\frac{dx}{a-x}.$$

Интегралъ этого уравненія будетъ

$$log\left(\sqrt{1+p^2}+p\right)=log\left[c^{\frac{m}{n}}(a-x)^{-\frac{m}{n}}\right],$$

или просто

(1) $$\sqrt{1+p^2}+p=c^{\frac{m}{n}}(a-x)^{-\frac{m}{n}},$$

разумѣя подъ c постоянную произвольную величину, которая опредѣляется изъ того условія, что при $x=o$, имѣемъ $\frac{dy}{dx}=p=tang\beta=\frac{b}{a}$. Слѣдовательно

$$\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}+\frac{b}{a}=c^{\frac{m}{n}}a^{-\frac{m}{n}},$$

откуда

(2) $$c^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}\left(\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}+\frac{b}{a}\right).$$

Для краткости удержимъ въ вычисленіи величину c.

Замѣтимъ теперь, что по причинѣ

$$\left(\sqrt{1+p^2}+p\right)^{-1}=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}+p}=\sqrt{1+p^2}-p,$$

формула (1) приметъ видъ

$$\sqrt{1+p^2}-p=c^{-\frac{m}{n}}(a-x)^{\frac{m}{n}};$$

вычтя послѣднее уравненіе изъ (1), и замѣнивъ p равною величиною $\frac{dy}{dx}$, получимъ

(3) $$2dy=c^{\frac{m}{n}}(a-x)^{-\frac{m}{n}}dx-c^{-\frac{m}{n}}(a-x)^{\frac{m}{n}}dx.$$

Интегралъ этого уравненія представляетъ два случая, смотря по тому, будутъ ли скорости m и n различны, или равны между собою. Въ первомъ предположеніи $\frac{m}{n}$ будетъ отлично отъ единицы, и слѣдовательно интегралъ уравненія (3) будетъ

(4) $$2(y+c')=-\frac{c^{\frac{m}{n}}}{-\frac{m}{n}+1}(a-x)^{-\frac{m}{n}+1}+\frac{c^{-\frac{m}{n}}}{\frac{m}{n}+1}(a-x)^{\frac{m}{n}+1},$$

разумѣя подъ c' постоянную произвольную величину, которая опредѣляется тѣмъ условіемъ, что при $x=o$, имѣемъ $y=o$; слѣдовательно

$$2c'=-\frac{c^{\frac{m}{n}}a^{-\frac{m}{n}+1}}{-\frac{m}{n}+1}+\frac{c^{-\frac{m}{n}}a^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}$$

$$=\frac{an}{n^2-m^2}\left[(n-m)c^{-\frac{m}{n}}a^{\frac{m}{n}}-(n+m)c^{\frac{m}{n}}a^{-\frac{m}{n}}\right].$$

Если положимъ, что движеніе корабля B начинается отъ точки Q, то $BQ=b=o$, и величина $c^{\frac{m}{n}}$, въ силу уравненія (2), обратится въ $a^{\frac{m}{n}}$; слѣдовательно $2c'=-\frac{2amn}{n^2-m^2}$; подставляя эту величину въ уравн. (4), найдемъ

(5) $$2\left(y-\frac{amn}{n^2-m^2}\right)=$$

$$=\frac{n}{n+m}a^{-\frac{m}{n}}(a-x)^{\frac{m}{n}+1}-\frac{n}{n-m}a^{\frac{m}{n}}(a-x)^{-\frac{m}{n}+1}.$$

Вотъ уравненіе *погонной кривой* въ томъ предположеніи, что скорости кораблей различны, и что курсъ удаляющагося корабля перпендикуляренъ къ линіи, соединяющей его съ другимъ кораблемъ въ началѣ погони. Чтобы найти въ какой точкѣ N корабль A настигнетъ корабль B, стоитъ только положить $x=a$; ордината $\overline{QN}$, соотвѣтствующая этому значенію x, будетъ искомое разстояніе точки N отъ извѣстной точки Q. Вторая часть уравн. (5), для $x=a$, обращается въ o когда $n>m$, а въ ∞, когда $n<m$. Второе предположеніе приводитъ къ безконечной величинѣ для y, и показываетъ невозможность встрѣчи двухъ кораблей, что и очевидно. Но когда $n>m$, то получимъ

$$y=\overline{QN}=\frac{amn}{n^2-m^2}.$$

Напримѣръ, если бы скорость корабля A была вдвое болѣе скорости корабля B, то для разстоянія $\overline{QN}$ нашли бы $\frac{2}{3}a$.

Когда скорости двухъ кораблей равны, то $\frac{m}{n}=1$, и уравн. (3) приметъ видъ

$$2dy=c(a-x)^{-1}dx-c^{-1}(a-x)dx;$$

взявъ интегралъ, получимъ

$$2(y+c')=-c\log(a-x)+\frac{c^{-1}(a-x)^2}{2}.$$

Для опредѣленія постоянной величины c' замѣчаемъ, что при $x=o$ и $y=o$; слѣдовательно

$$2c'=-c\log a+\frac{c^{-1}a^2}{2};$$

если положимъ, какъ и выше, что движеніе корабля B начинается отъ точки Q, то найдемъ $c=a$, въ слѣдствіе чего

$$(6)\qquad 2\left(y+\frac{a}{4}\right)=a\log\left(\frac{a}{a-x}\right)+\frac{(a-x)^2}{2a}.$$

Очевидно, что въ этомъ предположеніи корабль A не настигнетъ корабля B; невозможность встрѣчи обнаруживается тотчасъ и изъ уравн. (6); дѣйствительно, положивъ въ немъ $x=a$, находимъ $y=\infty$.

Уравненіе (5) показываетъ, что погонная кривая будетъ *алгебрическая*, когда скорости двухъ кораблей различны, но соизмѣримы между собою. Но если скорости равны, то погонная кривая будетъ *трансцендентная*, ибо уравн. (6), опредѣляющее ее въ этомъ случаѣ, заключаетъ въ себѣ функцію логариѳмическую.

Courbes organiques. Органическія кривыя. Плоскія кривыя, описываемыя посредствомъ угловъ и прямыхъ линій. Положимъ, напримѣръ, что два угла QPR и $Q'P'R'$ (черт. 11 Листъ VI) обращаются около двухъ неподвижныхъ точекъ P и P' такъ, что пересѣченіе N сторонъ PR и $P'R'$ движется по данной прямой AB. Въ такомъ предположеніи пересѣченіе M двухъ другихъ сторонъ PQ и $P'Q'$ будетъ описывать *коническую кривую*. Для отличенія сихъ коническихъ кривыхъ между собою, поступаемъ слѣдующимъ образомъ: на линіи PP' строимъ сегментъ круга измѣряющій уголъ, равный дополненію данныхъ угловъ QPR и $Q'P'R'$ къ четыремъ прямымъ. Если данная прямая AB пересѣчетъ круговую дугу PDP' въ двухъ точкахъ, то коническая кривая будетъ *ипербола*; если AB будетъ касательною къ дугѣ PDP', то получится *парабола*; наконецъ, если прямая AB совсѣмъ не встрѣтитъ дуги PDP', то описанная кривая будетъ *эллипсъ*. Удержавъ приведенное сей-часъ строеніе, и предположивъ что линія AB удаляется на безконечное разстояніе отъ PP', такъ что стороны PR и $P'R'$ при движеніи угловъ QPR, $Q'P'R'$ остаются параллельными между собою, окажется, что описанная точкою M кривая будетъ *кругъ*.

Когда предположимъ что точка N описываетъ не прямую линію, а коническую кривую, то точка M опишетъ кривую *третьяго порядка*.

Органическія кривыя придуманы *Маклореномъ*; онъ предложилъ изслѣдованія о нихъ въ сочиненіи своемъ: *Geometria organica*. Отсылаемъ также для нѣкоторыхъ подробностей объ этомъ же предметѣ къ VIII книгѣ Коническихъ Сѣченій Маркиза *де л'Опиталя*.

Courbe polygone. Многоугольная кривая. Кривая линія, принимаемая за многоугольникъ, состоящій изъ безконечнаго числа сторонъ. При изслѣдованіи кривыхъ на основаніи теоріи предѣловъ или безконечно малыхъ величинъ и тому подобныхъ способовъ, мы всегда разсматриваемъ кривую какъ многоугольникъ; это значитъ, что принимаемъ кривую за *предѣлъ* вписанныхъ и описанныхъ около нея многоугольниковъ. Смот. LIMITE, INFINIMENT PETIT, POLYGONE.

Courbes anaclastiques. Анакластическія, діоптрическія кривыя. Такъ назвалъ Французскій математикъ *Меранъ* (*Mairan*) [*Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1740 г.] кривыя, усматриваемыя чрезъ преломленіе. Такова напримѣръ кривая, которую усмотритъ зритель на плоскомъ днѣ сосуда, наполненнаго водою.

Courbes rhodonnées. Розановидныя кривыя. Такъ назвалъ Италіанскій математикъ *Гвидо Грандо* особеннаго рода кривыя, которыя могутъ быть начерчены *геометрически* въ кругѣ. Такого рода кривыя образуютъ нѣсколько листьевъ, и довольно похожи на розы, почему и получили названіе *rhodonnées* отъ Греческ. *ῥόδον*, *роза*.

Courbe analytique du visage de l'homme. Аналитическая кривая человѣческаго лица. Кривая, вымышленная довольно искуснымъ Голландскимъ математикомъ *Гуддомъ*, и посредствомъ которой онъ пытался выразить какія угодно черты лица человѣческаго. Въ *Лейбцигскихъ Актахъ*, за 1700 годъ, Гуддъ сообщилъ Лейбницу объ этой странной мысли, и увѣрялъ его, что онъ въ состояніи построить подобную кривую.

Courbe de Beaune или Courbe Beaunienne. Смот. BEAUNE.

Courbe des arcs или COMPAGNE DE LA CYCLOIDE (Смот.).

Courbes, или, употребительнѣе, lignes de courbure. Линіи кривизны. Смот. COURBURE DES SURFACES.

COURBES RÉCIPROQUES D'ÉQUILIBRATION. (Мех.) **ВЗАИМНЫЯ КРИВЫЯ РАВНОВѢСІЯ.** Положимъ что двѣ массы m и m', связанныя нерастяжимою и совершенно гибкою нитью, которая свободно ходитъ по жолобу безконечно малаго блока C (черт. 12 Листъ VI), лежатъ на двухъ кривыхъ amA и $bm'B$. Если допустимъ, что массы m и m' тяжелыя, то онѣ вообще будутъ двигаться на кривыхъ. Но можно предложить себѣ вопросъ: по данной одной изъ двухъ кривыхъ опредѣлить другую такъ, чтобы массы m и m', лежащія на нихъ, во всѣхъ своихъ положеніяхъ находились въ равновѣсіи. Двѣ кривыя, удовлетворяющія такому требованію, называются *взаимными кривыми равновѣсія*. Маркизъ *де л'Опиталь* первый рѣшилъ эту задачу (Acta Eruditorum, 1695). Вскорѣ послѣ него, *Яковъ* и *Иванъ Бернулли* предложили свои рѣшенія и способы для построенія этого рода кривыхъ.

Примемъ центръ C безконечно малаго блока за начало координатъ, вертикальную линію CX за ось абсциссъ, а горизонтальную CY, за ось ординатъ. Пусть будутъ $\overline{Cp}=x$ и $\overline{pm}=y$ координаты кривой amA, которую беремъ за данную; изобразимъ чрезъ $y=f(x)$ ея уравненіе. Сверхъ того, положимъ $\overline{Cp'}=x'$ и $\overline{p'm'}=y'$. Вопросъ состоитъ въ опредѣленіи зависимости y' къ x'.

Такъ какъ нить, къ концамъ которой привязаны массы m и m', предполагается нерастяжимою, то длина ея будетъ постоянна; изобразимъ ее чрезъ l. Если означимъ чрезъ r и r' разстоянія $\overline{mC}$ и $\overline{m'C}$ точекъ m и m' отъ начала координатъ C, то очевидно получимъ

$$r^2=x^2+y^2 \quad \text{и} \quad r'^2=x'^2+y'^2,$$

и слѣдовательно, по причинѣ $r+r'=l$,

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x'^2+y'^2}=l.$$

Выразимъ теперь аналитически условіе равновѣсія двухъ тяжелыхъ массъ m и m'. Для этого замѣтимъ, что такъ какъ въ настоящемъ случаѣ силы дѣйствуютъ посредствомъ блока, то онѣ, для равновѣсія, должны быть равны между собою. Смот. POULIE. Слѣдовательно, изобразивъ чрезъ g силу тяжести, и разложивъ вѣсъ gm, выраженный линіею $\overline{mG}$, по нормали mN кривой amA и по направленію нити mR, получимъ двѣ составляющія $\overline{mS}$ и $\overline{mR}$; первая изъ нихъ произведетъ только давленіе на кривую, а вторая, направляющаяся по длинѣ нити, должна уравновѣсить равную ей силу $\overline{m'R'}$, которая относится къ массѣ m', и дѣйствуетъ по направленію нити $\overline{m'R'}$. Чтобы найти составляющую $\overline{mR}$, замѣтимъ, что изъ подобія треугольниковъ CmN и mRG, выводимъ

$$\frac{\overline{mR}}{\overline{mG}}=\frac{\overline{Cm}}{\overline{CN}} \quad \text{или} \quad \frac{\overline{mR}}{gm}=\frac{r}{x+\overline{pN}},$$

откуда

$$\overline{mR}=\frac{gmr}{x+\overline{pN}}.$$

Но $\overline{pN}$ изображаетъ поднормальную кривой amA, почему и имѣемъ $\overline{pN}=y\frac{dy}{dx}$, въ слѣдствіе чего предыдущее уравненіе приметъ видъ

$$\overline{mR}=\frac{gmr}{x+y\frac{dy}{dx}}.$$

Точно такимъ образомъ получимъ для массы m' составляющую

$$\overline{m'R'}=\frac{gm'r'}{x'+y'\frac{dy'}{dx'}};$$

но для равновѣсія должно быть $\overline{mR}=\overline{m'R'}$; слѣдовательно

$$\frac{mr}{x+y\frac{dy}{dx}}=\frac{m'r'}{x'+y'\frac{dy'}{dx'}},$$

или

$$\frac{xdx+ydy}{mrdx}=\frac{x'dx'+y'dy'}{m'r'dx'}.$$

Дифференцируя уравненія $x^2+y^2=r^2$, $x'^2+y'^2=r'^2$, получаемъ выраженія

$$xdx+ydy=rdr \text{ и } x'dx'+y'dy'=r'dr',$$

въ слѣдствіе которыхъ предыдущая формула обратится въ

$$m'\frac{dr}{dx}=m\frac{dr'}{dx'} \quad \text{или} \quad m\frac{dx}{dr}=m'\frac{dx'}{dr'};$$

но, съ другой стороны, $r+r'=l$, откуда $dr'=-dr$; слѣдовательно

$$mdx+m'dx'=o.$$

Интегрируя это уравненіе, находимъ

$$mx+m'x'=C,$$

разумѣя подъ C постоянную величину.

Замѣтимъ теперь, что выраженіе $\frac{mx+m'x'}{m+m'}$, равное постоянному количеству $\frac{C}{m+m'}$, изображаетъ вертикальное разстояніе центра тяжести двухъ массъ m и m' отъ начала координатъ; слѣдовательно, для равновѣсія сихъ массъ, общій ихъ центръ тяжести долженъ постоянно оставаться на одной и той же горизонтальной линіи.

Уравненія

$$y=f(x),\quad x^2+y^2=r^2,\quad x'^2+y'^2=r'^2$$
$$r+r'=l,\quad mx+m'x'=C$$

заключаютъ въ себѣ рѣшеніе задачи о взаимныхъ кривыхъ равновѣсія. Дѣйствительно, изъ этихъ пяти уравненій выведемъ

$$x=\frac{C-m'x'}{m} \text{ и } y=\sqrt{\left(l-\sqrt{x'^2+y'^2}\right)^2-\left(\frac{C-m'x'}{m}\right)^2},$$

и слѣдовательно, уравненіе *взаимной кривой равновѣсія* относительно amA будетъ

$$\sqrt{\left(l-\sqrt{x'^2+y'^2}\right)^2-\left(\frac{C-m'x'}{m}\right)^2}=f\left(\frac{C-m'x'}{m}\right).$$

Что касается до постоянной произвольной величины C, то она опредѣляется вообще условіемъ, что кривая $bm'B$ проходитъ чрезъ данную точку b, находящуюся на вертикальной оси CX, или чрезъ какую либо другую, опредѣленную же точку.

Для примѣра положимъ, что amA есть прямая линія, опредѣляемая уравненіемъ $y=ax$; взаимная линія равновѣсія для этой прямой опредѣлится уравненіемъ

$$\sqrt{\left(l-\sqrt{x'^2+y'^2}\right)^2-\left(\frac{C-m'x'}{m}\right)^2}=a\left(\frac{C-m'x'}{m}\right),$$

или, что всё равно,

$$\sqrt{x'^2+y'^2}=l-\left(\frac{C-m'x'}{m}\right)\sqrt{1+a^2}.$$

Слѣдовательно, взаимная кривая прямой линіи будетъ *коническая кривая*.

Если положимъ, что линія $bm'B$ должна также проходить чрезъ начало координатъ, то при $x'=o$ должно быть $y'=o$, въ слѣдствіе чего $l-\frac{C\sqrt{1+a^2}}{m}=o$, откуда $C=\frac{ml}{\sqrt{1+a^2}}$, и наконецъ

$$y'=x'\sqrt{\frac{(1+a^2)m'^2-m^2}{m^2}}.$$

И такъ, въ этомъ предположеніи, получаемъ прямую для взаимной линіи равновѣсія.

Если бы кривая amA была *круговая линія*, то нашли бы для взаимной кривой *эпициклоиду*.

Для сличенія отсылаемъ къ статьѣ: PONT LEVIS.

Courbe funiculaire. Веревочная или цѣпная линія. Смот. CHAINETTE.

Courbe de la plus vite descente. Смот. BRACHYSTOCHRONE.

Courbe aplanétique, Courbe aux approches égales, courbe asymtotique, courbe caustique, diacaustique, élastique, exponentielle, tautochrone, voilière и проч. и проч. Смот. APLANÉTIQUE, APPROCHES, ASYMPTOTE, CAUSTIQUE и вообще прилагательныя имена.

Courbe musicale. Струнная кривая. Кривая линія, образуемая натянутою струною, приводимою въ сотрясеніе. Смот. CORDES (VIBRATION DES).

Courbes des signes du zodiaque. (Гном.) Кривыя зодіакальныхъ знаковъ. Тѣнь отъ оконечности указателя въ солнечныхъ часахъ описываетъ, каждый день, кривую линію на плоскости квадрана; иногда означаютъ на солнечныхъ часахъ нѣкоторыя изъ сихъ кривыхъ, относящіяся къ примѣчательнѣйшимъ эпохамъ года, напримѣръ, къ главнымъ неподвижнымъ праздникамъ. Онѣ то и называются *кривыми зодіакальныхъ знаковъ*.

COURBE. (Исч. Вѣр. и Физ.) **КРИВАЯ ЛИНІЯ.** Courbe de mortalité; Кривая смертности; Указательница смертности. Построеніе этой кривой весьма просто: возьмемъ произвольную прямую за ось абсциссъ или x-овъ, и назначимъ на ней точку O, которую примемъ за начало координатъ. Перпендикуляръ, возставленный изъ O, изобразитъ ось ординатъ или y-овъ. Отложимъ отъ точки O *сто* частей, равныхъ между собою, но впрочемъ произвольной длины, и отмѣтимъ послѣдовательныя дѣленія нумерами 0, 1, 2, 3... до 100. Изъ всѣхъ точекъ дѣленія возставляемъ перпендикуляры, на которыхъ опредѣляемъ точки кривой смертности слѣдующимъ образомъ: принимаемъ въ соображеніе извѣстное число людей, напримѣръ 10000, родившихся въ одно время, и откладываемъ отъ начала координатъ по оси y-овъ длину, пропорціональную числу 10000. Далѣе, ищемъ въ таблицахъ смертности сколько изъ 10000 человѣкъ, по прошествіи одного года послѣ рожденія, остается въ живыхъ; откладываемъ отъ точки дѣленія n^0 1 по ординатѣ длину, пропорціональную этому числу. Поступаемъ точно также съ ординатою, соотвѣтствующею нумеру 2, то есть откладываемъ по ней длину, пропорціональную числу младенцевъ, достигшихъ 2-хъ лѣтъ, заимствуя это число изъ тѣхъ же таблицъ смертности. На этомъ самомъ основаніи продолжаемъ строеніе для каждаго возраста, напримѣръ, на ординатѣ, соотвѣтствующей нумеру 33, откладываемъ длину, пропорціональную числу людей, которые, изъ разсматриваемыхъ 10000, дожили до 33 лѣтъ. Такимъ образомъ дойдемъ до послѣдняго нумера, который соотвѣтствуетъ у насъ 100-лѣтнему возрасту; положимъ, что изъ 10000 человѣкъ ни одинъ не достигъ этихъ лѣтъ; слѣдовательно, послѣдняя ордината будетъ нуль. Чрезъ отмѣченныя такимъ образомъ 101 точку на ординатахъ, проводимъ непрерывную кривую, которая и называется *кривою смертности* или *указательницею смертности.* Очевидно, что она пересѣчетъ ось абсциссъ въ точкѣ, отмѣченной нумеромъ 100, и не будетъ простираться далѣе. Конечно есть люди, которые живутъ свыше ста лѣтъ, и слѣдовательно, по всей строгости, нельзя принимать это число предѣломъ человѣческой жизни; но исключенія такъ рѣдки, что можно не брать ихъ въ расчетъ при составленіи кривой смертности.

Иногда для большей точности подраздѣляютъ еще первыя два дѣленія, то есть разстоянія отъ n^0 0 до n^0 1 и отъ n^0 1 до n^0 2; такое подраздѣленіе въ особенности приличествуетъ первому дѣленію, ибо, по причинѣ большой смертности между младенцами въ первые двѣнадцать мѣсяцевъ, кривая смертности, въ этомъ промежуткѣ, имѣетъ значительную кривизну. Обыкновенно линію $n^0$0 до $n^0$1 раздѣляютъ на четыре части, а линію n^0 1 до n^0 2 только на двѣ; въ такомъ предположеніи первая ордината послѣ той, которая соотвѣтствуетъ началу o, изобразитъ число младенцевъ, достигающихъ 3-хъ мѣсячнаго возраста, вторая, число тѣхъ, которые доживаютъ до 6-ти мѣсяцевъ, и такъ далѣе. Впрочемъ, можно довольствоваться подраздѣленіемъ перваго только года на два равные шестимѣсячные промежутка.

Предложенный графическій способъ можетъ быть приложенъ и къ построенію указательницы смертности, соотвѣтствующей опредѣленному возрасту. Положимъ напримѣръ, что составляемъ такого рода кривую для 33 лѣтъ. Откладываемъ отъ начала координатъ по оси y-овъ длину, пропорціональную разсматриваемому числу людей 33 лѣтъ; вторая ордината должна быть пропорціональна числу людей, остающихся въ живыхъ по истеченіи одного года; третья — числу людей, достигающихъ 35 лѣтъ, и такъ далѣе до тѣхъ поръ, пока кривая не пересѣчетъ оси абсциссъ. Само собой разумѣется, что разстоянія между ординатами должны быть равны между собою.

Такое графическое изображеніе результатовъ таблицъ смертности имѣетъ передъ сими послѣдними то преимущество, что представляетъ возможность съ одного взгляда обнять всѣ измѣненія въ ходѣ смертности, которыя трудно уловить имѣя передъ собою пространныя таблицы.

Нѣкоторые математики пытались связать аналитическою формулою показанія таблицъ смертности. Германскій математикъ *Ламбертъ* предлагаетъ слѣдующее уравненіе для кривой смертности:

$$y = 10000\left(\frac{96-x}{96}\right)^2 - 6176\left\{e^{-\frac{x}{31,682}} - e^{-\frac{x}{2,43114}}\right\},$$

которое онъ составилъ на основаніи Лондонскихъ таблицъ смертности. Число рожденій предполагается въ этомъ уравненіи равнымъ *десяти тысячамъ*, а предѣлъ человѣческой жизни, *девяносто шести* годамъ; y изображаетъ число людей, достигающихъ возраста x. *Дювильяръ* (*Duvillard*), въ своихъ *Recherches sur les Emprunts*, предлагаетъ употреблять формулу Ламберта и при другихъ таблицахъ смертности, но съ измѣненіемъ постоянныхъ коэффиціентовъ, именно въ такомъ видѣ:

$$y = N\left(\frac{t-x}{t}\right)^2 - m\left\{e^{-\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{n}}\right\},$$

гдѣ N изображаетъ число рожденій, t самую глубокую старость, показываемую таблицею, а e, основаніе Неперовой системы логариѳмовъ. Числа m, k и n опредѣляются извѣстнымъ образомъ посредствомъ употребляемой таблицы смертности. Что касается до перемѣнныхъ x и y, то онѣ имѣютъ въ формулѣ Дювильяра тоже значеніе, какъ и въ уравненіи Ламберта. —

Физики употребляютъ также кривыя линіи для изображенія результатовъ какихъ либо наблюденій. Напримѣръ, измѣненіе въ продолженіи извѣстнаго времени высотъ барометрическаго столба, измѣненіе склоненія магнитной стрѣлки и проч. изображаются весьма удовлетворительно симъ графическимъ способомъ. Построеніе кривыхъ, представляющихъ результаты подобныхъ наблюденій, производится точно такъ, какъ построеніе указательницы смертности, описанное выше.

COURBURE. (Геом.) **КРИВИЗНА.** Количество, на которое безконечно малая часть кривой линіи или кривой поверхности отклоняется отъ прямой линіи или отъ плоскости. Кривизну опредѣленной части какой ни есть кривой линіи, напримѣръ дуги ADB (черт. 13 Листъ VI) измѣряютъ вообще угломъ EOB, составляемымъ двумя касательными AE и BF, которыя проводятъ въ крайнихъ точкахъ A и B къ данной дугѣ. Когда дуга ADB *круговая*, то уголъ EOB равенъ углу при центрѣ ACB, который, для одного и того же круга и при постоянной длинѣ дуги ADB, останется также постояннымъ. Въ этомъ смыслѣ и говоримъ, что кругъ есть такая кривая, кривизна которой во всѣхъ точкахъ равномѣрна.

Разсмотримъ двѣ одноцентренныя круговыя дуги равной длины; изобразимъ чрезъ a общую длину сихъ дугъ, чрезъ r радіусъ первой изъ нихъ, а чрезъ r' радіусъ второй; пусть будетъ π полуокружность при радіусѣ 1. Кривизны сихъ двухъ дугъ изобразятся чрезъ

$$\frac{360^\circ . a}{\pi r}, \quad \frac{360^\circ . a}{\pi r'};$$

но эти выраженія относятся одно къ другому какъ $\frac{1}{r}$ къ $\frac{1}{r'}$; слѣдовательно *кривизны двухъ круговыхъ дугъ равной длины обратно пропорціональны соотвѣтствующимъ имъ радіусамъ.*

Кривизну какъ плоскихъ, такъ и двоякокривыхъ линій, въ опредѣленной точкѣ, условились измѣрять посредствомъ кривизны соприкасающагося круга, соотвѣтствующаго той точкѣ. И такъ, въ слѣдствіе сказаннаго выше, *кривизна кривой линіи, въ опредѣленной точкѣ, обратно пропорціональна радіусу кривизны, соотвѣтствующему разсматриваемой точкѣ.* Для совершеннаго уразумѣнія этого предмета, читатели должны обратиться къ статьѣ OSCULATEUR (CERCLE).

COURBURE DES SURFACES. КРИВИЗНА ПОВЕРХНОСТЕЙ. Для измѣренія кривизны плоскихъ и не плоскихъ кривыхъ линій, употребляется *соприкасающійся кругъ* (Смот. выше); и такъ, было бы весьма естественно измѣрять кривизну поверхностей посредствомъ *соприкасающагося шара.* Но изъ сказаннаго нами въ статьѣ CONTACT DES SURFACES COURBES легко заключить, что вообще невозможно найти подобную шаровую поверхность; и дѣйствительно, если изобразимъ чрезъ $z=f(x,y)$ уравненіе предложенной поверхности, чрезъ x, y, z координаты данной на ней точки M, и чрезъ X, Y, Z перемѣнныя координаты шаровой поверхности, то для соприкасанія должно будетъ имѣть слѣдующія *шесть* уравненій:

$$\text{При } X=x \text{ и } Y=y \begin{cases} Z=z \\ \dfrac{dZ}{dX}=\dfrac{dz}{dx}, \quad \dfrac{dZ}{dY}=\dfrac{dz}{dy}, \\ \dfrac{d^2Z}{dX^2}=\dfrac{d^2z}{dx^2}, \dfrac{d^2Z}{dXdY}=\dfrac{d^2z}{dxdy}, \dfrac{d^2Z}{dY^2}=\dfrac{d^2z}{dy^2}. \end{cases}$$

Но такъ какъ вообще уравненіе шаровой поверхности заключаетъ въ себѣ только *четыре* неопредѣленныя величины, именно: три координаты центра и радіусъ, то ясно, что вообще нельзя будетъ выполнить приведенныя шесть условій, и слѣдовательно, опредѣленіе соприкасающагося шара въ опредѣленной точкѣ данной поверхности вообще невозможно. Поэтому, для измѣренія кривизны поверхности, употребляютъ вмѣсто шара два различные соприкасающіеся круга. *Эйлеръ* первый предложилъ эту теорію, которую впослѣдствіи пополнилъ *Монжъ.* Предлагаемъ ее въ краткомъ видѣ.

Когда разсматриваемъ плоскую кривую линію, то пересѣченіе двухъ смежныхъ ея нормалей опредѣляетъ центръ круга кривизны; геометрическое мѣсто всѣхъ этихъ центровъ образуетъ кривую, называемую *эволютою* предложенной кривой линіи. Распространимъ это опредѣленіе на кривыя поверхности, и будемъ искать для сихъ послѣднихъ геометрическое мѣсто пересѣченій смежныхъ нормалей. Положимъ, что на предложенной поверхности, выражаемой уравненіемъ $z=f(x,y)$, разсматривается точка M, опредѣляемая прямоугольными координатами x, y, z. Уравненія нормали къ поверхности въ точкѣ M будутъ (Смот. NORMALE)

$$(1) \begin{cases} X-x+p(Z-z) \\ Y-y+q(Z-z), \end{cases}$$

гдѣ X, Y, Z изображаютъ перемѣнныя координаты направленія нормали, и сверхъ того для краткости $p=\frac{dz}{dx}$, $q=\frac{dz}{dy}$.

Чтобы получить уравненія смежной нормали, очевидно должно измѣнить въ формулахъ (1) x, y, z, p и q въ $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, $p+dp$ и $q+dq$, а координаты X, Y, Z въ другія X', Y', Z'; если же въ этихъ новыхъ уравненіяхъ удержимъ прежнія величины X, Y, Z, то сіи величины изобразятъ координаты точки пересѣченія двухъ разсматриваемыхъ смежныхъ нормалей. И такъ, получимъ уравненія

$$X-x-dx+(p+dp)(Z-z-dz)=o$$
$$Y-y-dy+(q+dq)(Z-z-dz)=o,$$

которыя, въ силу формулъ (1), примутъ видъ

$$-dx-pdz+(Z-z)dp-dp\,dz=o$$
$$-dy-qdz+(Z-z)dq-dq\,dz=o.$$

Если положимъ для сокращенія

$$\frac{dp}{dx}=r,\ \frac{dp}{dy}=\frac{d^2z}{dxdy}=s,\ \frac{dq}{dx}=\frac{d^2z}{dydx}=s,\ \frac{dq}{dy}=t,$$

то получимъ $dp=rdx+sdy$, $dq=sdx+tdy$; слѣдовательно, откинувъ въ послѣднихъ двухъ уравненіяхъ безконечно малыя величины втораго порядка $dpdz$ и $dqdz$, и подставивъ на мѣсто dp и dq имъ равныя величины, а также на мѣсто dz сумму $pdx+qdy$, найдемъ уравненія

$$(2) \begin{cases} -dx-p^2dx-pqdy+(Z-z)(rdx+sdy)=o \\ -dy-q^2dy-pqdx+(Z-z)(sdx+tdy)=o. \end{cases}$$

И такъ, если на кривой поверхности существуютъ точки, для которыхъ смежныя нормали пересѣкаются, то необходимо должно имѣть мѣсто равенство

$$\frac{dx+p^2dx+pqdy}{rdx+sdy}=\frac{dy+q^2dy+pqdx}{sdx+tdy},$$

которое выводится изъ уравненій (2) чрезъ исключеніе разности $Z-z$.

Найденное сей-часъ уравненіе можетъ быть написано въ видѣ

$$(3)\quad \left[(1+q^2)s-pqt\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left[(1+q^2)r-(1+p^2)t\right]\left(\frac{dy}{dx}\right) -\left[(1+p^2)s-pqr\right]=o;$$

оно опредѣляетъ тѣ величины $\frac{dy}{dx}$, при которыхъ смежныя нормали пересѣкаются. Такъ какъ уравн. (3) второй степени относительно $\frac{dy}{dx}$, то заключаемъ, что каждой нормали N соотвѣтствуютъ только двѣ смежныя съ нею нормали n и n', которыя пересѣкаютъ N. Легко доказать, что плоскости, опредѣляемыя пересѣкающимися направленіями нормалей N съ n и N съ n', взаимно перпендикулярны. Дѣйствительно, вообразимъ что координатная плоскость xy параллельна касательной плоскости проведенной къ точкѣ M, чрезъ которую проходитъ нормаль N; очевидно, что въ такомъ предположеніи получимъ для точки M, $p=o$ и $q=o$; слѣдовательно уравн. (3) приметъ видъ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{r-t}{s}\left(\frac{dy}{dx}\right)-1=o.$$

Если изобразимъ чрезъ m и m' корни этого уравненія, то получимъ, какъ извѣстно

$$mm'+1=o;$$

но такъ какъ въ настоящемъ предположеніи всѣ прямыя, касательныя къ поверхности въ разсматриваемой точкѣ M, параллельны своимъ проэкціямъ на плоскости xy, то m и m' изобразятъ тангенсы угловъ, составляемыхъ съ осью x-овъ направленіями, по которымъ смежныя нормали къ поверхности взаимно пересѣкаются. Слѣдовательно, въ силу условія перпендикулярности $mm'+1=o$, направленія, о которыхъ говоримъ, будутъ перпендикулярны между собою.

И такъ, если проведемъ двѣ плоскости чрезъ нормаль къ поверхности въ точкѣ M и каждую изъ касательныхъ, коихъ направленіе опредѣляется величинами m и m', то эти плоскости пересѣкутъ поверхность по двумъ плоскимъ кривымъ; соприкасающіеся круги сихъ кривыхъ будутъ также кругами кривизны предложенной поверхности въ точкѣ M, ибо они будутъ имѣть двѣ общія нормали съ тою поверхностію. Всякія другія сѣченія, за исключеніемъ найденныхъ двухъ, не удовлетворятъ предписанному условію.

Радіусы соприкасающихся круговъ сихъ двухъ нормальныхъ сѣченій служатъ для измѣренія кривизны поверхности. Очевидно, что если изобразимъ чрезъ ϱ длину котораго ни есть изъ искомыхъ радіусовъ кривизны, то получимъ

$$\varrho = \sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2},$$

гдѣ X, Y, Z, какъ и выше, означаютъ координаты точки пересѣченія двухъ смежныхъ нормалей, а x, y z, координаты разсматриваемой точки M на поверхности.

Въ слѣдствіе уравненія (1) будетъ

$$\varrho = (Z-z)\sqrt{1+p^2+q^2},$$

откуда

$$Z-z = \frac{\varrho}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Если исключимъ изъ уравн. (2) отношеніе $\frac{dy}{dx}$, и подставимъ въ новое уравненіе найденную сейчасъ величину для $Z-z$, то найдемъ

$$(4)\quad \varrho^2 - \frac{[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]\sqrt{1+p^2+q^2}}{rt-s^2}\cdot\varrho + \frac{(1+p^2+q^2)^2}{rt-s^2} = o.$$

Вотъ уравненіе второй степени, опредѣляющее искомые два радіуса кривизны предложенной поверхности въ точкѣ M.

Обратимся теперь къ уравн. (3). Такъ какъ оно доставляетъ двѣ величины для $\frac{dy}{dx}$, то принявъ $\frac{dy}{dx}=m$ и $\frac{dy}{dx}=m'$, получимъ два дифференціальныя уравненія

$$dy = mdx \text{ и } dy = m'dx;$$

если исключимъ перемѣнную z изъ m и m' посредствомъ уравненія поверхности $z=f(x,y)$, то предыдущія уравненія будутъ заключать въ себѣ только координаты x и y, и слѣдовательно будутъ принадлежать двумъ кривымъ, начерченнымъ на плоскости xy. Эти двѣ кривыя изобразятъ проэкціи двухъ кривыхъ линій, вообще двоякой кривизны, начерченныхъ на поверхности, и имѣющихъ то свойство, что смежныя ихъ нормали будутъ пересѣкаться. Изъ всего сказаннаго легко заключить, что каждая точка M поверхности находится на пересѣченіи двухъ подобныхъ кривыхъ; та изъ сихъ послѣднихъ, которая соотвѣтствуетъ меньшей изъ двухъ величинъ ϱ, называется *линіею наибольшей кривизны* (*ligne de la plus grande courbure*), а другая, *линіею наименьшей кривизны* (*ligne de la plus petite courbure*). Обѣ вмѣстѣ называются *линіями кривизны* (*lignes de courbure*). *Монжъ* первый разсматривалъ этого рода линіи.

Уравненіе (4) показываетъ, что двѣ кривизны поверхности будутъ обращены въ одну, или въ противныя стороны, смотря по тому, будетъ ли $rt-s^2>o$ или $<o$. Если положимъ въ формулѣ (4) $(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r=o$, то уравненіе будетъ принадлежать поверхности такого свойства, что для каждой ея точки радіусы кривизны равны между собою, но имѣютъ противные знаки. Монжъ предложилъ способъ для интегрированія уравненія въ частныхъ дифференціалахъ $(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r=o$. Наконецъ, уравнивъ нулю подкоренную величину, получаемую чрезъ рѣшеніе уравн. (4) относительно ϱ, найдется

$$[(1+p^2)t-2pqs-(1+q^2)r]^2-4(1+p^2+q^2)(rt-s^2)=o.$$

Очевидно, что это уравненіе будетъ принадлежать такимъ поверхностямъ, для которыхъ два радіуса кривизны, соотвѣтствующіе опредѣленной точкѣ, равны между собою, и направляются въ одну и ту же сторону. Посредствомъ Интегральнаго Исчисленія доказываютъ, что одна шаровая поверхность можетъ удовлетворить этому условію. Но ежели допустимъ, что предыдущее уравненіе должно имѣть мѣсто только при опредѣленной зависимости y отъ x, то получится кривая, по протяженію которой обѣ кривизны поверхности равны между собою. Эту кривую Монжъ назвалъ *линіею сферической кривизны* (*ligne de courbure sphérique*).

Читатели найдутъ желаемыя подробности объ этомъ любопытномъ предметѣ въ слѣдующихъ сочиненіяхъ:

Разсужденіе *Эйлера*, помѣщенное въ Mémoires de l'Académie de Berlin, 1760 г.

Mémoires présentés à l'Académie des Sciences de Paris.

Монжа: Application de l'Analyse à la Géométrie.

Лагранжа: Théorie des fonctions analytiques.

Лакроа: Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral; 3 тома in-4°.

Коши: Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la Géométrie; 2 тома in-4°, 1826 г.

CERCLE DE COURBURE. Кругъ кривизны, соприкасающійся кругъ. — RAYON DE COURBURE. Радіусъ кривизны. Смот. OSCULATEUR (CERCLE).

Courbe a double courbure. Кривая двоякой кривизны, двояко-кривая линія. Смот. COURBE.

Courbe a triple courburf. Смот. выноску въ статьѣ COURBE на стран. 292.

Courbe de courbure, ligne de courbure. Смот. COURBURE DES SURFACES.

Plan de courbure или plan osculateur. Плоскость кривизны, соприкасающаяся плоскость. Плоскость, проходящая чрезъ двѣ смежныя касательныя къ кривой линіи, или, что всё равно, чрезъ три смежныя точки сей послѣдней. Пусть будетъ

$$AX+BY+CZ+D=o$$

уравненіе плоскости кривизны. Такъ какъ она должна проходить чрезъ три смежныя точки кривой, то изобразивъ чрезъ $[x.y,z]$, $[x+dx,y+dy,z+dz]$. и $[x+dx+d(x+dx)=x+2dx+d^2x, y+2dy+d^2y, z+2dz+d^2z]$ координаты этихъ точекъ, получимъ три уравненія

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=o$$
$$Adx+Bdy+Cdz=o$$
$$Ad^2x+Bd^2y+Cd^2z=o;$$

изъ двухъ послѣднихъ выведемъ равенства

$$\frac{A}{dyd^2z-dzd^2y}=\frac{B}{dzd^2x-dxd^2z}=\frac{C}{dxd^2y-dyd^2x},$$

въ слѣдствіе которыхъ уравненіе плоскости кривизны будетъ

$$(dyd^2z-dzd^2y)(X-x)+(dzd^2x-dxd^2z)(Y-y)$$
$$+(dxd^2y-dyd^2x)(Z-z)=o.$$

Если примемъ x за перемѣнную независимую, и слѣдовательно координаты y и z за функціи количества x, то можно будетъ положить $d^2x=o$; сверхъ того найдется $dy=pdx$, $d^2y=qdx^2$, $dz=p'dx$, $d^2z=q'dx^2$, гдѣ p,q,p',q' изображаютъ извѣстныя функціи перемѣнной x. И такъ, въ этомъ предположеніи, уравненіе плоскости кривизны приметъ видъ:

$$(pq'-p'q)(X-x)-q'(Y-y)+q(Z-z)=o.$$

Очевидно, что соприкасающаяся плоскость для плоской кривой линіи, будетъ не иное что какъ самая плоскость, на которой кривая начерчена.

COURIERS (PROBLÊME DES). (Алг.) Мы приводимъ здѣсь *задачу о курьерахъ* для того, чтобы имѣть случай упомянуть объ одномъ парадоксѣ, извѣстномъ въ древности. Вотъ эта задача:

Два курьера A и B слѣдуютъ по одной дорогѣ; первый изъ нихъ проѣхалъ уже разстояніе a, *когда отправляютъ втораго; предполагается, что курьеръ B проѣзжаетъ* n *верстъ въ одинъ часъ времени, а курьеръ A, котораго ѣзда медленнѣе, только* m *верстъ въ то же время. Спрашивается, на какомъ разстояніи отъ мѣста отправленія курьеръ B догонитъ курьера A?*

Пусть будетъ x неизвѣстное разстояніе. Очевидно, что разстоянія x и $x-a$, по условію вопроса, должны быть соотвѣтственно проѣханы курьерами B и A въ одинаковое время, которое изобразимъ чрезъ t. Слѣдовательно получимъ двѣ пропорціи

$$n: 1^{ч.} :: x : t^{ч.}=\frac{x}{n}$$
$$m: 1^{ч.} :: x-a : t^{ч.}=\frac{x-a}{m},$$

изъ которыхъ выводимъ

$$\frac{x}{n}=\frac{x-a}{m}, \text{ откуда } x=\frac{na}{n-m}.$$

Эта задача предлагается въ разныхъ видахъ. Напримѣръ, можно предположить, что курьеры ѣдутъ одинъ на встрѣчу другому, или искать, чрезъ сколько времени на часахъ, считая отъ извѣстнаго мгновенія, минутная стрѣлка достигнетъ часовую, и проч.

Обращаемся теперь къ парадоксу, о которомъ сей-час упомянули. Вотъ въ какомъ видѣ предлагалась задача:

Предполагается, что Ахиллесъ бѣжитъ въ десять разъ скорѣе черепахи, которая впереди у Ахиллеса на одну милю. Спрашивается, можетъ ли Ахиллесъ догнать черепаху, и, въ случаѣ возможности, на какомъ именно разстояніи?

Философъ *Зенонъ*, глава Стоиковъ, утверждалъ что Ахиллесъ не можетъ догнать черепаху, и вотъ на чемъ онъ основывалъ свое утвержденіе: онъ говорилъ, что когда Ахиллесъ пробѣжитъ одну милю, черепаха пройдетъ десятую долю второй мили; когда Ахиллесъ пройдетъ эту десятую долю, то черепаха подвинется на десятую долю отъ десятой доли, т. е. на одну сотую мили, и такъ далѣе до безконечности.

Ошибка Зенона, вѣроятно умышленная, состояла въ томъ, что въ его возраженіи скрытнымъ образомъ предполагалось, что черепаха пройдетъ менѣе $\frac{1}{9}$ мили; дѣйствительно по его сужденію, пространство, переходимое черепахою, равно $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots$ мили, а сумма этой геометрической прогрессіи, продолженной въ безконечность, равна только $\frac{1}{9}$.

Если приложимъ къ этой задачѣ найденную выше формулу

$$x=\frac{na}{n-m},$$

то положивъ $a=1^{м\cdot}$, $n=10$, $m=1$, найдемъ

$$x=\frac{10}{9}=1+\frac{1}{9}.$$

Величина $x=1+\frac{1}{9}$ показываетъ, что Ахиллесъ догонитъ черепаху, когда она перейдетъ $\frac{1}{9}$ мили.

COURONNE. (Геом.) **ВѢНЧИКЪ.** Плоское пространство, заключающееся между двумя концентрическими кругами. Легко видѣть, что изобразивъ чрезъ R и r радіусы двухъ круговъ, ограничивающихъ вѣнчикъ, площадь этой фигуры будетъ равняться $\pi(R^2-r^2)$.

COURS или **MARCHE** d'une courbe. (Геом.) **ХОДЪ** кривой линіи. *Pour déterminer la nature des points singuliers d'une courbe, il faut examiner son cours dans le voisinage des ces points*; *для опредѣленія рода особенныхъ точекъ кривой линіи, надобно разсмотрѣть ея ходъ въ сопредѣльности тѣхъ точекъ.*

CR.

CRAMER (PARADOXE DE). (Геом.) **ПАРАДОКСЪ КРАМЕРА.** Чтобы понять въ чемъ состоитъ это кажущееся противорѣчіе въ теоріи кривыхъ линій, приведемъ два предложенія изъ Геометріи, справедливость которыхъ доказывается строгимъ образомъ.

1-е Предложеніе. Кривая линія n-го порядка, опредѣляемая уравненіемъ

$$y^n+(a+bx)y^{n-1}+(c+dx+ex^2)y^{n-2}+\ldots\ldots=0,$$

можетъ быть проведена чрезъ $\frac{n^2+3n}{2}$ точекъ И такъ, прямую линію, для которой $n=1$, можно провести чрезъ *двѣ* точки; коническія сѣченія, гдѣ $n=2$, могутъ быть вообще проведены чрезъ *пять* точекъ; кривыя третьяго порядка, для которыхъ $n=3$, чрезъ *девять* точекъ; и такъ далѣе.

2-е Предложеніе. Двѣ кривыя, изъ которыхъ одна m-го, а другая n-го порядка, могутъ взаимно пересѣкаться не болѣе какъ въ mn точкахъ; но число пересѣченій можетъ быть менѣе произведенія mn. И такъ, двѣ коническія кривыя могутъ пересѣкаться только въ *четырехъ* точкахъ, ибо $m=2$ и $n=2$. Кривая третьяго порядка можетъ быть пересѣчена прямою линіею только въ *трехъ* точкахъ, ибо $m=3$, а $n=1$; двѣ кривыя 3-го порядка не могутъ имѣть болѣе *девяти* общихъ точекъ, ибо въ этомъ случаѣ $m=3$ и $n=3$.

Теперь покажемъ въ чемъ состоитъ *парадоксъ Крамера*, обнаруживающійся уже съ кривыхъ 3-го порядка. Крамеръ ограничилъ смыслъ 1-го *Предложенія*, и вмѣсто того, чтобы заключить изъ него, какъ бы то слѣдовало, что для опредѣленія кривой 3-го порядка надобно имѣть по меньшей мѣрѣ 9 точекъ, коихъ число оказывается иногда недостаточнымъ, онъ предполагалъ, что 9 точекъ, во всякомъ случаѣ, совершенно опредѣляютъ эту кривую. На основаніи же 2-го *Предложенія* двѣ кривыя 3-го порядка могутъ пересѣкаться въ 9 точкахъ; и такъ, если бы приняли эти 9 точекъ пересѣченія за данныя, то есть за тѣ, чрезъ которыя должно провести кривую 3-го порядка, то, изъ сказаннаго выше слѣдовало бы, что вопросъ неопредѣленъ, ибо чрезъ систему упомянутыхъ 9 точекъ можно бы было провести двѣ кривыя 3-го порядка, а такое заключеніе, по видимому, противорѣчитъ смыслу 1-го *Предложенія*. Но это противорѣчіе вовсе не существуетъ, ибо несправедливо утверждать, что 9 точекъ, во всякомъ случаѣ, опредѣляютъ кривую 3-го порядка. И въ самомъ дѣлѣ, можетъ случиться, что проведя кривую 3-го порядка, напримѣръ только чрезъ 7 изъ данныхъ 9 точекъ, двѣ остальныя точки случайно будутъ находиться на кривой. Хотя сія послѣдняя и пройдетъ въ этомъ случаѣ чрезъ всѣ данныя 9 точекъ, но не будетъ однакожъ совершенно опредѣлена.

Для кривыхъ 4-го и высшихъ порядковъ кажущееся противорѣчіе дѣлается еще болѣе ощутительнымъ. Напримѣръ, кривыя 4-го порядка, въ силу 1-го *Предложенія*, могутъ быть проведены чрезъ 14 точекъ. Но, въ слѣдствіе 2-го *Предложенія*, двѣ кривыя 4-го порядка могутъ пересѣкаться въ 16 точкахъ. И такъ, если допустимъ, что эти 16 точекъ пересѣченія даны напередъ, то можно будетъ провести чрезъ нихъ двѣ кривыя 4-го порядка. Такое заключеніе по видимому несообразно съ смысломъ 1-го *Предложенія*, въ силу котораго 14 точекъ опредѣляютъ кривую 4-го порядка, между тѣмъ какъ изъ сказаннаго сей-часъ должно заключить, что чрезъ 16 точекъ можемъ провести не только одну кривую 4-го порядка, но даже и двѣ. Мнимое это противорѣчіе объясняется какъ и выше. Дѣйствительно, положимъ, что двѣ кривыя 4-го порядка проведены, напримѣръ, чрезъ 10 изъ данныхъ 16 точекъ, и что эти кривыя пересѣкаются въ 16 точкахъ; положеніе остальныхъ 6 точекъ очень можетъ быть таково, что онѣ совпадаютъ съ пересѣченіями двухъ разсматриваемыхъ кривыхъ.

Мы привели предполагаемый Крамеромъ парадоксъ только потому, что первостепенные математики упоминали объ немъ. Кажется, изъ сказаннаго въ этой статьѣ, читатели заключатъ, что на самомъ дѣлѣ это противорѣчіе въ теоріи кривыхъ линій вовсе не существуетъ. *Эйлеръ* написалъ объ парадоксѣ Крамера Диссертацію подъ заглавіемъ: *Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes* (Mémoires de Berlin, 1748).

CRATICULAIRE. Смот. ниже.

CRATICULE. (Персп.) **СѢТЬ.** *Craticule prototype* или *prototype craticulaire*; *истинная, первообразная сѣть. Craticule ectype* или *ectype craticulaire*; *превращенная сѣть.* Когда желаемъ составить анаморфозу какого либо предмета, то сперва около его изображенія описываемъ квадратъ, который разбиваемъ на нѣкоторое число четыреугольныхъ клетокъ. На чертежѣ 11 (Листъ I) квадратъ *ABCD*, состоящій изъ 25 квадратиковъ, представляетъ такого рода сѣть, которая и называется *prototype craticulaire.* Потомъ, по извѣстнымъ правиламъ Перспективы (Смот. ANAMORPHOSE), строимъ трапецію *abcd* (черт. 12 Листъ I), состоящую изъ столькихъ малыхъ трапецій, сколько въ квадратѣ *ABCD* заключается квадратиковъ. Эта трапеція *abcd*, съ своею сѣтью малыхъ трапецій, вмѣщающая въ себѣ превратное изображеніе, называется *ectype craticulaire.*

CRÉMAILLÈRE, BARRE DENTÉE. (Мех.) **ЗУБЧАТАЯ ПОЛОСА, ЗУБЧАТКА, ПОДЪЕМЦЫ.** Такъ называется полоса, прямая или кривая, по длинѣ которой насажены зубцы. На чертежѣ 13 (Листъ VI) *AB* изображаетъ прямую зубчатую полосу.

CRÉPUSCULAIRE (CERCLE). (Астр.) **СУМЕРЕЧНЫЙ КРУГЪ.** Малый кругъ, параллельный горизонту, и находящійся подъ нимъ на 18°. Смот. ниже.

CRÉPUSCULE. (Астр.) **СУМЕРКИ; ЗАРЯ.** Свѣтъ, разливающійся въ земной атмосферѣ за нѣсколько времени до восхожденія солнца и послѣ захожденія сего свѣтила. Это явленіе происходитъ отъ преломленія солнечныхъ лучей въ атмосферѣ; Смот. RÉFRACTION. Сумерки поутру начинаются, а вечеромъ кончатся, когда солнце находится подъ горизонтомъ на 18°.

CRÉPUSCULE DU MATIN или AURORE; утренніе сумерки, утренняя заря. CRÉPUSCULE DU SOIR; вечерніе сумерки, вечерняя заря.

PROBLÊME DU PLUS COURT CRÉPUSCULE. Задача объ опредѣленіи кратчайшихъ сумерекъ. Для каждаго мѣста на земной поверхности есть такой день, въ который сумерки бываютъ короче нежели въ другіе дни года. Опредѣленіе дня кратчайшихъ сумерекъ не представляетъ никакого особеннаго затрудненія; но рѣшеніе этой задачи требуетъ довольно подробнаго изложенія, почему мы и не можемъ предложить его въ нашемъ Лексиконѣ.

Первое рѣшеніе задачи объ опредѣленіи кратчайшихъ сумерекъ приписываютъ Испанскому математику *Петру Ноніусу* (*Nonius*, *Nugnez*), который жилъ въ XVI столѣтіи, и пріобрѣлъ извѣстность своимъ способомъ для дѣленія астрономическихъ инструментовъ. Ноніусъ издалъ *трактатъ о сумеркахъ* на Испанскомъ языкѣ. Послѣ него многіе авторы занимались рѣшеніемъ этой же задачи: Маркизъ *де л'Опиталь*, въ 5 Отдѣленіи своего *Analyse des Infiniment petits*, предложилъ синтетическое рѣшеніе, довольно простое. *Иванъ Бернулли*, *Мопертюи* (*Maupertuis*), *ле Монье* (*le Monnier*) и другіе, предложили также свои изслѣдованія по сему предмету.

Читатели найдутъ подробное рѣшеніе вопроса объ кратчайшихъ сумеркахъ въ *Encyclopédie* *méthodique*, *Mathématiques*, въ статьѣ: Crépuscule. Эта самая задача изложена со всевозможною отчетливостію въ сочиненіи *Шуберта*: *Traité d'Astronomie théorique* (Tome 1-er Livre II, Chap. VI).

CREUX D'UNE ROUE. (Мех.) **ВПАДИНЫ ЗУБЧАТАГО КОЛЕСА.** Промежутки, отдѣляющіе смежные зубцы въ зубчатомъ колесѣ. Смот. DENT.

CRIBLE D'ERATOSTHÈNE. (Теор. Чис.) **РѢШЕТО ЭРАТОСѲЕНА.** Способъ, придуманный почти за три столѣтія до Р. Х. Греческимъ философомъ *Эратосѳеномъ*, и служащій для опредѣленія *простыхъ чиселъ* (*nombres premiers*). Вотъ въ чёмъ состоитъ этотъ способъ: написавъ рядъ нечетныхъ чиселъ

3, 5, 7, 9*, 11, 13, 15*, 17, 19, 21*, 23, 25*, 27*, 29, 31, 33*, 35*, 37, 39*, 41, 43, 45*, 47, 49*......

продолженный по произволенію, зачеркиваемъ сперва каждое *третье* число, начиная считать отъ ближайшаго числа къ 3, то есть, отъ 5. И такъ, числа 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45...., которыя мы отмѣтили звѣздочкою, будутъ всѣ зачеркнуты послѣ перваго дѣйствія. Далѣе, зачеркиваемъ *пятое* число, считая отъ третьяго 7, и не пропуская зачеркнутыхъ прежде; такимъ образомъ пропадутъ новыя числа 25, 45 и проч. Потомъ зачеркиваемъ каждое *седьмое* число, считая отъ 9; каждое *одинадцатое*, считая отъ 13, и такъ далѣе. Очевидно, что незачеркнутыя числа въ первоначальномъ ряду не будутъ дѣлиться ни на одно изъ простыхъ чиселъ 3, 5, 7, 11....., и слѣдовательно будутъ сами *числа простыя*. Что касается до зачеркнутыхъ чиселъ, то всѣ они будутъ сложныя.

Эратосѳенъ писалъ рядъ нечётныхъ чиселъ на дощечкѣ, и прокалывалъ дырочки подъ тѣми изъ сихъ чиселъ, которыя мы зачеркивали. Такимъ образомъ дощечка сходствовала съ *рѣшетомъ*, сквозь которое сложныя числа какъ бы сыпались, между тѣмъ какъ оставались одни *простыя*.

CRIC. (Мех.) **ДОМКРАТЪ, ПОДЪЁМЪ.** Машина относящаяся къ вороту, и употребляемая для подниманія значительныхъ тяжестей. Она состоитъ изъ прочной зубчатой полосы *AB* (черт. 14 Листъ VI), обыкновенно желѣзной, которая можетъ свободно двигаться по длинѣ своей въ ящикѣ *KL*. Шестерня *C*, приводимая въ движеніе около своей оси посредствомъ рукоятки *D*, задѣваетъ зубцами своими за зубцы полосы, которая такимъ образомъ выдвигается изъ ящика верхнимъ концомъ *A* сквозь отверстіе *mn*. При употребленіи домкрата верхній конецъ *A* полосы подставляется подъ грузъ, который желаемъ поднять.

Основываясь на законѣ равновѣсія на воротѣ (Смот. TOUR), легко видѣть, что въ домкратѣ, въ случаѣ равновѣсія, *сила, приложенная къ рукояткѣ D, должна относиться къ сопротивленію по длинѣ полосы AB, какъ радіусъ шестерни C, къ радіусу рукоятки.* Когда рукоятка не прямая, а искривленная, то подъ радіусомъ ея должно разумѣть радіусъ круга, описываемаго точкою приложенія силы, которая дѣйствуетъ на рукоятку.

Ясно, что дѣйствіе домкрата будетъ тѣмъ значительнѣе, чѣмъ будетъ болѣе отношеніе радіуса рукоятки къ радіусу шестерни.

Cric composé. Сложный домкратъ или сложный подъемъ отличается отъ *простаго* только тѣмъ, что вмѣсто одной шестерни, приводящей зубчатую полосу въ движеніе, употребляютъ въ этой машинѣ нѣсколько зубчатыхъ колесъ съ ихъ шестернями; при такомъ устроеніи, можно подымать бо́льшія тяжести съ ме́ньшимъ усиліемъ.

CRISTAL (CIEUX DE) или cieux cristallins. (Астр.) **КРИСТАЛЬНЫЯ НЕБЕСА.** Въ статьѣ CIEL мы сказали, что древніе астрономы, для объясненія различныхъ движеній небесныхъ тѣлъ, допускали существованіе восьми твердыхъ небесъ. *Альфонзъ*, Король Кастильскій прибавилъ къ нимъ еще два новыхъ, которыя названы *кристальными небесами;* первое изъ нихъ служило для объясненія предвареній равноденствій, а вторымъ объяснялось колебательное движеніе небесной сферы, которое допускали тогдашніе астрономы.

CRISTAL. КРИСТАЛЛЪ. Когда тѣло изъ жидкаго состоянія переходитъ въ твердое, то вообще принимаетъ правильный видъ, и называется въ такомъ случаѣ *кристалломъ*. Формы, свойственныя кристалламъ, суть многогранники, коихъ углы, для одного и того же вещества, остаются неизмѣнными; но размѣры этихъ многогранниковъ весьма разнообразны. Часто они растянуты въ извѣстныя стороны, а сжаты въ другія, или нѣкоторыя ихъ грани расширяются, а другія съуживаются, что зависитъ отъ особенныхъ обстоятельствъ, сопровождающихъ окристаллованіе разсматриваемыхъ тѣлъ.

Геометрическія формы, чаще другихъ встрѣчающіяся въ кристаллахъ, суть слѣдующія: *правильный октаэдръ, прямой и косоугольный октаэдры съ квадратнымъ или ромбоидальнымъ основаніями, прямая правильная шестигранная призма, прямая и косоугольная призмы съ квадратнымъ или ромбоидальнымъ основаніями.* Встрѣчаются еще и другія формы, какъ то: *правильный тетраэдръ, ромбоидальный додекаэдръ*, то есть двѣнадцатигранникъ, ограниченный двѣнадцатью равными ромбами, также *додекаэдръ съ пятиугольными, но не равносторонними гранями.*

Должно отличать отъ настоящихъ кристалловъ такъ называемые *пседоморфозы* (*pseudomorphoses*) или *ложные кристаллы*. Въ настоящемъ кристаллѣ всегда существуютъ такія направленія, по которымъ онъ можетъ быть удобно разсѣкаемъ: одно или нѣсколько изъ этихъ направленій во всякомъ случаѣ параллельны одной или нѣсколькимъ наружнымъ гранямъ кристалла. Пседоморфозы же не иное что, какъ землянистыя вещества, получившія свой наружный видъ въ пустотахъ, въ которыхъ настоящіе кристаллы оставили свои отпечатки.

CRISTALLISATION. КРИСТАЛЛИЗОВАНІЕ, КРИСТАЛЛИЗАЦІЯ, ОКРИСТАЛЛОВАНІЕ.

CRISTALLISER. КРИСТАЛЛИЗИРОВАТЬ. Превращать въ кристаллъ. SE CRISTALLISER; КРИСТАЛЛИЗОВАТЬСЯ, ОКРИСТАЛЛОВАТЬСЯ.

CRISTALLOGRAPHIE, CRISTALLONOMIE. КРИСТАЛЛОГРАФІЯ, КРИСТАЛЛОНОМІЯ. Наука, занимающаяся описаніемъ кристалловъ и изложеніемъ законовъ, по которымъ образуются ихъ геометрическія формы. Французскій минералогъ *Гаюи*, первый далъ систематическій видъ ученію о кристаллахъ, и открытіями своими положилъ основанія Кристаллографіи. Онъ издалъ объ этомъ предметѣ книгу подъ заглавіемъ: *Traité de Cristallographie*, par Найу, 2 тома, 1822 (вт. изд.). Въ 1831 году Академикъ *Г. Купферъ* напечаталъ большое сочиненіе объ этой же наукѣ, подъ названіемъ: Handbuch der rechnenden Krystallonomie. St. Petersbourg. 1831.

CRITÈRE, CRITÉRIUM, CARACTÈRE. ПРИЗНАКЪ, КРИТЕРІУМЪ. — ПРАВИЛО.

CRITIQUE (VALEUR). (Алг.) **КРИТИЧЕСКАЯ ВЕЛИЧИНА.** Для объясненія этого наименованія, которое Г. *Фурье* употребилъ въ сочиненіи своемъ: *Analyse des équations déterminées*, мы должны обратиться къ главному пріёму, предлагаемому симъ математикомъ для отдѣленія корней въ алгебрическихъ уравненіяхъ. Пусть будетъ $f(x)=0$ предложенное уравненіе, и положимъ что оно степени m. Г. Фурье составляетъ всѣ производныя данной функціи $f(x)$ до m-го порядка включительно; послѣдняя производная очевидно будетъ равняться постоянному числу, ибо $f(x)$ изображаетъ цѣлую алгебрическую функцію. Такимъ образомъ получится рядъ

$$(A)\quad f(x), f^{I}(x), f^{II}(x), f^{III}(x), f^{IV}(x), \ldots f^{[m-1]}(x), f^{[m]}(x).$$

Г. Фурье называетъ *критическими* такія *величины* перемѣнной x, которыя обращаютъ въ нуль одну изъ производныхъ $f^{I}(x)$, $f^{II}(x)$, $f^{III}(x)$, $\ldots f^{[m-1]}(x)$, и вмѣстѣ съ тѣмъ даютъ двумъ окружающимъ ее функціямъ въ ряду (A) одинакіе знаки. И такъ, величина $x=a$ была бы *критическою*, если бы, напримѣръ, при $f^{III}(a)=0$, функціи $f^{II}(a)$ и $f^{IV}(a)$ имѣли одинакіе знаки. Въ уравненіи $x^5-10x^3+23x^2+6x-7=0$, для котораго будетъ

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^5-10x^3+23x^2+6x-7\\
f^{I}(x) &= 5x^4-30x^2+46x+6\\
f^{II}(x) &= 20x^3-60x+46\\
f^{III}(x) &= 60x^2-60\\
f^{IV}(x) &= 120x\\
f^{V}(x) &= 120,
\end{aligned}$$

функція $f^{III}(x)$ обращается въ нуль для $x=1$ и $x=-1$; первая величина доставляетъ $f^{II}(1)=+6$ и $f^{IV}(1)=+120$, а вторая, $f^{II}(-1)=+86$ и $f^{IV}(-1)=-120$; такъ какъ $f^{III}(1)=0$, а функціи $f^{II}(1)$ и $f^{IV}(1)$ обѣ положительныя, то заключаемъ, что величина $x=1$ есть *критическая.*

Замѣтимъ, что каждой критической величинѣ соотвѣтствуетъ одна пара мнимыхъ корней уравненія $f(x)=0$. И такъ, можно предложить слѣдующее правило: сколько будетъ критическихъ величинъ въ ряду (A), столько же, по меньшей мѣрѣ, предложенное уравненіе $f(x)=0$ будетъ имѣть паръ мнимыхъ корней. Поэтому мы въ правѣ заключить, что въ приведенномъ выше уравненіи находится по крайней мѣрѣ *два* корня мнимыхъ. И дѣйствительно, оно имѣетъ два корня мнимыхъ и три вещественныхъ, изъ которыхъ два отрицательные, а одинъ положительный. — Для сличенія отсылаемъ читателей къ статьѣ: FOURIER (ANALYSE DES ÉQUATIONS DÉTERMINÉES PAR).

CROISER (SE), то же что SE COUPER. **ПЕРЕСѢКАТЬСЯ.**

CROISSANT. (Мат.) **ВОЗРАСТАЮЩІЙ, ВОСХОДЯЩІЙ, УВЕЛИЧИВАЮЩІЙСЯ.** *Quantité croissante; возрастающее, увеличивающееся количество. Série croissante*; *возрастающій рядъ*, то есть такой, въ которомъ величина членовъ постепенно увеличивается, какъ напримѣръ въ рядахъ

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots.$$

$$-16,\ -9,\ -4,\ -1,\ 0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16, \ldots.$$

Иногда подъ *рядомъ восходящимъ* или *возрастающимъ* разумѣютъ такой, въ которомъ степени перемѣнной величины составляютъ рядъ возрастающій, напримѣръ:

$$1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\cdots,\ x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\cdots,$$

и проч.

Убывающимъ рядомъ (*série décroissante*) называется такой рядъ, въ которомъ величина членовъ постепенно уменьшается, какъ напримѣръ въ слѣдующемъ:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\cdots.$$

Также, подъ *нисходящимъ рядомъ* разумѣютъ такую строку, въ которой степени перемѣнной составляютъ рядъ убывающій: таковъ рядъ

$$x+\frac{1}{1}x^{-1}+\frac{1}{2}x^{-2}+\frac{1}{3}x^{-3}+\ldots\ldots.$$

CROISSANT. (Астр.) **ПЕРВАЯ** и **ПОСЛѢДНЯЯ ЧЕТВЕРТЬ** луны Смот. PHASE.

CROITRE. (Мат.) **ВОЗРАСТАТЬ, РАСТИ, УВЕЛИЧИВАТЬСЯ.**

CROIX (MULTIPLIER EN). (Арие.) **НА-КРЕСТЪ ПЕРЕМНОЖАТЬ.** Для раздѣленія дроби $\frac{a}{b}$ на другую $\frac{c}{d}$, помножаемъ a на d, потомъ b на c, и получаемъ частное $\frac{ad}{bc}$; такое дѣйствіе называется *умноженіемъ на-крестъ*.

CROIX OU PILE. (Исч. Вѣр.) **ОРЛЯНКА, ОРЕЛЪ ИЛИ РѢШЕТКА.** *Д'Аламбертъ*, въ *Encyclopédie Méthodique*, въ статьѣ CROIX OU PILE, изъявляетъ свои сомнѣнія на счётъ справедливости обыкновеннаго способа опредѣленія вѣроятностей (chances) играющихъ въ эту игру. Покажемъ, на одномъ вопросѣ, въ чёмъ состоитъ его возраженіе.

Спрашивается, какъ велика вѣроятность, что при двукратномъ бросаніи монеты, выпадетъ орелъ?

Рѣшеніе этого вопроса, предлагаемое всѣми авторами, состоитъ въ слѣдующемъ: получаемъ четыре возможныя соединенія:

Бросая въ первый разъ:	Бросая во второй разъ:
Орелъ.	*Орелъ.*
Рѣшетка.	*Орелъ.*
Орелъ.	*Рѣшетка.*
Рѣшетка.	*Рѣшетка.*

Изъ этихъ четырехъ случаевъ только въ послѣднемъ не выпадетъ *орелъ*, между тѣмъ какъ въ трехъ первыхъ вскроется орелъ; слѣдовательно, искомая вѣроятность равна дроби $\frac{3}{4}$.

На это рѣшеніе д'Аламбертъ дѣлаетъ то замѣчаніе, что два соединенія, приводящія съ перваго раза къ *орлу*, должны быть включены въ одинъ случай, и это потому, что коль скоро выпалъ *орелъ*, то игра кончена, и второе бросаніе монеты не считается. И такъ, по мнѣнію д'Аламберта, возможныхъ соединеній будетъ только три, именно:

Бросая въ первый разъ:	Бросая во второй разъ:
Орелъ.	*Бросать не нужно.*
Рѣшетка.	*Орелъ.*
Рѣшетка.	*Рѣшетка.*

Слѣдовательно искомая вѣроятность изобразится дробью $\frac{2}{3}$.

Ошибка д'Аламберта состояла въ томъ, что онъ принималъ равновозможными всѣ три разсматриваемыя имъ соединенія, между тѣмъ какъ вѣроятность появленія *орла* съ перваго раза очевидно равна $\frac{1}{2}$, а *рѣшетки* въ первый разъ и *орла* во второй, только $\frac{1}{4}$. Но когда опредѣляемъ вѣроятность дробью, коей числитель изображаетъ совокупность благопріятныхъ случаевъ, а знаменатель, число всѣхъ возможныхъ случаевъ, то предполагается, что всѣ случаи равно возможны; то есть, что мы находимся въ совершенной неизвѣстности на счётъ ихъ появленія. Если же не всѣ случаи равно возможны, то приведенное сей-часъ опредѣленіе должно быть измѣнено; въ такомъ предположеніи вѣроятность событія изобразится суммою вѣроятностей всѣхъ благопріятныхъ случаевъ. И такъ, въ предыдущемъ примѣрѣ, въ которомъ вѣроятности двухъ благопріятныхъ случаевъ были $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$, сумма $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ изобразитъ вѣроятность вскрытія *орла* по крайней мѣрѣ одинъ разъ при двукратномъ бросаніи монеты.

CROIX D'ARPENTAGE. (Землем.) **ЗЕМЛЕМѢРНЫЙ КРЕСТЪ.** Угломѣрный инструментъ, который нѣкогда былъ въ употребленіи въ Землемѣріи.

CROIX GÉOMÉTRIQUE или **ARBALÊTE.** (Астр.) **ГЕОМЕТРИЧЕСКІЙ КРЕСТЪ.** Инструментъ, похожій на крестъ, и посредствомъ котораго нѣкогда опредѣляли высоту солнца на морѣ. Въ *Encyclopédie Méthodique, Mathématiques*, въ статьѣ Arbalête, помѣщено описаніе *геометрическаго креста.*

CROIX GNOMONIQUE. (Гном.) **ГНОМОНИЧЕСКІЙ КРЕСТЪ.** Родъ солнечныхъ часовъ, имѣющихъ видъ креста. Читатели найдутъ описаніе этого квадрана въ *Dictionnaire universel de Mathématique et de Physique par Saverien* (Том. 1 стр. 249).

CROQUIS или **BROUILLON. ЧЕРНОВОЙ ЛИСТЪ, ЧЕРНОВОЙ ЧЕРТЕЖЪ** или **ПЛАНЪ.** Листъ бумаги, на которомъ отмѣчаютъ всѣ измѣренія, производимыя при какой либо геодезической или землемѣрной съёмкѣ.

CRUCIFORME (HYPERBOLE). (Геом.) **КРЕСТООБРАЗНАЯ ИПЕРБОЛА.** Такъ назвалъ *Ньютонъ* одну изъ ипербoлъ третьяго порядка по той причинѣ, что двѣ ея вѣтви пересѣкаются въ видѣ креста.

CUBATION, или, употребительнѣе **CUBATURE D'UN SOLIDE.** (Геом.) **КУБАТУРА.** Измѣреніе объёма геометрическаго тѣла; Смот. VOLUME. — Въ тѣсномъ смыслѣ подъ *кубатурою* тѣла разумѣютъ построеніе такого куба, котораго объёмъ равнялся бы уже найденному объёму разсматриваемаго тѣла. Эта задача рѣдко можетъ быть рѣшена посредствомъ элементарной Геометріи, допускающей въ построеніяхъ своихъ только *прямую линію*, опредѣляемую двумя точками, и *кругъ*, описанный извѣстнымъ радіусомъ изъ даннаго центра. Такъ напримѣръ, невозможно построить *геометрически* сторону такого куба, котораго объёмъ былъ бы вдвое болѣе объёма даннаго куба. Смот. DUPLICATION DU CUBE, CONSTRUCTION.

CUBE или **HEXAÈDRE.** (Геом.) Отъ Греческ. *κύβος, игральная кость.* **КУБЪ, ГЕКЗАЭДРЪ, ПРАВИЛЬНЫЙ ШЕСТИГРАННИКЪ.** Правильный многогранникъ, ограниченный шестью равными квадратами. Кубъ, коего ребро есть линейная единица, принимается, по объёму своему, за *единичный*, и съ нимъ сравниваютъ объёмы всѣхъ другихъ тѣлъ. И такъ, когда говоримъ, что объёмъ прямоугольнаго параллелопипеда равняется произведенію трехъ его ребръ, то разумѣемъ, что каждое ребро предварительно сравнено съ линейною единицею, и выражено числомъ. Слѣдовательно, произведеніе трехъ ребръ будетъ число отвлеченное, означающее сколько разъ единичный кубъ содержится въ данномъ параллелопипедѣ.

Problême de la duplication du cube. Задача объ удвоеніи куба. Смот. DUPLICATION.

CUBE. (Ариѳ. и Алг.) **КУБЪ, ТРЕТЬЯ СТЕПЕНЬ.** Кубомъ называется произведеніе трехъ равныхъ множителей. И такъ, кубъ числа 2 будетъ $2\times2\times2=2^3=8$, кубъ 3 равняется $3\times3\times3=3^3=27$ и проч. Кубъ двучленнаго количества $a+b$ есть $(a+b)(a+b)(a+b)=(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. *Elever au cube; возвысить въ кубъ, въ третью степень.*

Цѣлыя числа, по дѣлимости на 3, могутъ быть слѣдующихъ трехъ видовъ: $3k$, $3k+1$ и $3k-1$. Составляя кубъ каждаго изъ нихъ, получимъ

$(3K)^3 = 27K^3 = 9(3K^3)$

$(3K+1)^3 = 27K^3 + 27K^2 + 9K + 1 = 9(3K^3 + 3K^2 + K) + 1$

$(3K-1)^3 = 27K^3 - 27K^2 + 9K - 1 = 9(3K^3 - 3K^2 + K) - 1.$

И такъ, точный кубъ, по дѣлимости на 9, долженъ быть одного изъ слѣдующихъ трехъ видовъ: $9E$, $9E+1$ и $9E-1$. Изъ этого заключаемъ, что всякій кубъ, по раздѣленіи на 9, даетъ въ остаткѣ или 0, или $+1$, или -1. Отсюда слѣдуетъ, что цѣлыя числа вида $9E \pm 2$, $9E \pm 3$, $9E \pm 4$ не могутъ быть точными кубами.

Racine cube, или, употребительнѣе, racine cubique. Кубичный корень. Кубичнымъ корнемъ изъ какого ни есть числа называется такой множитель, который бывъ умноженъ на свой квадратъ, производитъ данное число. И такъ, 2 есть кубичный корень изъ 8, ибо $2.2^2 = 2.2.2 = 8$; $(a+b)$ есть корень кубичный изъ $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, ибо $(a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a+b)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. *Extraire la racine cube* или *cubique*; *извлечь кубичный корень*. Дѣйствіе извлеченія кубичнаго корня означается знакомъ $\sqrt[3]{}$; и такъ, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b$. Смот. EXTRACTION.

CUBE DU CUBE. КУБЪ КУБА. Такъ называли Арабскіе писатели, а впослѣдствіи и другіе, *девятую степень* числа.

CUBER UN SOLIDE. (Геом.) **НАЙТИ ОБЪЁМЪ** геометрическаго тѣла. Смот. VOLUME.

CUBIQUE (UNITÉ). (Геом.) **КУБИЧЕСКАЯ ЕДИНИЦА, ЕДИНИЧНЫЙ КУБЪ.** Такъ называется кубъ, съ объёмомъ котораго сравниваютъ объёмы другихъ тѣлъ. Смот. CUBE въ геометрическомъ значеніи.

Paraboles cubiques. Кубическія параболы. *Première parabole cubique* или *parabole cubique du premier degré*. *Первая кубическая парабола* или *кубическая парабола первой степени*. Кривая, опредѣляемая уравненіемъ $y^3 = px$; она имѣетъ точку изгиба въ началѣ координатъ. *Seconde parabole cubique* или *parabole cubique du second degré*. *Вторая кубическая парабола* или *кубическая парабола второй степени*. Кривая, опредѣляемая уравненіемъ $y^3 = px^2$; она имѣетъ точку возврата въ началѣ координатъ.

Ellipse cubique. Кубическій эллипсъ. Кривая линія третей степени, опредѣляемая уравненіемъ $y^3 = px^2 - qx^3$. Она состоитъ изъ двухъ безконечныхъ вѣтвей, и слѣдовательно не имѣетъ никакого сходства съ обыкновеннымъ эллипсомъ.

Hyperbole cubique. Кубическая ипербола. Кривая, опредѣляемая уравненіемъ $y^3 = px^2 + qx^3$. Смот. Coniques (Sections — d'un ordre supérieur).

CUBIQUE. (Ариө. и Алг.) **КУБИЧНЫЙ.** *Nombre cubique*; *кубичное число, кубъ*. *Racine cubique*; *кубичный корень*. *Équation cubique*; *кубичное уравненіе, уравненіе третей степени*. Смот. CARDAN (RÈGLE DE). *Table des nombres cubiques*; *таблица кубовъ*. Таблица, въ которой кубы цѣлыхъ чиселъ расположены по порядку.

CUBO-CUBE. КУБЪ-КУБЪ. Такъ называлъ *Діофантъ*, а послѣ него *Віэтъ* и другіе авторы, *шестую степень*. Для означенія *девятой степени* они употребляли названіе *кубъ-кубъ-кубъ* (*cubo-cubo-cube*). Смот. CARRÉ-CARRÉ.

CULMINANT (POINT). (Астр.) **КУЛЬМИНАЦІОННАЯ ТОЧКА.** Точка, въ которой свѣтило въ суточномъ обращеніи около земли, достигаетъ наибольшей высоты надъ горизонтомъ. Когда склоненіе свѣтила не перемѣняется, то эта точка находится на меридіанѣ; въ противномъ случаѣ она удалена отъ меридіана, но всегда на весьма малый часовой уголъ.

CULMINATION. (Астр.) **КУЛЬМИНАЦІЯ.** Время прохожденія свѣтила чрезъ меридіанъ.

CULTELLATION (MÉTHODE DE). (Землем.) **СПОСОБЪ ПРОЭКТИРОВАНІЯ.** Нѣкоторые авторы называли *способомъ развертанія* (*méthode de développement*) способъ измѣренія поверхности наклоннаго къ горизонту участка земли; проэктированіе же этой поверхности на горизонтальную плоскость, или, что всё равно, опредѣленіе горизонтальнаго основанія участка земли, составляло предметъ такъ называемаго *способа проэктированія* (*méthode de cultellation*).

CUNEUS. Латинское названіе *клина*. Смот. COIN.

CURSEUR. УКАЗАТЕЛЬ, СТРѢЛКА. — БѢГУНЕЦЪ. — ПОДВИЖНАЯ НИТЬ въ микрометрѣ.

CURTATION, по Латински *curtatio.* (Астр.) **УКРАЩЕНІЕ.** Разность между истиннымъ разстояніемъ планеты отъ солнца и проэкціею ея разстоянія на плоскости эклиптики. Эта проэкція называется *укращеннымъ разстояніемъ* (*distance accourcie*).

CURTICONE. Смот. CONE TRONQUÉ.

CURVA IN CURVAM (DIFFERENTIATIO DE). (Инт. Исч.) **ДИФФЕРЕНЦИРОВАНІЕ ПОДЪ ИНТЕГРАЛЬНЫМЪ ЗНАКОМЪ;** собственно: *дифференцированіе отъ кривой до кривой.* Такъ *Лейбницъ* назвалъ способъ, на который онъ былъ наведенъ занимаясь рѣшеніемъ одного вопроса объ *синхроническихъ* или *одновременныхъ кривыхъ*, предложеннымъ ему *Иваномъ Бернулли.* Теорема Лейбница состоитъ въ слѣдующемъ: изобразимъ чрезъ $f(x,y)$ функцію двухъ перемѣнныхъ независимыхъ x и y, и положимъ, что требуется найти величину $\frac{d\int f(x,y)dx}{dy}$, то есть, производную интеграла $\int f(x,y)dx$ по измѣняемости перемѣнной y. По теоремѣ Лейбница будетъ

$$\frac{d\int f(x,y)dx}{dy}=\int\frac{df(x,y)}{dy}\,dx.$$

Это предложеніе доказывается весьма просто; дѣйствительно, положивъ $u=\int f(x,y)dx$, получимъ

$$\frac{du}{dx}=f(x,y) \text{ и } \frac{d^2u}{dxdy}=\frac{df(x,y)}{dy}; \text{ но } \frac{d^2u}{dxdy}=\frac{d^2u}{dydx}=\frac{d\left(\frac{du}{dy}\right)}{dx}$$

[Смот. DIFFÉRENTIEL (CALCUL)]; слѣдовательно

$$\frac{d\left(\frac{du}{dy}\right)}{dx}=\frac{df(x,y)}{dy}.$$

Интегрируя это уравненіе относительно x, получимъ

$$\frac{du}{dy}=\int\frac{df(x,y)}{dy}\,dx,$$

или, окончательно

$$(A)\qquad \frac{d\int f(x,y)dx}{dy}=\int\frac{df(x,y)}{dy}\,dx,$$

наблюдая что $u=\int f(x,y)dx$.

Лейбницъ называлъ этотъ способъ *differentiatio de curvâ in curvam* потому что въ вопросѣ, въ которомъ онъ употребилъ этотъ пріёмъ, надобно было переходить отъ одной кривой линіи къ другой, того же рода, измѣняя безконечно мало постоянный параметръ, входящій въ уравненіе первой изъ нихъ.

Правило, выражаемое уравненіемъ (A), полезно для нахожденія многихъ *неопредѣленныхъ* и *опредѣленныхъ* интеграловъ. Такъ напримѣръ, дифференцируя m разъ сряду интегралъ

$$\int\frac{dx}{a+x^2}=\frac{1}{\sqrt{a}}\,\text{arctang.}\,\frac{x}{\sqrt{a}}+\text{пост.}$$

относительно постоянной величины a, получимъ

$$\int\frac{1.2.3\ldots m.dx}{(a+x^2)^{m+1}}=\frac{d^m\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\,\text{arctang.}\,\frac{x}{\sqrt{a}}\right]}{da^m}+\text{пост.}$$

откуда

$$\int\frac{dx}{(a+x^2)^{m+1}}=\frac{d^m\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\,\text{arctang.}\,\frac{x}{\sqrt{a}}\right]}{1.2.3\ldots m.da^m}+\text{пост.}$$

Равнымъ образомъ, такъ какъ

$$\int_0^\infty\frac{dx}{a+x^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}},$$

то дифференцируя это уравненіе m разъ относительно a, и раздѣливъ потомъ на произведеніе $1.2.3\ldots m$, получимъ

$$\int_0^\infty\frac{dx}{(a+x^2)^{m+1}}=\frac{1}{1.2.3\ldots m}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{d^m\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)}{da^m}$$

$$=\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots(2m)}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{a^m\sqrt{a}};$$

полагая $a=1$, найдемъ

$$\int_0^\infty\frac{dx}{(1+x^2)^{m+1}}=\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots(2m)}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Вотъ еще примѣры:

$$\int e^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{a}+\text{пост.},\quad \int_0^\infty e^{-ax}dx=a^{-1}\ (\text{для } a>0).$$

Дифференцируя эти два интеграла m разъ сряду относительно постояннаго количества a, найдемъ:

$$\int x^m e^{ax}dx=\frac{d^m\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)}{da^m}+\text{пост.}$$

$$\int_0^\infty x^m e^{-ax}dx=(-1)^m\frac{d^m(a^{-1})}{da^m}=\frac{1.2.3\ldots m}{a^{m+1}}.$$

Изъ интеграловъ

$$\int Cos\,ax.dx=\frac{Sin\,ax}{a},\quad \int Sin\,ax.dx=-\frac{Cos\,ax}{a}$$

выведемъ точно такимъ образомъ

$$\int x^{2m} \, Cos\, ax.dx = (-1)^m \frac{d^{2m}\left(\frac{Sin\, ax}{a}\right)}{d\, a^{2m}} + пост.$$

$$\int x^{2m-1} \, Sin\, ax.dx = (-1)^m \frac{d^{2m-1}\left(\frac{Sin\, ax}{a}\right)}{d\, a^{2m-1}} + пост.$$

$$\int x^{2m} \, Sin\, ax.dx = (-1)^{m+1} \frac{d^{2m}\left(\frac{Cos\, ax}{a}\right)}{d\, a^{2m}} + пост.$$

$$\int x^{2m-1} \, Cos\, ax.dx = (-1)^m \frac{d^{2m-1}\left(\frac{Cos\, ax}{a}\right)}{d\, a^{2m-1}} + пост.$$

Правило Лейбница можетъ сдѣлаться ошибочнымъ для опредѣленныхъ интеграловъ, когда функція подъ знакомъ $\int$ обращается въ безконечность между предѣлами интегрированія, или еще, когда одинъ или оба предѣла суть безконечныя величины.

CURVILIGNE. (Геом.) **КРИВОЛИНЕЙНЫЙ.** *Figure curviligne*; *криволинейная фигура*; фигура, ограниченная кривыми линіями, напримѣръ: *кругъ, эллипсъ, сферическій треугольникъ* и проч.

QUADRILATÈRE CURVILIGNE. Криволинейный четыреугольникъ. Фигура, начерченная на какой ни есть поверхности, кривой или плоской, и ограниченная четырмя кривыми линіями.

ANGLE CURVILIGNE. Криволинейный уголъ. Уголъ, составляемый двумя пересѣкающимися кривыми. Для измѣренія подобнаго угла, проводимъ въ точкѣ пересѣченія двухъ кривыхъ касательную къ каждой изъ нихъ; уголъ, заключающійся между сими касательными, равняется криволинейному углу. Если разсматриваемыя кривыя будутъ касательныя одна къ другой, то очевидно криволинейный уголъ, образуемый ими въ точкѣ касанія, обратится въ *нуль*.

CURVILIGNE (MOUVEMENT). (Мех.) **КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНІЕ.** Теорія криволинейнаго движенія тѣсно связана съ различными соображеніями, которыя подробно изложены въ словахъ: FORCE, INERTIE, MASSE, MOUVEMENT, VITESSE. Но, для удобности читателей, мы заимствуемъ изъ поименованныхъ статей нѣкоторыя опредѣленія и понятія, необходимыя для яснаго изложенія теоріи криволинейнаго движенія.

Весьма малое тѣло, или такъ называемая *вещественная точка* (*point matériel*), неподверженная дѣйствію никакой силы, и разсматриваемая независимо отъ другихъ тѣлъ, должна или оставаться въ покоѣ абсолютномъ, или имѣть абсолютное движеніе по прямой линіи съ постоянною скоростію. Въ такомъ предположеніи говоримъ, что тѣло *сохраняетъ* свое состояніе. И такъ, выражаясь о тѣлѣ, что оно сохраняетъ свое состояніе, мы разумѣемъ, что оно или находится въ покоѣ, или движется по прямой линіи, переходя равныя пространства въ равныя времена. Когда тѣло движется иначе, то есть, не по прямой линіи съ постоянною скоростію, то говоримъ, что состояніе тѣла *перемѣняется*; можно доказать, что эта перемѣна происходитъ всегда отъ нѣкоторой причины, независимой отъ самаго тѣла; эта причина, какова бы она ни была, называется *силою*. Впрочемъ не должно терять изъ виду, что здѣсь говорится о покоѣ и движеніи абсолютномъ.

Силы не принимаются въ этомъ метафизическомъ значеніи въ Механикѣ: въ ней разсматриваютъ силы только въ отношеніи производимыхъ ими дѣйствій на тѣла. Легко доказать (Смот. FORCE), что дѣйствіе силы по какому ни есть направленію A выражается произведеніемъ $\frac{d(v\, Cos \omega)}{dt} \cdot \frac{dt^2}{2}$, гдѣ v изображаетъ скорость движущейся точки, dt элементъ времени, а ω уголъ, составляемый съ прямою A направленіемъ скорости, или, что всё равно, направленіемъ касательной къ траэкторіи. Принимая въ соображеніе только первый изъ двухъ множителей, то есть $\frac{d(v\, Cos \omega)}{dt}$, получаемъ такъ называемую, весьма несвойственно, *силу ускорительную* (*force accélératrice*). Мы говоримъ *несвойственно*, и это потому, что слово *сила* представляетъ уму понятіе о причинѣ метафизической, между тѣмъ какъ сила ускорительная есть выраженіе чисто аналитическое. Подъ *силою движущею* (*force motrice*) разумѣютъ произведеніе массы движущагося тѣла на ускорительную силу; и такъ, если означимъ чрезъ m эту массу, то $m \frac{d(v\, Cos \omega)}{dt}$ изобразитъ движущую силу.

Основываясь на этомъ выраженіи, легко опредѣлить движущую силу, отъ дѣйствія которой точка будетъ описывать данную кривую линію.

Для этого, опредѣляемъ проэкціи силы на трехъ направленіяхъ, незаключающихся въ одной плоскости, и потомъ, по извѣстнымъ правиламъ Геометріи, находимъ величину и направленіе силы для какого ни есть мгновенія. Для простѣйшаго рѣшенія подобныхъ задачъ, полезно освоиться съ различными выраженіями проэкцій силы на направленіяхъ, чаще другихъ встрѣчающихся. Опредѣлимъ сперва проэкцію силы на перпендикулярѣ къ плоскости кривизны; [Смот. COURBURE (PLAN DE)]. Для этого стоитъ только подставить въ формулу

$$m\frac{d(v\,Cos\,\omega)}{dt}=m\left(\frac{dv}{dt}\,Cos\,\omega-v\,Sin\,\omega\,\frac{d\omega}{dt}\right)$$

величины v и ω относящіяся къ разсматриваемому нами случаю. Но, въ настоящемъ случаѣ, $\omega=\frac{\pi}{2}$, и сверхъ того легко видѣть, что $\frac{d\omega}{dt}=o$; дѣйствительно, ω есть уголъ, составляемый касательною къ кривой съ перпендикуляромъ къ плоскости кривизны, а $\omega+d\omega$ изображаетъ уголъ смежной касательной съ тѣмъ же перпендикуляромъ; но какъ эти двѣ касательныя заключаются въ плоскости кривизны, то и будетъ въ одно время $\omega=\frac{\pi}{2}$ и $\omega+d\omega=\frac{\pi}{2}$, и слѣдовательно $d\omega=o$. Отсюда заключаемъ, что проэкція силы на направленіи перпендикулярномъ къ плоскости кривизны, равна нулю, то есть, что самая сила заключается въ этой плоскости.

Легко вывести выраженія проэкцій силы на разныхъ направленіяхъ. Приводимъ нѣкоторыя изъ этихъ выраженій, которыя доказаны въ статьѣ: FORCE.

На касательной . . . . . $m\frac{dv}{dt}$

На радіусъ кривизны: $\frac{mv^2}{\rho}$, (ρ изображаетъ радіусъ кривизны).

На прямоугольныхъ координатныхъ осяхъ:
$$\begin{cases}\text{на оси } x \ldots\ldots m\frac{d^2x}{dt^2}\\ \text{на оси } y \ldots\ldots m\frac{d^2y}{dt^2}\\ \text{на оси } z \ldots\ldots m\frac{d^2z}{dt^2}\end{cases}$$

На радіусъ векторъ: $m\left[\frac{d^2r}{dt^2}+\frac{1}{r}\left(\frac{dr^2}{dt^2}-v^2\right)\right]$

и проч. и проч.

Переходимъ теперь къ приложеніямъ приведенныхъ формулъ.

a.) Положимъ, что требуется найти силу, отъ дѣйствія которой вещественная точка двигалась бы по плоской кривой такъ, чтобы радіусъ векторъ описывалъ площади, пропорціональныя временамъ около точки, данной въ плоскости траэкторіи. Такъ какъ данная кривая есть плоская, то достаточно имѣть двѣ проэкціи силы на двухъ прямыхъ, заключающихся въ плоскости кривой. Мы выберемъ на этотъ конецъ радіусъ векторъ и перпендикуляръ къ этому радіусу. Найдемъ сперва проэкцію на послѣднемъ изъ сихъ двухъ направленій. Примемъ за координатную плоскость x—овъ и y—овъ плоскость кривой линіи; изобразивъ чрезъ α и β углы, составляемые перпендикуляромъ къ радіусу вектору съ координатными осями x и y, получимъ для искомой проэкціи силы выраженіе $m\left(Cos\,\alpha\frac{d^2x}{dt^2}+Cos\,\beta\frac{d^2y}{dt^2}\right)$. Но, по условію перпендикулярности радіуса вектора и прямой, на которую проэктировали силу, имѣемъ $x\,Cos\,\alpha+y\,Cos\,\beta=o$, откуда $\frac{Cos\,\alpha}{y}=-\frac{Cos\,\beta}{x}=\pm\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\pm\frac{1}{r}$, разумѣя подъ r длину радіусъ вектора. И такъ, $Cos\,\alpha=\pm\frac{y}{r}$, $Cos\,\beta=\mp\frac{x}{r}$, почему искомая проэкція приметъ видъ $\pm m\left(\frac{yd^2x-xd^2y}{dt^2}\right)=\pm m\frac{d(ydx-xdy)}{dt^2}$.

Но извѣстно изъ Геометріи, что $ydx-xdy$ изображаетъ удвоенный элементъ площади, описываемой радіусомъ векторомъ *); слѣдователь-

---

*) Чтобъ доказать это предложеніе, вспомнимъ только, что если примемъ одинъ уголъ треугольника въ началѣ координатъ, и предположимъ, что координаты двухъ другихъ угловъ изображены чрезъ x и y, x' и y', то площадь треугольника выразится чрезъ $\frac{x'y-y'x}{2}$. Элементъ площади, описываемой радіусомъ векторомъ, можетъ быть принимаемъ за треугольникъ; координаты полюса радіуса вектора, то есть одного изъ угловъ треугольника, равны нулю, а координаты двухъ другихъ угловъ, будутъ x и y, $x+dx$ и $y+dy$; подставляя въ выраженіе $\frac{x'y-y'x}{2}$, $x+dx$ на мѣсто x', а $y+dy$ на мѣсто y', получимъ $\frac{ydx-xdy}{2}$. Это самое предложеніе доказано другимъ образомъ въ примѣчаніи на стр. 167 (Часть I) нашего Лексикона.

но, изобразивъ чрезъ c площадь, описываемую радіусомъ векторомъ въ единицу времени, получимъ $ydx - xdy = \pm 2cdt$, откуда $d(ydx - xdy) = o$. Это уравненіе показываетъ, что проэкція силы на направленіи перпендикулярномъ къ радіусу вектору, равна нулю. И такъ сила направляется по радіусу вектору, и слѣдовательно направленіе ея проходитъ чрезъ центръ, около котораго радіусъ векторъ описываетъ площади, пропорціональныя временамъ.

Остается теперь опредѣлить проэкцію силы на радіусѣ векторѣ; очевидно что эта проэкція не разнится отъ самой силы по величинѣ своей, а развѣ только по знаку. И такъ, изобразивъ чрезъ R неизвѣстную силу, получимъ

$$R = \pm m\left[\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{1}{r}\left(\frac{dr^2}{dt^2} - v^2\right)\right];$$

знакъ $+$ принадлежитъ тому случаю, когда R направляется по радіусу вектору, то есть, когда центральная сила отталкивающая, а знакъ $-$ относится къ предположенію силы притягательной. Введемъ на мѣсто прямоугольныхъ координатъ x и y полярныя r и p, такъ чтобы $x = r\,Cos p$, $y = r\,Sin p$. Найдется $v^2 = \frac{dr^2}{dt^2} + r^2\frac{dp^2}{dt^2}$, и слѣдовательно $R = \pm m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{dp^2}{dt^2}\right)$.

Но легко видѣть, что условіе пропорціональности площадей къ временамъ выражается въ полярныхъ координатахъ уравненіемъ $r^2dp = 2cdt$, откуда $r\frac{dp^2}{dt^2} = \frac{4c^2}{r^3}$, почему $R = \pm m\left(\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{4c^2}{r^3}\right)$.

Теперь стоитъ только освободить вторую часть послѣдней формулы отъ дифференціала времени; для этого, имѣемъ $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dp}\cdot\frac{dp}{dt}$, или, въ слѣдствіе уравненія площадей, изъ котораго $\frac{dp}{dt} = \frac{2c}{r^2}$, получимъ $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dp}\cdot\frac{2c}{r^2} = -2c\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dp}$; дифференцируя еще одинъ разъ относительно t, найдемъ

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -2c\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dp^2}\cdot\frac{dp}{dt} = -\frac{4c^2}{r^2}\cdot\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dp^2},$$

откуда окончательно

$$R = \mp\frac{4c^2m}{r^2}\left[\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dp^2} + \frac{1}{r}\right].$$

Очевидно, что сила R не можетъ быть опредѣлена покамѣстъ видъ кривой, описываемой матеріальною точкою будетъ неизвѣстенъ; но когда кривая дана по своему уравненію между r и p, то легко найти выраженіе $\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dp^2}$ въ функціи r, и слѣдовательно самую силу R. Положимъ напримѣръ, что описываемая кривая есть *эллипсъ*, котораго одинъ фокусъ совпадаетъ съ полюсомъ радіуса вектора. Изобразивъ чрезъ a большую полу-ось, а чрезъ e эксцентрицитетъ эллипса, получимъ

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\,Cos p}, \text{ откуда } \frac{1}{r} = \frac{1+e\,Cos p}{a(1-e^2)};$$

слѣдовательно

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dp^2} = -\frac{e\,Cos p}{a(1-e^2)}.$$

И такъ, найдется

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dp^2} + \frac{1}{r} = \frac{1}{a(1-e^2)},$$

и наконецъ

$$R = \mp\frac{4c^2m}{a(1-e^2)}\cdot\frac{1}{r^2}.$$

Очевидно, что въ этой формулѣ должно допустить знакъ $+$, а это показываетъ что сила R притягательная; сверхъ того, заключаемъ изъ этой же формулы, что найденная сила обратно пропорціональна квадрату разстоянія движущейся точки отъ притягательнаго центра *).

На такомъ основаніи *Нютонъ* опредѣлилъ силу, движущую планетныя массы въ орбитахъ эллиптическихъ, имѣющихъ фокусы свои въ центрѣ солнца, и радіусы векторы которыхъ описываютъ около центра сего свѣтила площади, пропорціональныя временамъ. Нютонъ нашелъ предыдущую величину для R, выражающую законъ всеобщаго тяготѣнія. Смот. ATTRACTION, CENTRALES (FORCES).

b.) Приведенный частный случай показываетъ какимъ образомъ по данному движенію опредѣляется сила, производящая это движеніе. Рѣшеніе обратнаго вопроса составляетъ собственно *теорію криволинейнаго движенія*. Предполагается, что дана сила по величинѣ и по направленію,

*) Эта самая задача рѣшена въ статьѣ: Centrales (forces).

а ищется движеніе, производимое ею. Легко составить уравненія, въ которыхъ заключается рѣшеніе этого вопроса. Дѣйствительно, изобразимъ чрезъ R движущую силу, а чрезъ λ уголъ, составляемый ею съ даннымъ направленіемъ A, то есть съ тѣмъ самымъ, которое съ касательною къ кривой составляетъ уголъ ω; $R\,Cos\,\lambda$ изобразитъ проэкцію силы R на направленіи A. Но мы видѣли выше, что $m\frac{d(v\,Cos\omega)}{dt}$ выражаетъ эту самую проэкцію; слѣдовательно

$$(A)\qquad R\,Cos\,\lambda = m\frac{d(v\,Cos\omega)}{dt}.$$

Вотъ общее уравненіе движенія матеріальной точки, подверженной дѣйствію какой ни есть силы R. Если бы матеріальная точка была побуждаема нѣсколькими силами P', P'', P''', ..., то надлежало бы совокупить ихъ въ одну равнодѣйствующую (Смот. COMPOSITION DES FORCES), и означивъ ее чрезъ R, опять употребили бы ту же формулу (A).

Уравненіе (A) не опредѣляетъ вполнѣ разсматриваемаго движенія; и дѣйствительно, легко видѣть, что при одной и той же силѣ, движеніе можетъ быть весьма разнообразно, смотря на положеніе движущейся точки, также на величину и направленіе ея скорости въ опредѣленное мгновеніе. Не должно относить этого обстоятельства къ неполнотѣ приведенной нами формулы: заключаемъ изъ этого, что по данной только силѣ, невозможно опредѣлить всѣхъ обстоятельствъ движенія. Надобно къ знанію силы прибавить еще, что для опредѣленнаго времени $t=\tau$, положеніе движущейся точки, величина и направленіе ея скорости извѣстны. Такъ напримѣръ можно положить, что для $t=\tau$, имѣемъ

$$x=a,\ y=b,\ z=c,\ \frac{dx}{dt}=\alpha,\ \frac{dy}{dt}=\beta,\ \frac{dz}{dt}=\gamma,$$

гдѣ x, y, z изображаютъ координаты движущейся точки, а $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, проэкціи скорости на трехъ координатныхъ осяхъ. Эти проэкціи, какъ извѣстно, совершенно опредѣляютъ величину и направленіе скорости.

Для употребленія формулы

$$R\,Cos\,\lambda = m\frac{d(v\,Cos\omega)}{dt},$$

стоитъ только предположить, что направленіе A попеременно совпадаетъ съ тремя направленіями, незаключающимися въ одной плоскости. Такимъ образомъ получатся три уравненія, которыя въ совокупности съ условіемъ объ извѣстномъ состояніи движущейся точки въ данное мгновеніе, будутъ необходимы, и вмѣстѣ съ тѣмъ достаточны, для опредѣленія всѣхъ обстоятельствъ разсматриваемаго движенія. Что касается до выбора проэкцій, то это будетъ зависѣть отъ проницательности и искусства аналиста; но несомнѣнно, что при удачномъ выборѣ проэкцій, должно ожидать значительныхъ упрощеній въ вычисленіяхъ.

Положимъ, напримѣръ, что желаемъ опредѣлить движеніе точки m, побуждаемой силою, которая постоянно направляется къ неподвижному центру C (черт. 15 Листъ VI), и выражается нѣкоторою функціею разстоянія r точки m отъ C. Пусть будетъ R эта сила. Сверхъ того, изобразимъ чрезъ β скорость движущейся точки, соотвѣтствующую извѣстному мгновенію, которое примемъ за начало времени, а чрезъ α уголъ, составляемый направленіемъ скорости β съ радіусомъ векторомъ $\overline{CA}=a$. Означимъ чрезъ δ уголъ, заключающійся между радіусомъ векторомъ a и неподвижною прямою CB, взятою по произволенію. По истеченіи времени t, движущаяся точка перейдетъ въ положеніе m; вопросъ состоитъ въ опредѣленіи всѣхъ обстоятельствъ ея движенія. Во первыхъ легко видѣть, что движеніе будетъ происходить въ плоскости, проходящей чрезъ неподвижный центръ C и чрезъ направленіе AD начальной скорости β. — И такъ, стоитъ только предположить, что направленіе A совпадаетъ съ двумя какими ни есть прямыми, заключающимися въ плоскости движенія. За одну изъ сихъ прямыхъ мы возьмемъ линію, перпендикулярную къ радіусу вектору, а за другую, касательную къ траэкторіи. Разсмотримъ сперва проэкцію силы на послѣднемъ изъ сихъ двухъ направленій. Если изобразимъ чрезъ v скорость движущейся точки, то проэкція силы R на касательной къ траэкторіи будетъ $-R\frac{dr}{vdt}$, ибо легко видѣть, что $-\frac{dr}{vdt}$ изображаетъ косинусъ угла, составляемаго радіусомъ векторомъ съ касательною къ траэкторіи. Но, съ другой стороны, та же проэкція выражается чрезъ $\frac{dv}{dt}$; слѣдовательно

$$m\frac{dv}{dt} = -R\frac{dr}{vdt},\ \text{или, полагая}\ \frac{R}{m} = P,$$

$$(B)\qquad vdv = -Pdr.$$

Проэкція на линію, перпендикулярную къ радіусу вектору, равна нулю; но она выражается также чрезъ

$$\pm\frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2} = \pm\frac{d\left(\frac{xdy - ydx}{dt}\right)}{dt} = \pm\frac{d(r^2dp)}{dt^2},$$

разумѣя подъ p перемѣнный уголъ BCm (черт. 15); слѣдовательно

$$(C)\qquad \frac{d(r^2dp)}{dt^2} = 0.$$

Уравненія (B) и (C) суть безъ сомнѣнія простѣйшія изъ всѣхъ, которыя могутъ быть составлены для рѣшенія занимающаго насъ вопроса. Интегрируя ихъ отъ $t=0$, найдемъ непосредственно

$$v^2 = \beta^2 - 2\int_a^r Pdr \quad \text{и} \quad r^2\frac{dp}{dt} = 2c;$$

послѣднее уравненіе показываетъ, что площади, описываемыя радіусомъ векторомъ, пропорціональны временамъ, а постоянное количество c изображаетъ площадь, описанную радіусомъ векторомъ въ единицу времени. Если, на мѣсто квадрата скорости v^2, подставимъ равную ему величину $\frac{dr^2 + r^2dp^2}{dt^2}$, то первое уравненіе приметъ видъ

$$\frac{dr^2 + r^2dp^2}{dt^2} = \beta^2 - 2\int_a^r Pdr,$$

или, по причинѣ $r\frac{dp}{dt} = \frac{2c}{r}$,

$$\frac{dr^2}{dt^2} = \beta^2 - \frac{4c^2}{r^2} - 2\int_a^r Pdr.$$

Это уравненіе, въ которомъ перемѣнныя тотчасъ отдѣляются, доставляетъ

$$(D)\qquad dt = \pm\frac{dr}{\sqrt{\beta^2 - \frac{4c^2}{r^2} - 2\int_a^r Pdr}},$$

и слѣдовательно

$$(E)\qquad dp = \mp\frac{2cd\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\beta^2 - \frac{4c^2}{r^2} - 2\int_a^r Pdr}}.$$

Нельзя извлечь никакихъ слѣдствій изъ формулъ (D) и (E), пока не дана функція радіуса вектора r, изображающая силу P; мы можемъ только во второй изъ сихъ формулъ опредѣлить постоянную величину c. — Для этого надобно найти площадь, описываемую радіусомъ векторомъ въ элементѣ времени dt, и раздѣлить ее на dt. Въ первое мгновеніе, считая отъ начала движенія, матеріальная точка опишетъ элементарное пространство $AA' = \beta dt$; слѣдовательно площадь треугольника ACA', разнствующая отъ площади сектора ACN, дѣйствительно описываемаго радіусомъ векторомъ, только величинами безконечно малыми порядковъ превышающихъ первый, выразится чрезъ $\frac{a\beta \operatorname{Sin} a.dt}{2}$; и такъ, раздѣляя на dt, получимъ $c = \frac{a\beta \operatorname{Sin} a}{2}$.

Положимъ въ частности $P = \frac{k}{r^2}$, разумѣя подъ k постоянный коэффиціентъ. Это предположеніе будетъ относиться къ закону всеобщаго тяготѣнія. Получимъ

$$\int_a^r Pdr = -k\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

и слѣдовательно, принявъ въ соображеніе одно уравненіе (E), опредѣляющее видъ траэкторіи, найдемъ

$$dp = \mp\frac{2cd\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\beta^2 - \frac{2k}{a} + \frac{2k}{r} - \frac{4c^2}{r^2}}},$$

или

$$dp = \mp\frac{2cd\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\beta^2 - \frac{2k}{a} + \frac{k^2}{4c^2} - \left(\frac{2c}{r} - \frac{k}{2c}\right)^2}}.$$

Легко видѣть, что величина $\beta^2 - \frac{2k}{a} + \frac{k^2}{4c^2}$ всегда положительная; дѣйствительно, если на мѣсто постоянной c подставимъ ея величину, то найдемъ

$$\beta^2 - \frac{2k}{a} + \frac{k^2}{4c^2} = \beta^2 - \frac{2k}{a} + \frac{k^2}{a^2\beta^2 \operatorname{Sin}^2 a}$$

$$= \beta^2 - \frac{2k}{a} + \frac{k^2(\operatorname{Sin}^2 a + \operatorname{Cos}^2 a)}{a^2\beta^2 \operatorname{Sin}^2 a}$$

$$= \left(\beta - \frac{k}{a\beta}\right)^2 + \frac{k^2}{a^2\beta^2}\cdot \operatorname{Cotang}^2 a,$$

а послѣднее количество, какъ сумма двухъ квадратовъ, очевидно будетъ положительное. Принявъ для сокращенія $\beta^2 - \frac{2k}{a} + \frac{k^2}{4c^2} = b^2$, получимъ

$$dp = \mp \frac{2cd\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{b^2 - \left(\frac{2c}{r} - \frac{2c}{k}\right)^2}}.$$

Для интегрированія положимъ $\frac{2c}{r} - \frac{k}{2c} = b\,Cos\,\varphi$; найдемъ: $dp = \pm d\varphi$ откуда $\varphi = \pm(p + \varpi)$ разумѣя подъ ϖ постоянную величину. Слѣдовательно

$$\frac{2c}{r} - \frac{k}{2c} = b\,Cos(p + \varpi),$$

и наконецъ

$$r = \frac{\frac{4c^2}{k}}{1 + \frac{2bc}{k}\,Cos(p + \varpi)}.$$

Вотъ уравненіе траэкторіи; оно, какъ извѣстно, принадлежитъ *коническимъ сѣченіямъ*. Если $\frac{2bc}{k} < 1$, то кривая описываемая матеріальною точкою, будетъ *эллипсъ*; когда $\frac{2bc}{k} = 1$, то траэкторія будетъ *парабола*; наконецъ, если $\frac{2bc}{k} > 1$, то получится *иперболa*. Эти самыя условія могутъ быть выражены еще слѣдующимъ образомъ:

Для эллипса: $\frac{4c^2b^2}{k^2} < 1$

Для параболы $\frac{4c^2b^2}{k^2} = 1$

Для иперболы: $\frac{4c^2b^2}{k^2} > 1$;

или, подставляя на мѣсто b^2 величину $\beta^2 - \frac{2k}{a} + \frac{k^2}{4c^2}$, получимъ условія:

Для эллипса: $\frac{4c^2}{k^2}\left(\beta^2 - \frac{2k}{a}\right) < 0$

Для параболы: $\frac{4c^2}{k^2}\left(\beta^2 - \frac{2k}{a}\right) = 0$

Для иперболы: $\frac{4c^2}{k^2}\left(\beta^2 - \frac{2k}{a}\right) > 0$,

и, раздѣляя на положительную величину $\frac{4c^2}{k^2}$, найдемъ окончательно:

Для эллипса: $\beta^2 < \frac{2k}{a}$

Для параболы: $\beta^2 = \frac{2k}{a}$

Для иперболы: $\beta^2 > \frac{2k}{a}$.

c.) Обратимся опять къ уравненію (A), которое напишемъ въ видѣ:

$$(F) \qquad R\,Cos\,\lambda - m\frac{d(v\,Cos\,\omega)}{dt} = 0.$$

Для предстоящей намъ цѣли, полезно указать на особенное значеніе формулы (F), оправданное въ статьѣ FORCE, къ которой и отсылаемъ читателей.

Вѣщественная точка изъявляетъ всегда сопротивленіе или оказываетъ противодѣйствіе всякой причинѣ, стремящейся перемѣнить ея состояніе. Напряженіе этого противодѣйствія, называемое *силою инерціи*, зависитъ отъ массы матеріальной точки и отъ бо́льшей или ме́ньшей степени, производимой перемѣны въ ея состояніи; что касается до направленія силы инерціи, то оно всегда прямопротивно тому, по которому измѣняется состояніе движущейся точки. Выраженіе $-m\frac{d(v\,Cos\,\omega)}{dt}$ изображаетъ проэкцію силы инерціи на прямой A, составляющей уголъ ω съ касательною къ траэкторіи. Изъ уравненія (F) слѣдуетъ, что движущая сила R уничтожаетъ силу инерціи, соотвѣтствующую той перемѣнѣ состоянія, которой подверглась вещественная точка. Въ движеніяхъ свободныхъ это всегда справедливо, то есть, во всякомъ случаѣ движущая сила уничтожаетъ силу инерціи, которая обнаруживается отъ перемѣны, происшедшей въ движеніи тѣла.

Разсмотримъ матеріальную точку m, побуждаемую движущею силою R; положимъ, что еслибъ никакая сила не дѣйствовала на эту точку, то она, въ элементъ времени dt, перешла бы со скоростію v пространство AB (Черт. 16 Листъ VI); но отъ дѣйствія силы R, точка описываетъ прямую AC. Линія BC, безконечно малая втораго порядка, изобразитъ мѣру и силы движущей, и силы инерціи. Та и другая выразится чрезъ $2m\frac{\overline{BC}}{dt^2}$; что касается до ихъ направленій, то они прямопротивны: BC изображаетъ направленіе силы R, а CB, силы инерціи Положимъ теперь, что точка m какимъ либо образомъ принуждена описывать прямую AD въ тотъ же самый элементъ времени dt. Ея сила инерціи будетъ по величинѣ $2m\frac{\overline{DB}}{dt^2}$, а по направленію, прямая DB. Эта сила уже не уничтожится отъ дѣйствія движущей силы R; но ежели совокупимъ эти двѣ силы, то равнодѣйствующая ихъ будетъ $2m\frac{\overline{DC}}{dt^2}$ по величинѣ, а DC по направленію. Когда разсматриваемъ точку свободную, то эта равнодѣйствующая и будетъ препятствовать движущейся точкѣ итти отъ A къ D.

Сказанное здѣсь приводитъ къ одному соображенію, которое весьма полезно въ теоріи движеній, подверженныхъ какимъ либо препятствіямъ. Въ слѣдствіе соображенія, о которомъ говоримъ, мы можемъ допустить, что точка повинуется не движущей силѣ, но что она, въ продолженіе элемента времени dt, описываетъ безконечно малую прямую, отличную отъ той, которую дѣйствительно переходитъ; но, въ такомъ предположеніи, должно будетъ къ этому воображаемому движенію присовокупить дѣйствіе равнодѣйствующей силы инерціи, соотвѣтствующей мнимому движенію, и движущей силы, приложенной къ матеріальной точкѣ.

Положимъ теперь, что матеріальная точка въ движеніи своемъ подвержена препятствію какого угодно рода; въ такомъ случаѣ она не будетъ повиноваться вполнѣ дѣйствію движущей силы, то есть, перемѣна въ ея состояніи дѣлается отличною отъ той, которой бы она подвергалась, еслибъ была свободна. Въ этомъ предположеніи сила инерціи и движущая сила уже не уничтожатся взаимно. Если бы точка была свободна, то, въ силу сказаннаго выше, мы могли бы допустить, что она движется такъ, какъ бы двигалась, бывъ подвержена препятствію; но, въ такомъ случаѣ, къ мгновенному ея перемѣщенію надлежало бы прибавить дѣйствіе равнодѣйствующей движущей силы и силы инерціи. Въ настоящемъ же предположеніи, дѣйствіе, о которомъ говоримъ, должно уничтожаться, то есть, равнодѣйствующая силы движущей и силы инерціи должна стремиться къ произведенію такихъ только перемѣщеній, которыя, по свойству препятствій, невозможны. И такъ чтобы вывести уравненіе движенія матеріальной точки, подверженной препятствіямъ, стоитъ только выразить, что равнодѣйствующая силы инерціи и силы движущей стремится произвести перемѣщенія, невозможныя по роду существующихъ препятствій.

Пусть будетъ Q эта равнодѣйствующая. Разсмотримъ теперь какія перемѣщенія сила Q, приложенная къ матеріальной точкѣ m, можетъ произвести, и какихъ не можетъ. Во первыхъ легко показать, что ежели сила Q можетъ произвести перемѣщенія по извѣстному направленію, то по прямопротивному, перемѣщенія будутъ уже невозможны. Хотя это предложеніе очевидно само собою, однако же мы пояснимъ его. Положимъ, что сила Q (Черт. 17 Листъ VI) въ состояніи двигать точку m какъ по направленію mA, такъ и по прямопротивному mB. Другая сила Q, равная и прямопротивная первой, очевидно способна къ произведенію точно такого же дѣйствія, то есть, она будетъ въ состояніи привести въ движеніе точку m какъ по направленію mB, такъ и по mA. Положимъ что эти двѣ силы Q приложены въ совокупности къ матеріальной точкѣ m, которая, по свойству противополагаемыхъ ей препятствій, можетъ имѣть движеніе только по направленію mA. Точка m должна итти по этому направленію, ибо каждая изъ силъ Q побуждаетъ ее въ эту сторону. Но силы Q равны между собою и прямопротивны; слѣдовательно онѣ взаимно уничтожатся, и поэтому не могутъ произвести никакого перемѣщенія. И такъ, нельзя допустить, чтобы одна и та же сила могла производить перемѣщенія прямопротивныя.

Теперь легко показать, что сила не можетъ производить перемѣщеній по направленію, перпендикулярному къ ея собственному. Дѣйствительно, положимъ что сила Q (Черт. 18 Листъ VI) въ состояніи произвести передвиженіе по направленію mA, перпендикулярному къ mQ; по той же самой причинѣ и перемѣщеніе въ прямопротивную сторону mB будетъ возможно, а это противорѣчитъ тому, что сей-часъ было доказано. Слѣдовательно, сила Q не можетъ передвигать матеріальную точку подъ прямымъ угломъ.

Теперь легко доказать, что сила Q можетъ произвести всякое перемѣщеніе по направленію, составляющему съ ея собственнымъ уголъ острый. Дѣйствительно, допустимъ что одно перемѣщеніе по направленію mA (Черт. 19 Листъ VI) возможно, предполагая уголъ AmQ меньшимъ прямаго. Разложимъ силу Q на двѣ mA и mB (Смот. PARALLÉLOGRAMME DES FORCES), изъ которыхъ послѣдняя перпендикулярна къ mA. Сила mB, какъ сказано было выше, не можетъ произвести перемѣщенія по направленію mA; и такъ, мы можемъ откинуть составляющую mB, ибо, по предположенію, только перемѣщеніе по mA, и будетъ возможно. Остается одна сила mA, которая безъ сомнѣнія произведетъ перемѣщеніе по собственному своему направленію. Такъ какъ сила Q въ состояніи произвести перемѣщенія подъ всѣми возможными острыми углами, то, въ слѣдствіе перваго предложенія, заключаемъ, что эта сила не можетъ произвести перемѣщенія ни подъ какимъ тупымъ угломъ.

И такъ, изъ перечня разсмотрѣнныхъ нами случаевъ, заключаемъ, что сила можетъ произвести перемѣщенія подъ всѣми возможными острыми углами, а не можетъ производить ихъ ни подъ прямымъ угломъ, ни подъ тупыми.

Теперь легко найти условія, необходимыя для того чтобы равнодѣйствующая Q силы движущей и силы инерціи не производила никакого дѣйствія. Для этого, равнодѣйствующая должна составлять съ направленіями всѣхъ перемѣщеній, допускаемыхъ свойствомъ препятствій, углы или прямые, или тупые, или, эта равнодѣйствующая должна равняться нулю. И такъ, если означимъ чрезъ θ уголъ составляемый силою Q съ направленіемъ какого ни есть возможнаго перемѣщенія, то окажется, что должно быть

$$Q \cos\theta < 0 \quad \text{или} = 0.$$

Ежели, сверхъ того, означимъ чрезъ λ и ω углы, составляемые направленіями движущей силы R и касательною къ траэкторіи съ направленіемъ возможнаго перемѣщенія, къ которому относится уголъ θ, то получимъ

$$(G) \qquad Q \cos\theta = R \cos\lambda - \frac{md(v \cos\omega)}{dt} \leqq 0.$$

Вотъ общее уравненіе движеній, подверженныхъ препятствіямъ. Мы приложимъ формулу (G) только къ одному случаю, именно къ тому, когда матеріальная точка должна описывать данную кривую, и не можетъ отдѣлиться отъ нея. Пусть будетъ BA элементъ данной кривой $LBAM$ (черт. 20 Листъ VI), и положимъ что движущаяся точка находится въ m. Возможныя перемѣщенія будутъ только отъ m къ A или отъ m къ B; но чтобы сила Q не составляла съ направленіями сихъ возможныхъ перемѣщеній угловъ острыхъ, она не должна составлять и тупыхъ. Дѣйствительно, если допустимъ, что она составляетъ уголъ тупой съ направленіемъ mB, то окажется, что съ направленіемъ mA эта сила составляетъ уголъ острый, и наоборотъ; и такъ, сила Q должна быть нормальна къ кривой $LBAM$ въ точкѣ m, въ слѣдствіе чего ея проэкція на касательной будетъ нуль. Предположивъ что λ изображаетъ уголъ, составляемый направленіемъ движущей силы R съ касательною, и сдѣлавъ $\omega = 0$, уравненіе (G) приметъ видъ

$$(H) \qquad R \cos\lambda - m\frac{dv}{dt} = 0.$$

Изобразивъ теперь чрезъ X, Y, Z составляющія движущей силы R по тремъ прямоугольнымъ осямъ, а чрезъ x, y, z координаты движущейся точки, получимъ

$$\cos\lambda = \frac{Xdx + Ydy + Zdz}{Rds},$$

разумѣя подъ ds элементъ дуги траэкторіи. Слѣдовательно, принявъ въ соображеніе равенство $ds = vdt$, уравненіе (H) получитъ такой видъ:

$$mvdv = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Это уравненіе есть то̀, которое обыкновенно предлагаютъ въ Механикѣ для движенія точки по данной кривой.

Читатели найдутъ во многихъ мѣстахъ нашего Лексикона приложенія изложенной здѣсь теоріи криволинейнаго движенія. Преимущественно отсылаемъ къ статьямъ: APPROCHES (COURBE AUX—EGALES), BALISTIQUE, BRACHYSTOCHRONE, CENTRALES (FORCES), PENDULE, TRAJECTOIRE.

Мы не разсматривали здѣсь того случая, когда движущаяся точка подчинена условіямъ, измѣняющимся вмѣстѣ со временемъ. Отсылаемъ по сему предмету къ Разсужденію Г. Остроградскаго: *Considérations générales sur les déplacements instentanés des systémes assujetis à des conditions variables.* (Memoires de l'Acad. Imp. des Sciences de St. Petersbourg, Sciences Math. Phys. et Natur. T. III, 1838.)

Скажемъ въ заключеніе, что въ изложеніи криволинейнаго движенія, мы придерживались воззрѣнія Г. Остроградскаго на этотъ предметъ. Читатели, желающіе ближе ознакомиться съ этою теоріею, найдутъ въ литографированной его Механикѣ, на Французскомъ языкѣ, всѣ подробности, которыя мы должны были пропустить. Любители математики съ нетерпѣніемъ ожидаютъ появленія на Русскомъ языкѣ этого классическаго сочиненія.

CY.

CYANOMÈTRE. ЦІАНОМЕТРЪ, СИНЕМѢРЪ. Инструментъ, посредствомъ котораго измѣряютъ степень густоты синяго цвѣта неба, по мѣрѣ того какъ подымаются въ атмосферѣ на высоты болѣе и болѣе значительныя.

CYCLE. (Хрон.) **КРУГЪ.** Періодъ времени, состоящій изъ опредѣленнаго числа лѣтъ, въ продолженіи которыхъ совершаются нѣкоторыя явленія въ извѣстномъ порядкѣ. Главные круги суть: *кругъ луны*, *кругъ солнца* и *индиктъ*.

Кругъ луны (*cycle lunaire*), открытый въ Греціи *Метономъ* почти за 430 лѣтъ до Р. Х. есть періодъ изъ 19 лѣтъ; въ этомъ промежуткѣ времени заключаются всѣ перемѣны дней новолунія въ разсужденіи дней мѣсяца, такъ что по прошествіи одного такого круга, дни новолунія, въ продолженіи слѣдующихъ 19 лѣтъ, упадаютъ опять на прежніе дни мѣсяца. Это открытіе показалось Грекамъ столь изящнымъ, что въ Аѳинахъ вырѣзали золотыми буквами дни мѣсяца, на которые упадаютъ новолунія въ продолженіи полнаго круга луны, и выставили эту таблицу на главной площади города. По этой-то причинѣ годъ круга луны и теперь еще называется *золотымъ числомъ* (*nombre d'or*).

Кругъ солнца (*cycle solaire*) есть періодъ времени, состоящій изъ 28 лѣтъ; въ этомъ кругѣ заключаются всѣ перемѣны дней недѣли въ разсужденіи дней мѣсяца. По прошествіи каждыхъ 28 лѣтъ, дни недѣли упадаютъ опять на тѣ же дни мѣсяца, какъ за 28 лѣтъ назадъ.

Кругъ индикта или просто *индиктъ* (*cycle d'indiction*) содержитъ въ себѣ 15 лѣтъ. Онъ употребляется въ Церковномъ Календарѣ, и не имѣетъ никакихъ астрономическихъ основаній.

Сверхъ приведенныхъ трехъ круговъ, были придуманы еще и нѣкоторые другіе. *Пасхальный кругъ* (*cycle paschal*), получаемый чрезъ перемноженіе круга луны на кругъ солнца, то есть 19 на 28, состоитъ изъ 532 лѣтъ. *Періодъ Іюліанскій* (*periode Julienne*), равный 7980 годамъ, получается перемноживъ между собою числа 19, 28 и 15, означающія круги луны, солнца и индикта.

Что касается до самаго опредѣленія трехъ главныхъ круговъ, то отсылаемъ къ статьѣ CALENDRIER.

CYCLIQUE. ЦИКЛИЧЕСКІЙ. Относящійся къ кругамъ или опредѣленнымъ періодамъ времени. Смот. выше.

CYCLOIDAL. (Геом.) **ЦИКЛОИДАЛЬНЫЙ.** Принадлежащій или относящійся къ циклоидѣ. *Pendule cycloïdal*; *циклоидальный маятникъ*. *Espace cycloïdal*; *циклоидальная площадь*. Смот. ниже. *Courbe cycloïdale*; *циклоидальная кривая*. Смот. конецъ статьи: DÉVELOPPÉE.

CYCLOIDE (Отъ Греч. *κυκλος*, *кругъ*), **TROCHOIDE** (отъ Греч. *τροχος*, *колесо*) или **ROULETTE** *). (Геом.) **ЦИКЛОИДА.** Одна изъ примѣчательнѣйшихъ трансцендентныхъ кривыхъ. Когда кругъ катится по прямой линіи, то каждая точка, взятая на его окружности, описываетъ *циклоиду*.

Пусть будетъ M точка, которая, при движеніи круга производящаго EMD (черт. 2 Листъ VII) по прямой AX, описываетъ циклоиду $AMHNB$. Ясно, что если примемъ начало движенія въ точкѣ A, и предположимъ что кругъ катится отъ лѣвой руки къ правой, то есть отъ A къ B, то при положеніи EMD круга, длина дуги его ME будетъ равняться прямой линіи AE. И такъ, по свойству циклоиды будетъ

$$AE = \text{дугѣ } ME.$$

Чтобы найти уравненіе циклоиды въ прямоугольныхъ координатахъ, пусть будетъ a радіусъ EC круга производящаго EMD, A начало координатъ, AX и AY прямоугольныя координатныя оси, и слѣдовательно $AP = x$, $PM = y$. Изобразимъ сверхъ того чрезъ φ уголъ MCE. Очевидно получимъ

*) Въ обширномъ смыслѣ, подъ наименованіемъ *Roulettes* (отъ глагола *rouler*, *катиться*) разумѣютъ кривыя, образуемыя движеніемъ точки, взятой на данной кривой, когда сія послѣдняя катится по обводу другой, данной же кривой линіи.

$AP = AE - PE = AE - Mq$ и $PM = EC - Cq$; но $AE =$ дугѣ $ME = a\varphi$, $MQ = a \, Sin \varphi$, $Cq = a \, Cos \varphi$; слѣдовательно

$$(1) \quad \begin{cases} x = a(\varphi - Sin \varphi) \\ y = a(1 - Cos \varphi). \end{cases}$$

Вотъ два уравненія циклоиды между прямоугольными координатами x, y и вспомогательнымъ угломъ φ. Для исключенія сего послѣдняго выводимъ изъ уравненія $y = a \, (1 - Cos \varphi)$

$$Cos \varphi = \frac{a - y}{a} \quad \text{или} \quad Sin \varphi = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a}$$

и

$$\varphi = arc \, Cos \frac{a-y}{a} = arc \, Sin \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a};$$

подставляя эти величины въ уравненіе...... $x = a(\varphi - Sin \varphi)$, получаемъ

$$(2) \quad \begin{cases} x = a . \, arc \, Cos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2} \quad \text{или} \\ x = a . \, arc \, Sin \frac{\sqrt{ay - y^2}}{a} - \sqrt{2ay - y^2}. \end{cases}$$

Легко усмотрѣть, что циклоида не прекращается въ точкѣ B, въ которой производящій кругъ оканчиваетъ полной оборотъ. И въ самомъ дѣлѣ, должно допустить, что кругъ продолжаетъ катиться по прямой AX, и при такомъ движеніи, какъ слѣдуетъ изъ уравн. (2), описываетъ безконечное число частей, равныхъ AHB. По лѣвую сторону точки A будетъ то же самое: дѣйствительно, можно вообразить, что кругъ приходитъ въ положеніи A по совершеніи безконечнаго числа оборотовъ. Всѣ эти обстоятельства обнаруживаются изъ уравн. (2) замѣтивъ, что одинъ и тотъ же синусъ соотвѣтствуетъ безконечному числу дугъ. И такъ, если изобразимъ чрезъ φ наименьшую дугу, коей синусъ равенъ $\frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a}$, то этотъ самый синусъ будетъ принадлежать и дугамъ

$$\ldots\ldots\ldots, -(6\pi - \varphi), \; -(4\pi - \varphi), \; -(2\pi - \varphi), \; 2\pi + \varphi, \; 4\pi + \varphi, \; 6\pi + \varphi, \ldots\ldots\ldots$$

изъ чего заключаемъ, что x можетъ принимать всѣ возможныя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$, и что слѣдовательно, циклоида простирается въ безконечность какъ съ правой, такъ и съ лѣвой стороны.

Дифференціальное уравненіе циклоиды получится, или чрезъ непосредственное дифференцированія одного изъ двухъ уравн. (2), или чрезъ исключеніе вспомогательнаго угла φ изъ дифференціаловъ уравненій (1). Послѣдній способъ доставляетъ

$$\frac{dx}{d\varphi} = a(1 - Cos \varphi) = y$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = a \, Sin \varphi = \sqrt{2ay - y^2};$$

слѣдовательно, по причинѣ $\dfrac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{dy}{dx}$,

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y} \quad \text{или} \quad dx = \frac{ydy}{\sqrt{2ay - y^2}}.$$

Вотъ дифференціальное уравненіе циклоиды, отнесенной къ прямоугольнымъ осямъ. Посредствомъ предыдущей величины для $\frac{dy}{dx}$ очень легко построить касательную къ циклоидѣ. Дѣйствительно, такъ какъ $y\frac{dy}{dx}$ есть общее выраженіе подпормальной, то найдемъ, что эта длина въ настоящемъ случаѣ равна $\sqrt{2ay - y^2}$, то есть линіи PE, ибо $PE = Mq$, а линія Mq, по свойству круга, равна $\sqrt{Eq \times qD} = \sqrt{y(2a - y)}$. И такъ, нормаль циклоиды изобразится по величинѣ и по направленію линіею ME, которая, по свойству же круга, есть средняя пропорціональная между линіею $Eq = y$ и цѣлымъ діаметромъ $ED = 2a$. Слѣдовательно

$$(4) \quad \text{Нормаль } ME = \sqrt{2ay}.$$

Теперь, для проведенія касательной въ точкѣ M циклоиды, стоитъ только чрезъ эту точку провести линію, перпендикулярную къ нормальной ME; очевидно, что прямая, соединяющая M съ концомъ D діаметра круга производящаго, будетъ искомая касательная, ибо извѣстно, что углы при окружности, опирающіеся на діаметръ, суть прямые. Основываясь на этомъ замѣчаніи выводимъ весьма легкій способъ для проведенія касательной къ циклоидѣ, не имѣя надобности строить производящій кругъ для каждой разсматриваемой точки. Въ самомъ дѣлѣ, начертимъ гдѣ нибудь на оси AX производящій кругъ $QmRn$, и перпендикулярный къ этой оси діаметръ QR. Положимъ, что желаемъ построить касательную къ циклоидѣ въ точкѣ μ, находящейся на части AH; для этого проводимъ линію μL параллельно оси AX, и первую точку пересѣченія круга $QmRn$ съ μL, то есть точку m, соединяемъ съ концомъ R діаметра QR. Линія μt, проведенная параллельно хордѣ mR, будетъ искомая касательная. Если бы данная точка находилась на части HB циклоиды, напримѣръ въ N, то вмѣсто первой точки пересѣченія m на кругѣ $QmRn$, слѣдовало бы разсматривать вторую точку n, и линія Nt', проведенная параллельно хордѣ nR, изобразила бы касательную къ циклоидѣ въ точкѣ N.

Справедливость предложеннаго построенія очевидна; дѣйствительно, если станемъ двигать кругъ $QmRn$ по прямой XA отъ правой руки къ лѣвой такъ, чтобы при этомъ движеніи діаметръ QR оставался перпендикулярнымъ къ оси AX, то когда точка m совмѣстится съ точкою μ на циклоидѣ, движущійся кругъ совмѣстится съ производящимъ кругомъ, соотвѣтствующимъ этой точкѣ μ; касательная къ циклоидѣ совпадетъ съ хордою mR, которая, въ новомъ своемъ положеніи, по свойству движенія круга, будетъ параллельна первоначальному своему направленію.

Для опредѣленія радіуса кривизны циклоиды, надобно найти величину $\frac{d^2y}{dx^2}$; диФФеренцируя первое изъ уравненій (3), найдемъ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{a}{y\sqrt{2ay-y^2}}\cdot\frac{dy}{dx};$$

подставивъ же на мѣсто $\frac{dy}{dx}$ величину, взятую изъ уравн. (3), получимъ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{a}{y^2}.$$

Извѣстно, что радіусъ кривизны ϱ, для какой ни есть плоской кривой, опредѣляется Формулою [Смот. OSCULATEUR (CERCLE)]

$$\varrho=-\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

такъ какъ въ циклоидѣ $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{2ay-y^2}}{y}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{a}{y^2}$, то и найдется для этой кривой

$$\varrho=\frac{\left(\frac{2ay}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{a}\cdot y^2=\frac{(2ay)^{\frac{3}{2}}}{ay}=2\sqrt{2ay}.$$

Но $\sqrt{2ay}$, въ силу Формулы (4), изображаетъ нормаль циклоиды; слѣдовательно, *радіусъ кривизны циклоиды, въ какой ни есть ея точкѣ, равняется удвоенной нормали, соотвѣтствующей той же точкѣ.* На основаніи этого предложенія легко доказать примѣчательное свойство циклоиды, именно, *что эволюта ея есть такая же циклоида, имѣющая относительно первой извѣстное положеніе.*

Вспомнимъ, что эволютою кривой линіи называется геометрическое мѣсто всѣхъ центровъ круговъ кривизны. Слѣдовательно, если продолжимъ нормаль ME циклоиды до M' (черт. 2 Листъ VII), такъ чтобы $EM'=EM$, то линія $MM'=2EM$ изобразитъ радіусъ кривизны, соотвѣтствующій точкѣ M, а точка M' будетъ принадлежать эволютѣ. Сверхъ того, уравненіе $\varrho=2\sqrt{2ay}$ показываетъ, что въ началѣ координатъ A, гдѣ $y=o$, радіусъ кривизны равенъ нулю, а для точки H, для которой $y=2a$, радіусъ кривизны равенъ $4a$; и такъ, если на продолженной ординатѣ HG отложимъ отъ точки G линію $GA'=HG$, то опредѣлимъ точку A', принадлежащую также эволютѣ. Проведемъ теперь чрезъ точку A' прямую $G'G''$, параллельную основанію AB циклоиды, а чрезъ три точки A, M', A' вообразимъ кривую, изображающую эволюту части AMH предложенной циклоиды. Подобно доказать, что кривая $AM'A'$ есть также циклоидальная дуга, коей производящій кругъ равенъ кругу EMD. Для этого продолжимъ діаметръ DE до точки E'; получимъ $EE'=DE$. Далѣе, чрезъ точки E, M' и E' опишемъ кругъ $EM'E'S$; очевидно, что треугольникъ $EM'E'$ будетъ равенъ треугольнику EMD; слѣдовательно, *дуга* $EM'=$*дугѣ* EM, *дуга* $M'E'=$*дугѣ* MD; но линія AG, по свойству циклоиды, равна полуокружности EMD круга производящаго, и сверхъ того линія $AE=$*дугѣ* EM; слѣдовательно $EG=$*дугѣ* MD. Но $EG=E'A'$; а *дуга* $MD=$*дугѣ* $M'E'$, почему $A'E'=$*дугѣ* $E'M'$, а это послѣднее равенство выражаетъ отличительное свойство циклоиды. Точно такимъ образомъ докажется, что эволюта полу-циклоиды HNB будетъ такая же полу-циклоида $A'B$, имѣющая относительно первой положеніе, означенное на чертежѣ.

Такъ какъ длина какой ни есть дуги эволюты кривой линіи опредѣляется разностію двухъ радіусовъ векторовъ этой кривой, примыкающихъ къ крайнимъ точкамъ спрямляемой дуги эволюты

(Смот. DÉVELOPPÉE), то ясно, что длина полу-циклоиды $AM'A'$ равна удвоенному діаметру круга производящаго, то есть линіи $A'H$, ибо радіусы векторы, примыкающіе къ точкамъ A' и A, будутъ соотвѣтственно $4a$ и 0. Отсюда заключаемъ, что длина цѣлой циклоиды AHB, состоящей изъ двухъ равныхъ частей AH и HB, равна учетверенному діаметру круга производящаго, то есть $8a$. Это предложеніе будетъ сейчасъ доказано еще другимъ способомъ.

Переходимъ теперь къ опредѣленію длины и площади какой ни есть части циклоиды. Изобразимъ чрезъ s какую угодно циклоидальную дугу, напримѣръ AM; такъ какъ вообще $s=\int\sqrt{dx^2+dy^2}$ (Смот. ARC), то надлежитъ найти dx и dy для циклоиды. Но, въ силу уравненій (1), имѣемъ

$$dx=ad\varphi(1-Cos\varphi),\quad dy=ad\varphi Sin\varphi,$$

откуда

$$dx^2+dy^2=a^2d\varphi^2[(1-Cos\varphi)^2+Sin^2\varphi]=a^2d\varphi^2(2-2\,Cos\varphi),$$

и слѣдовательно, по причинѣ $\sqrt{2-2Cos\varphi}=2Sin\tfrac{1}{2}\varphi$,

$$s=2a\int d\varphi.Sin\tfrac{1}{2}\varphi=4a[C-Cos\tfrac{1}{2}\varphi],$$

гдѣ C изображаетъ постоянную величину. Для опредѣленія C замѣтимъ, что если условимся считать дуги отъ точки A, то будетъ въ одно время $s=0$ и $\varphi=0$; слѣдовательно $0=4a(C-1)$, откуда $C=1$. И такъ

$$s=4a(1-Cos\tfrac{1}{2}\varphi)=8a.\,Sin^2\tfrac{1}{4}\varphi.$$

Чтобы получить длину цѣлой циклоидальной дуги $AMHNB$, стоитъ только положить въ этомъ выраженіи $\varphi=2\pi$, ибо производящій кругъ, достигая точки B, совершаетъ полный оборотъ. Предыдущее уравненіе доставитъ

$$s=8\,a.\,Sin^2\tfrac{1}{2}\pi=8a.$$

Эта формула показываетъ, что *длина цѣлой циклоиды равна учетверенному діаметру производящаго круга*, что было уже найдено выше на другомъ основаніи.

Пусть будетъ теперь s' циклоидальная дуга HM (черт. 2); получимъ $s'=4a-s$, и какъ $s=8a.Sin^2\tfrac{1}{4}\varphi$, то и найдется

$$s'=4a(1-2Sin^2\tfrac{1}{4}\varphi)=4a\,Cos\tfrac{1}{2}\varphi;$$

возвышая въ квадратъ, имѣемъ

$$s'^2=8a.2a\,Cos^2\tfrac{1}{2}\varphi=8a.a(1+Cos\varphi)=8a[2a-a(1-Cos\varphi)];$$

но $a(1-Cos\varphi)=y=PM$; слѣдовательно

$$2a-a(1-Cos\varphi)=DE-PM=HG-KG=HK.$$

Если изобразимъ чрезъ x' линію HK, то получимъ

$$s'^2=8ax'.$$

Вотъ уравненіе циклоиды, выражающее весьма простое отношеніе между дугою s', считаемою отъ вершины H кривой, и стрѣлкою x'; это уравненіе употребляется въ Механикѣ.

Для криволинейной площади, которую изобразимъ чрезъ u, имѣемъ общее выраженіе $u=\int ydx$ (Смот. AIRE). Слѣдовательно для циклоиды, гдѣ $y=a(1-Cos\varphi)$ а $dx=ad\varphi(1-Cos\varphi)$, получимъ

$$u=a^2\int d\varphi(1-Cos\varphi)^2.$$

Но $(1-Cos\varphi)^2=1-2Cos\varphi+Cos^2\varphi$, а $Cos^2\varphi=\tfrac{1}{2}Cos2\varphi+\tfrac{1}{2}$; слѣдовательно

$$u=a^2\int d\varphi(1-Cos\varphi)^2=a^2\int d\varphi(\tfrac{3}{2}-2\,Cos\varphi+\tfrac{1}{2}\,Cos2\varphi).$$

Если возьмемъ интегралъ отъ $\varphi=0$ до $\varphi=2\pi$, то получимъ полную циклоидальную площадь, ограниченную съ одной стороны циклоидальною дугою $AMHNB$, а съ другой, основаніемъ AB. Неопредѣленный интегралъ будетъ

$$u=a^2[\tfrac{3}{2}\varphi-2Sin\varphi+\tfrac{1}{4}Sin\,2\varphi]+\text{пост.};$$

взявъ же эту величину, какъ сказано выше, отъ $\varphi=0$ до $\varphi=2\pi$, получимъ

$$u=3.\pi a^2.$$

И такъ, *полная циклоидальная площадь равна утроенной площади круга производящаго.*

Циклоида ADB (черт. 3 Листъ VII), обращаясь около своего основанія AB, производитъ тѣло вращенія, котораго объёмъ легко опредѣлить. Рѣшимъ эту задачу въ болѣе общемъ видѣ: положимъ, что требуется найти объёмъ тѣла, образуемаго обращеніемъ дуги LDK (черт. 3) около прямой LK, параллельной основанію AB. Примемъ LK за ось абсциссъ; перпендикулярная къ ней линія LY изобразитъ ось ординатъ. Пусть будетъ $AF=h$, $FL=l$, и $Lq=x'$, $qM=y'$; очевидно что h и l будутъ постоянныя извѣстныя линіи. Если сверхъ того положимъ $AP=x$, $PM=y$, то получимъ

$x=h+x'$ и $y=l+y'$, откуда $dx=dx'$ и $dy=dy'$; слѣдовательно уравненіе (3) приметъ видъ

$$dx'=\frac{(l+y')dy}{\sqrt{2a(l+y')-(l+y')^2}}.$$

Вотъ дифференціальное уравненіе циклоидальной дуги LDK, отнесенной къ прямоугольнымъ осямъ LX и LY.

Но извѣстно, что объёмъ тѣла вращенія опредѣляется интеграломъ $\pi\int y'^2dx'$, въ которомъ y' изображаетъ ординату производящей кривой, а x' ея абсциссу; Смот. VOLUME. Итакъ если назовемъ V объёмъ тѣла, образуемаго вращеніемъ циклоидальнаго полу-сегмента $LMDE$ около прямой LE, то получимъ

$$V=\pi\int_0^{2a-l}\frac{(l+y')y'^2dy'}{\sqrt{2a(l+y')-(l+y')^2}},$$

ибо въ точкѣ L имѣемъ $y'=0$, а въ точкѣ E, $y'=ED=2a-l$.

Для уничтоженія ирраціональности въ послѣдней формулѣ, положимъ

$$\sqrt{2a(l+y')-(l+y')^2}=(l+y')z,\ \text{откуда}\ z=\sqrt{\frac{2a-(l+y')}{l+y'}};$$

найдемъ

$$y'=\frac{2a}{1+z^2}-l,\ dy'=-\frac{4azdz}{(1+z^2)^2},\ \sqrt{2a(l+y')-(l+y')^2}=\frac{2az}{1+z^2};$$

предѣлы относительно перемѣнной z получатся сдѣлавъ въ выраженіи

$$z=\sqrt{\frac{2a-(l+y')}{l+y'}}$$

$y'=0$ и $y'=2a-l$; такимъ образомъ найдемъ для z предѣлы $\sqrt{\frac{2a-l}{l}}$ и 0. Если подставимъ теперь въ выраженіе объёма V найденныя величины, и перемѣнимъ знакъ интеграла, измѣнивъ порядокъ предѣловъ, то по сокращеніи получимъ

$$V=4a\pi\int_0^{\sqrt{\frac{2a-l}{l}}}\left(\frac{2a}{1+z^2}-l\right)^2\frac{dz}{(1+z^2)^2}.$$

Разложивъ выраженіе $\left(\frac{2a}{1+z^2}-l\right)^2$, получимъ три интеграла, которые опредѣляются посредствомъ извѣстной формулы

$$\int\frac{dz}{(1+z^2)^m}=\frac{z}{2(m-1)(1+z^2)^{m-1}}+\frac{2m-3}{2(m-1)}\int\frac{dz}{(1+z^2)^{m-1}},$$

получаемой весьма простымъ образомъ изъ уравненія (D) статьи BINOMES (DIFFÉRENTIELLES). Взявъ каждый изъ сихъ трехъ интеграловъ между предѣлами 0 и $\sqrt{\frac{2a-l}{l}}$ наблюдая что

$$\int_0^{\sqrt{\frac{2a-l}{l}}}\frac{dz}{1+z^2}=\mathrm{arctang}\sqrt{\frac{2a-l}{l}},$$

получимъ послѣ сокращеній:

$$V=\frac{\pi}{6}(2l^2-13al+15a^2)\sqrt{2al-l^2}+\pi a(2l^2-6al+5a^2)\,\mathrm{arctang}\sqrt{\frac{2a-l}{l}}.$$

Вотъ выраженіе объёма тѣла, образуемаго обращеніемъ циклоидальнаго полу-сегмента $LMDE$ около прямой LE. Чтобы опредѣлить объёмъ тѣла, образуемаго вращеніемъ полу-циклоиды AMD около полу-основанія AC, стоитъ только положить $l=FL=0$ въ найденномъ выраженіи для V; такимъ образомъ получимъ

$$5\pi a^3.\mathrm{arctang}(\infty)=5\pi a^3.\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi a^2.2\pi a.$$

Если умножимъ послѣднее выраженіе на 2, то выведемъ изъ него слѣдующее заключеніе: *полная циклоидальная дуга ADB* (черт. 3 Листъ VII), *обращаясь около основанія циклоиды AB, производитъ тѣло, коего объёмъ равенъ площади круга производящаго, помноженной на* $\frac{5}{2}$ *окружности того же самаго круга.*

Въ этой статьѣ мы предложили самыя примѣчательныя геометрическія свойства циклоиды; что касается до механическихъ принадлежностей этой кривой, то онѣ изложены особо. Смот. BRACHYSTOCHRONE, TAUTOCHRONE. По аналогіи предметовъ, отсылаемъ также читателей къ слову ÉPICYCLOIDE. Въ заключеніе приводимъ нѣкоторыя историческія свѣдѣнія объ циклоидѣ.

Изобрѣтеніе *циклоиды*, приписываемое обыкновенно знаменитому *Галилею*, а нѣкоторыми авторами Отцу *Мерсену* (*Mersenne*), относится къ самому началу XVII столѣтія. Впрочемъ есть писатели, полагающіе, но безъ основательной причины, что циклоида была извѣстна уже около 1500 года математику *Бовиллу* (*Carollus Bovillus*), и даже нѣкоторые думаютъ, что эта кривая вымышлена еще прежде 1451 года Кардиналомъ *Куза* (*Cuse*), будто бы употребившимъ ее въ задачѣ о квадратурѣ круга, рѣшеніемъ которой онъ ревностно занимался. Несмотря на всѣ эти противорѣчивыя мнѣнія писателей объ изобрѣтеніи циклоиды, можно кажется по справедливости считать Галилея изобрѣтателемъ сей кривой; и дѣйствительно, достовѣрно, что никто до Галилея не обратилъ особеннаго вниманія на циклоиду, и что онъ первый открылъ нѣкоторыя ея свойства.

Съ 1630 года циклоида сдѣлалась предметомъ изысканій для Французскихъ математиковъ, и ихъ изслѣдованія привели къ рѣшенію многихъ любопытныхъ вопросовъ, относящихся къ этой кривой. *Роберваль* опредѣлилъ полную площадь обыкновенной циклоиды, а также продолговатой и укороченной (Смот. ниже) *Декартъ* и *Ферматъ* предложили способы для проведенія касательныхъ къ нимъ. За симъ приступили къ рѣшенію вопросовъ болѣе сложныхъ, именно, къ опредѣленію объёмовъ тѣлъ, образуемыхъ обращеніемъ опредѣленныхъ дугъ циклоиды около ея основанія и оси. Роберваль предложилъ вѣрныя рѣшенія этихъ задачъ. *Торричелли*, также занимавшійся сими вопросами, былъ приведенъ къ выводамъ ошибочнымъ.

Въ 1658 году знаменитый *Паскаль* приступилъ къ рѣшенію нѣкоторыхъ вопросовъ о циклоидѣ, еще труднѣйшихъ. Онъ предпринялъ опредѣлить площадь и центръ тяжести *циклоидальнаго сегмента LDK* (черт. 3 Листъ VII), также объёмъ и поверхность тѣла, образуемаго вращеніемъ этого же сегмента около основанія *AB*, оси *CD* и прямой *LK*. Въ нѣсколько дней Паскаль рѣшилъ всѣ эти задачи. Убѣжденный просьбами нѣкоторыхъ лицъ, и въ особенности внушеніями Кардинала *Роаннезъ* (*Roannez*), онъ рѣшился предложить подъ вымышленнымъ именемъ *А. Детонвилля* (*A. Detonville*), и въ видѣ вызова, рѣшеніе этихъ задачъ современнымъ математикамъ; за вѣрныя рѣшенія онъ обязывался выдать опредѣленныя денежныя награды. На этотъ вызовъ, сколько извѣстно, отвѣчали только два математика: *Валлисъ* и Іезуитъ *Лалуеръ* (*Lalouère*). Въ рѣшеніе перваго вкрались нѣкоторыя погрѣшности; что касается до рѣшенія Лалуера, то оно, сверхъ неполноты своей, оказалось ошибочнымъ, почему назначенныя Паскалемъ награды и не могли быть присуждены ни одному изъ двухъ соискателей.

Сверхъ математиковъ, объ которыхъ мы упомянули въ этой статьѣ, занимались изслѣдованіями о циклоидѣ *Вренъ*, *Гугенсъ*, *Слузъ* (*Sluse*), Іезуитъ *Фабри*, *Лейбницъ*, *Ньютонъ*, братья *Бернулли*, *де ла Гиръ* и многіе другіе. Приводимъ заглавія отдѣльныхъ трактатовъ о циклоидѣ.

Groningius: Historia cycloidis, которая считается весьма ошибочною.

Pascal: Histoire de la roulette.

Historia Trochoidis seu Cycloidis Galliae.

Lalouère: Geometriae promota in VII de Cycloide libris, 1660.

Fabri: Opusculum geometricum de linea-sinuum et Cycloide.

CYCLOIDE ALONGÉE или RALONGÉE. **ПРОДОЛГОВАТАЯ,** удлиненная, растянутая **ЦИКЛОИДА. — CYCLOIDE ACCOURCIE** или RACCOURCIE. **СЖАТАЯ, УКОРОЧЕННАЯ ЦИКЛОИДА.** Мы видѣли въ предыдущей статьѣ, что когда кругъ катится по прямой линіи, то всякая точка, на окружности его находящаяся, описываетъ нѣкоторую трансцендентную кривую, которую назвали *циклоидою*. Если же описывающая точка будетъ находиться не на окружности производящаго круга, а гдѣ нибудь въ его плоскости, то получатся два рода новыхъ кривыхъ — *продолговатая циклоида* и *циклоида сжатая* — первая въ томъ случаѣ, когда описывающая точка находится внѣ производящаго круга, а вторая, когда она берется внутри его.

Весьма легко вывести уравненія продолговатой и сжатой циклоиды. Дѣйствительно, положимъ сперва что описывающая точка M (черт. 4 Листъ VII) находится внѣ круга производящаго $EHDG$. Если примемъ точку A за начало координатъ и вмѣстѣ за начало движенія круга $EHDG$, который катится по оси AX отъ лѣвой руки къ правой, то очевидно, что въ означенномъ на чертежѣ положеніи круга производящаго, длина дуги HE будетъ равняться прямой линіи AE, а точка M будетъ принадлежать продолговатой циклоидѣ. И такъ

$$AE = \text{дугѣ } HE.$$

Изобразимъ чрезъ a радіусъ CE круга производящаго, а чрезъ b постоянное разстояніе MC описывающей точки M отъ центра C. Пусть будетъ сверхъ того $AP = x$, $PM = y$, φ уголъ HCE; найдется

$$AP = AE - PE = AE - Mq \text{ и } PM = CE - Cq.$$

Но $AE = a\varphi$, $Mq = b\,Sin\,\varphi$, $Cq = b\,Cos\,\varphi$; слѣдовательно

$$x = a\varphi - b\,Sin\,\varphi = a\left(\varphi - \frac{b}{a}\,Sin\,\varphi\right)$$

$$y = a - b\,Cos\,\varphi = a\left(1 - \frac{b}{a}\,Cos\,\varphi\right).$$

Вотъ уравненія продолговатой циклоиды; замѣтимъ что мы предполагаемъ $b>a$. Если бы, напротивъ того, допустили что $b<a$, то эти самыя уравненія принадлежали бы *сжатой циклоидѣ*, и, въ этомъ случаѣ, постоянная величина b изображала бы линію, меньшую радіуса круга производящаго, напримѣръ длину mC (тотъ же чертежъ). Наконецъ, полагая $b=a$, очевидно найдется *обыкновенная* циклоида.

Когда изъ предыдущихъ двухъ формулъ исключимъ уголъ φ, то получимъ уравненіе въ прямоугольныхъ координатахъ

$$x=a.\,\mathrm{arc\,Cos}\frac{a-y}{b}-\sqrt{b^2-(a-y)^2},$$

принадлежащее продолговатой, или сжатой, или обыкновенной циклоидѣ, смотря по тому, будетъ ли $b>a$ или $<a$ или $=a$.

Изслѣдованіе различныхъ свойствъ продолговатой и сжатой циклоиды не представляетъ никакого затрудненія. Предоставляемъ разборъ этихъ кривыхъ самому читателю. Скажемъ только, что спрямленіе сихъ циклоидъ приводитъ къ эллиптическимъ функціямъ.

CYCLOMÉTRIE. ЦИКЛОМЕТРІЯ, КРУГОИЗМѢРЕНІЕ. Въ *Хронологіи*, искусство измѣрять круги или періоды времени. — Въ *Геометріи*, совокупность способовъ, служащихъ для опредѣленія различныхъ отношеній, существующихъ между круговыми дугами и относящимися къ нимъ тригонометрическими линіями. Читатели найдутъ разныя подробности объ Циклометріи во многихъ статьяхъ этого Лексикона; Смот. ANGULAIRES (SECTIONS), BINOMES (ÉQUATIONS), CERCLE, CIRCONFÉRENCE, COTES (THÉORÈME DE), SÉRIE, TRIGONOMÉTRIQUES (LIGNES) и проч и проч. Отсылаемъ также къ статьѣ: Cyclometrie, въ книгѣ: Supplemente zu Georg Simons Klügels Wörterbuche der reinen Mathematik. Herausgegeben von J. A. Grunert, Leipzig, 1833. Въ ней изложены весьма обстоятельно разные способы и формулы, составляющіе предметъ Циклометріи.

CYLINDRE. (Геом.) **ЦИЛИНДРЪ.** Въ Прикладной Механикѣ: **ВАЛЪ, НАВОЙНЯ, КАТОКЪ.** *Прямымъ цилиндромъ* (*cylindre droit*) называется тѣло $EFCDGH$ (черт. 5 Листъ VII), образуемое обращеніемъ прямоугольника $ABCD$ около неподвижной его стороны AB. При такомъ движеніи, стороны AD и BC описываютъ круги $EGDI$ и $FHCK$, коихъ площади именуются *основаніями цилиндра* (*bases du cylindre*). *Сторона* CD описываетъ поверхность, которая называется *боковою* или *выпуклою поверхностію цилиндра* (*surface convexe du cylindre*). Перпендикулярное разстояніе между двумя основаніями цилиндра, называется его *вышотою* (*hauteur*); очевидно, что въ прямомъ цилиндрѣ это разстояніе равно длинѣ AB, соединяющей центры двухъ основаній. Линія AB именуется *осью цилиндра* (*axe du cylindre*).

Легко видѣть, что всякая плоскость, перпендикулярная къ оси прямаго цилиндра, разсѣкаетъ его по *круговой линіи*. Когда сѣкущая плоскость не перпендикулярна къ оси, то кривая сѣченія будетъ *эллипсъ*. Наконецъ, если разсѣчемъ цилиндръ плоскостію, проходящею чрезъ ось цилиндра, то получимъ прямоугольникъ $FEDC$.

Косоугольнымъ цилиндромъ (*cylindre oblique*) называется тѣло, образуемое обращеніемъ косоугольнаго параллелограмма около одной изъ его сторонъ. Слѣдовательно, въ косоугольномъ цилиндрѣ, ось не перпендикулярна къ основаніямъ, и не равна высотѣ его.

Въ Элементарной Геометріи принимаютъ цилиндръ за призму, состоящую изъ безконечнаго числа граней, и на этомъ основаніи доказываютъ весьма просто, что объёмъ цилиндра, какъ прямаго такъ и косоугольнаго, равняется площади основанія, помноженной на высоту, а боковая поверхность прямаго цилиндра — произведенію окружности его основанія на высоту. Что касается до боковой поверхности косоугольнаго цилиндра, то она зависитъ отъ спрямленія эллипса, и слѣдовательно опредѣленіе ея не можетъ быть предметомъ Элементарной Геометріи.

Въ обширномъ смыслѣ, подъ *цилиндромъ* разумѣютъ тѣло, ограниченное боковою поверхностію, образуемою движеніемъ прямой линіи, которая сохраняетъ параллельность во всѣхъ своихъ положеніяхъ. Смот. CYLINDRIQUE (SURFACE).

CYLINDRES SEMBLABLES. Подобные цилиндры. Два цилиндра называются *подобными*, когда отношеніе оси къ діаметру основанія одинаково для обоихъ цилиндровъ.

CYLINDRE GAUCHE. Косой цилиндръ. Поверхность, образуемая прямою линiею, которая, опираясь на двѣ какiя ни есть кривыя линiи, движется параллельно данной плоскости. Смот. GAUCHE (SURFACE).

CYLINDRE GNOMONIQUE. (Гном.) **ЦИЛИНДРИЧЕСКIЙ КВАДРАНЪ, ГНОМОНИЧЕСКIЙ ЦИЛИНДРЪ.** Солнечные часы, начерченные на поверхности цилиндра.

CYLINDRIQUE. ЦИЛИНДРИЧЕСКIЙ. Относящiйся къ цилиндру или имѣющiй видъ сего тѣла. *Surfaces cylindriques*, *цилиндрическiя поверхности*; Смот. ниже.

CYLINDRIQUE (SURFACE). ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ. Поверхность, образуемая движенiемъ прямой, опирающейся на кривую линiю, и сохраняющей параллельность во всѣхъ своихъ положенiяхъ. Прямая линiя, образующая поверхность, называется *производящею* (*génératrice*), а кривая, направляющая движенiе прямой — *направляющею* (*directrice*).

Пусть будутъ

$$x = az + \alpha \quad \text{и} \quad y = bz + \beta$$

уравненiя движущейся прямой въ одномъ изъ ея положенiй. Количества a и b, по свойству движенiя разсматриваемой прямой, будутъ постоянныя; напротивъ того, величины α и β измѣняются вмѣстѣ съ положенiемъ производящей. Такъ какъ количества α и β постоянны для одного и того же положенiя прямой, а измѣняются при переходѣ отъ одного положенiя въ другое, то очевидно, одно изъ нихъ будетъ функцiею другаго. И такъ $\beta = \varphi(\alpha)$, или

$$y - bz = \varphi(x - az),$$

разумѣя подъ φ произвольную функцiю, которая въ частныхъ случаяхъ опредѣляется посредствомъ уравненiй направляющей кривой. Исключивъ произвольную функцiю φ изъ послѣдняго уравненiя [Смот. ARBITRAIRES (ÉLIMINATION DES CONSTANTES)], получимъ слѣдующее уравненiе въ частныхъ дифференцiалахъ для цилиндрическихъ поверхностей:

$$a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 1.$$

Для примѣра опредѣленiя произвольной функцiи φ положимъ, что направляющая цилиндрической поверхности есть *эллипсъ*, начерченный въ плоскости xy, и центръ котораго совпадаетъ съ началомъ координатъ. Если изобразимъ чрезъ A большую, а чрезъ B малую полу-ось эллипса, то уравненiя его будутъ

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad \text{и} \quad z = 0;$$

совокупляя эти формулы съ уравненiями производящей прямой

$$x = az + \alpha,\ y = bz + \beta,$$

находимъ

$$\frac{\alpha^2}{A^2} + \frac{\beta^2}{B^2} = 1;$$

но $\alpha = x - az$, $\beta = y - bz$; слѣдовательно

$$\frac{(x - az)^2}{A^2} + \frac{(y - bz)^2}{B^2} = 1.$$

Вотъ уравненiе искомой цилиндрической поверхности. Если положимъ $B = A$, то направляющая обратится въ *круговую линiю*, и получимъ въ этомъ случаѣ уравненiе

$$(x - az)^2 + (y - bz)^2 = A^2.$$

По сходству предметовъ, отсылаемъ къ статьѣ: CONIQUE (SURFACE).

CYLINDROIDE. (Геом.) **ЦИЛИНДРОИДЪ.** Иногда даютъ это названiе тѣлу, имѣющему сходство съ обыкновеннымъ цилиндромъ, разсматриваемымъ въ начальной Геометрiи; напримѣръ, если цилиндръ, вмѣсто круговыхъ основанiй, имѣетъ эллиптическiя, то можно его назвать *цилиндроидомъ*. Впрочемъ, такого рода тѣло обыкновенно называютъ *цилиндромъ*, но прибавляютъ къ тому какого вида основанiе. И такъ, говорятъ: *эллиптическiй, параболическiй цилиндръ*, или *цилиндръ съ эллиптическимъ, съ параболическимъ основанiемъ* (*cylindre à base elliptique, parabolique*). — Нѣкоторые авторы называли также *цилиндроидомъ* тѣло, образуемое вращенiемъ иперболы около второй ея оси. Смот. HYPERBOLOIDE DE RÉVOLUTION.

CYSSOIDE. Смот. CISSOIDE.

DACTYLONOMIE. ДАКТИЛОНОМІЯ. Отъ Греч. *δάκτυλος, палецъ, νόμος, законъ.* Искусство производить легкія ариѳметическія выкладки по пальцамъ. Для этого, начинаютъ обыкновенно счётъ съ большаго пальца лѣвой руки, который означаетъ 1, указательный 2, средній палецъ 3, безъименный 4, мизинецъ 5, мизинецъ правой руки 6, и такъ далѣе до большаго пальца правой руки, который изображаетъ 10. Несмотря на незначительность этого способа счисленія, весьма неудобнаго, нѣкоторые авторы, какъ то: *Беда* (De temporibus et natura rerum), *Новіомаги* (De numeris Liv. I Cap. XIV) и *Леопольдъ* (Theatrum Arithmetico-Geometricum) писали объ немъ.

D'ALEMBERT (PRINCIPE DE). Смот. DYNAMIQUE.

DATA, Латинское названіе; по Франц. **DONNÉES. ДАННЫЯ, ДАННОСТИ.** Величины, извѣстныя по условіямъ рѣшаемаго вопроса. Напримѣръ, радіусъ опредѣленнаго круга, оси даннаго эллипса, площадь треугольника, когда основаніе и высота его извѣстны, называются *данными.* — Названіе одного изъ примѣчательнѣйшихъ сочиненій *Эвклида*; оно служитъ продолженіемъ его *Элементамъ,* и какъ бы введеніемъ въ Высшую Геометрію. Эта книга была напечатана нѣсколько разъ: можно указать между прочими на изданія: *Гарди,* 1625 года, съ Греческимъ текстомъ, и *Баррова,* 1659 года.

DATE. (Хрон.) **ЧИСЛО, ДЕНЬ.—ГОДЪ, ЭПОХА.** Точное указаніе времени какого либо событія, т. е. означеніе *года, мѣсяца* и *числа,* въ которое событіе случилось. Иногда, въ опредѣленіи времени извѣстнаго происшествія, не можемъ достигнуть такой точности, и должны довольствоваться опредѣленіемъ года, даже столѣтія; и въ этомъ случаѣ приблизительное означеніе времени происшествія называютъ *date.* Одно изъ главныхъ затрудненій, встрѣчаемыхъ при опредѣленіи историческихъ эпохъ, происходитъ отъ разнообразія и запутанности лѣтосчисленій, бывшихъ въ употребленіи въ разныя времена, и у разныхъ народовъ. Читатели найдутъ самыя обстоятельныя подробности объ этомъ предметѣ въ классическомъ сочиненіи: *Art de vérifier les dates.*

DAVIS (QUARTIER DE). ДАВИСОВЪ КВАДРАНТЪ. Инструментъ, изобрѣтенный въ концѣ XVI столѣтія мореплавателемъ *Дависомъ* (*John Davis*), и служившій для опредѣленія высоты солнца на морѣ. Этотъ квадрантъ давно уже вышелъ изъ употребленія.

DÉ.

DÉ. (Исч. Вѣр.) **ИГРАЛЬНАЯ КОСТЬ, КОСТКА, ЗЕРНЬ.** Малаго размѣра кубъ, на граняхъ котораго написаны нумера 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Бываютъ также призматическія кости съ большимъ числомъ граней. Весьма многія задачи изъ Анализа Вѣроятностей приводятъ къ слѣдующему вопросу, который относится къ игрѣ въ кости: *Дано извѣстное число костей, изъ которыхъ каждая имѣетъ опредѣленное число граней съ опредѣленными же на нихъ нумерами: найти, какъ велика вѣроятность, что бросивъ кости разомъ, сумма вскрывшихся нумеровъ будетъ равняться какому либо данному напередъ числу?*

Рѣшимъ этотъ вопросъ въ томъ предположеніи, что каждая кость имѣетъ одинакое число граней. Пусть будетъ n число бросаемыхъ костей, а m число граней каждой изъ нихъ; положимъ, что на граняхъ написаны нумера 1, 2, 3, . . . до m. Спрашивается, какъ велика вѣроятность что бросивъ всѣ n костей разомъ, сумма вскрывшихся нумеровъ будетъ равняться опредѣленному числу, которое изобразимъ чрезъ $s+1$?

Означимъ чрезъ p искомую вѣроятность; пусть будетъ сверхъ того y число случаевъ, при которыхъ сумма вскрывшихся нумеровъ на n костяхъ равна $s+1$, а z число всѣхъ возможныхъ случаевъ при совокупномъ бросаніи сихъ самыхъ n костей. По самому опредѣленію вѣроятности получимъ

$$p=\frac{y}{z}.$$

Величина z опредѣляется непосредственно: дѣйствительно, въ слѣдствіе сказаннаго въ статьѣ COMBINAISON объ *сочетаніяхъ съ повтореніемъ,* заключаемъ, что $z=m^n$. И такъ

$$(1)\qquad p=\frac{y}{m^n}.$$

Для опредѣленія величины y надобно найти совокупность всѣхъ возможныхъ соединеній n чиселъ, взятыхъ въ ряду

$$1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots\ldots m,$$

съ тѣмъ условіемъ, чтобы сумма этихъ n нумеровъ равнялась числу $s+1$. Съ этою цѣлію разсмотримъ выраженіе

$$(x+x^2+x^3+\ldots+x^m)^n.$$

Если развернемъ эту степень, то получимъ члены, изъ которыхъ каждый будетъ вида

$$Ax^\alpha.x^\beta.x^\gamma\ldots.x^\nu=Ax^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\nu},$$

гдѣ число величинъ $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ldots\nu$, по свойству разложенія, будетъ равно n. Если же предположимъ

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\nu=s+1,$$

то очевидно коэффиціентъ A изобразитъ число совокупленій n чиселъ, взятыхъ отъ 1 до m, коихъ сумма равна $s+1$, и слѣдовательно, въ настоящемъ предположеніи, A будетъ равняться y. И такъ, y есть коэффиціентъ $(s+1)$-ой степени количества x въ разложеніи

$$(x+x^2+x^3+\ldots+x^m)^n.$$

Опредѣленіе этого коэффиціента весьма просто: дѣйствительно, если замѣтимъ что

$$(x+x^2+x^3+\ldots+x^m)^n=x^n(1+x+x^2+\ldots x^{m-1})^n$$
$$=x^n\left(\frac{1-x^m}{1-x}\right)^n=x^n(1-x^m)^n(1-x)^{-n},$$

и разложимъ $(1-x^m)^n$ и $(1-x)^{-n}$ по Нютоновой биноміи, то получимъ

(2) $$(1-x^m)^n=$$
$$1-nx^m+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{2m}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{3m}+\ldots..$$

(3) $$(1-x)^{-n}=$$
$$+nx+\frac{n(n+1)}{1.2}x^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}x^3+\ldots.$$
$$+\frac{n(n+1)(n+2)\ldots.s}{1.2.3\ldots(s-n+1)}x^{s-n+1}+\ldots..$$

Очевидно, что опредѣленіе коэффиціента $(s+1)$-ой степени x въ выраженіи

$$(x+x^2+x^3+\ldots+x^m)^n=x^n(1-x^m)^n(1-x)^{-n}$$

приводится къ опредѣленію коэффиціента...... $(s+1-n)$-ой степени въ произведеніи двухъ разложеній (2) и (3). И такъ, удерживая въ сказанномъ произведеніи только члены, въ которые входитъ степень x^{s+1-n}, получимъ безъ затрудненія

$$y=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots.s}{1.2.3\ldots.(s-n+1)}$$
$$-n.\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(s-m)}{1.2.3\ldots.(s-n+1-m)}$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(s-2m)}{1.2.3\ldots(s-n+1-2m)}$$
— и проч.

Если положимъ

$$s-m=s',\ s-2m=s'',\ s-3m=s''',\ldots..$$

то предыдущая формула приметъ слѣдующій симметрическій видъ, болѣе удобный для численныхъ приложеній:

$$y=\frac{s'(s-1)(s-2)\ldots..(s-n+2)}{1.2.3\ldots.(n-1)}$$
$$-n.\frac{s'(s'-1)(s'-2)\ldots(s'-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{s''(s''-1)(s''-2)\ldots(s''-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.\frac{s'''(s'''-1)(s'''-2)\ldots.(s'''-n+2)}{1.2.3\ldots..(n-1)}$$
+ и проч.

Ясно что въ этой формулѣ должно будетъ откинуть всѣ члены, начиная съ того, для котораго величина, изображенная у насъ буквою s съ чертами, обратится въ нуль или въ число отрицательное.

Положимъ, что желаемъ найти вѣроятность вскрытія 16 очковъ при совокупномъ бросаніи четырехъ обыкновенныхъ шестигранныхъ костей. Въ такомъ случаѣ имѣемъ

$$m=6,\ n=4,\ s+1=16 \text{ или } s=15,\ s'=9,\ s''=3;$$

слѣдовательно

$$y=\frac{15.14.13}{1.2.3}-4.\frac{9.8.7}{1.2.3}+\frac{4.3}{1.2}.\frac{3.2.1}{1.2.3}=125.$$

И такъ въ силу формулы (1), искомая вѣроятность, которую означимъ чрезъ p, изобразится дробью

$$p=\frac{125}{6^4}=\frac{125}{1296}.$$

DÉBANDEMENT d'un ressort. **СПУСКЪ** пружины. *Débander* или *detendre un ressort*; *спустить пружину*.

DÉBARASSER (SE). (Алг.) **ОСВОБОДИТЬСЯ, ИСКЛЮЧИТЬ, УНИЧТОЖИТЬ.** *Pour se débarasser du terme px^2 dans l'équation $x^3+px^2+qx+r=0$, il n'y a qu'à poser $x=y-\frac{1}{3}p$; чтобъ освободить уравненіе $x^3+px^2+qx+r=0$ отъ члена px^2, стоитъ только положить $x=y-\frac{1}{3}p$.*

DÉBLAI. ВЫЕМКА. Такъ называется въ земляныхъ работахъ объёмъ земли, снимаемый для уравненія грунта или для какой либо другой цѣли. — Самая яма, происшедшая отъ вырытой земли. — *Évaluation des volumes des déblais et remblais*; *опредѣленіе объёмовъ выемки и насыпи*. Смот. VOLUME.

En déblai, en remblai. Въ выемкѣ, въ насыпи. *Profil en déblai, en remblai*; *профиль въ выемкѣ, въ насыпи.*

DÉCADAIRE (ARITHMÉTIQUE). ДЕСЯТИЧНАЯ АРИѲМЕТИКА. Смот. ARITHMÉTIQUE.

DÉCADE или **DIZAINE.** (Ариѳ.) **ДЕСЯТОКЪ.** Нынѣ слово *décade* рѣдко употребляется въ Математикѣ.

DÉCAGONE. (Геом.) **ДЕСЯТИУГОЛЬНИКЪ.** Плоская фигура, имѣющая десять сторонъ и столько же угловъ. Когда всѣ стороны и углы равны, то десятиугольникъ называется *правильнымъ* (*décagone régulier*).

Для вписанія правильнаго десятиугольника въ кругѣ, поступаетъ слѣдующимъ образомъ:

Положимъ что AB (черт. 6 Листъ VII) изображаетъ искомую сторону десятиугольника; проводимъ изъ точекъ A и B радіусы CA и CB, а чрезъ точку B, линію BD, раздѣляющую уголъ ABC пополамъ. Уголъ ACB, какъ десятая часть цѣлой окружности, равенъ 36°, а каждый изъ угловъ CAB и CBA въ равнобедренномъ треугольникѣ ABC, равенъ 72°. И такъ, уголъ $ABD = DBC = 36°$. Отсюда заключаемъ, что стороны AB и AD треугольника ADB равны между собою, а треугольники DCB и ADB подобны; по этой причинѣ получимъ пропорцію

$$AD : DC = DB : CB;$$

но $DC = DB = AB$, ибо углы DCB и DBC равны между собою: слѣдовательно

$$AD : AB = AB : CB.$$

И такъ, если раздѣлимъ радіусъ *въ среднемъ и крайнемъ отношеніи*, то большій отрѣзокъ изобразитъ сторону вписаннаго въ кругѣ десятиугольника. Пусть будетъ r радіусъ даннаго круга, а x упомянутый отрѣзокъ; получимъ пропорцію

$$r - x : x = x : r,$$

изъ которой выведемъ слѣдующее аналитическое выраженіе для стороны x правильнаго десятиугольника:

$$x = \tfrac{1}{2} r(\sqrt{5} - 1).$$

Для построенія этого выраженія проводимъ къ радіусу CB перпендикуляръ CG, и взявъ $CE = \frac{1}{2}CB$, соединяемъ точку E съ B. Потомъ, изъ точки E, радіусомъ EC, описываемъ дугу CF. Линія FB будетъ равна x, т. е. искомой сторонѣ вписаннаго въ кругѣ десятиугольника. Смот. EXTRÊME, CONSTRUCTION. Если отъ точки B отложимъ по окружности линію Ba, равную AB, потомъ отъ точки a линію $ab = AB$, и такъ далѣе до $hA = AB$, то получится десятиугольникъ...... $ABabcdefgh$, который имѣли въ виду построить.

Очевидно, что соединивъ точку B съ b, потомъ b съ d, d съ f, f съ h, и h съ B, получимъ правильный пятиугольникъ.

Отсылаемъ читателей къ статьѣ BINOMES (ÉQUATIONS), въ которой показано, какимъ образомъ задача о вписаніи въ кругѣ правильнаго многоугольника приводится къ рѣшенію двучленнаго уравненія.

Въ заключеніе скажемъ, что сверхъ обыкновенно разсматриваемаго правильнаго десятиугольника существуетъ еще другой, удовлетворяющій общепредлагаемому опредѣленію правильныхъ многоугольниковъ. Онъ означенъ на чертежѣ 7 (Листъ VII). Чтобы построить его, стоитъ только раздѣлить предварительно окружность на десять частей, какъ было показано выше, и потомъ соединять точки дѣленія, пропуская двѣ смежныя. Такимъ образомъ идемъ отъ a къ h, отъ h къ e, отъ e къ b отъ b къ i, отъ i къ f, отъ f къ c, отъ c къ k, отъ k къ g, отъ g къ d и отъ d возвращаемся къ a.

Для дальнѣйшихъ подробностей объ этомъ родѣ многоугольниковъ, названныхъ по виду ихъ *звѣздообразными* (*polygones étoilés*), отсылаемъ читателей къ статьѣ POLYGONE.

DÉCAGONE (NOMBRE). (Ариѳ.) **ДЕСЯТИУГОЛЬНОЕ ЧИСЛО.** Число вида $n(4n - 3)$, гдѣ n изображаетъ какое угодно положительное цѣлое число. И такъ, 1, 10, 27, 52 и проч. суть *числа десятиугольныя*. Смот. POLYGONES (NOMBRES).

DÉCAGRAMME.
DÉCALITRE. Смот. MÉTRIQUE (NOUVEAU SYSTÊME).
DÉCAMÈTRE.

DÉCAN. (Астр.) **ДЕКАНЪ.** Такъ въ древности называли астрономы дугу въ 10 градусовъ, соотвѣтствующую одной трети зодіакальнаго знака.

DÉCASTÈRE. Смот. MÉTRIQUE (NOUVEAU SYSTÊME).

DÉCHARGE или TUYAU DE DÉCHARGE. **ТРУБА ДЛЯ СПУСКА ВОДЫ.**

DÉCHARGEOIR. СТОКЪ. Труба или жолобъ, дѣлаемый въ шлюзахъ для того, чтобы излишняя вода, доставляемая теченіемъ рѣки или ручья, могла стекать по мѣрѣ надобности.

DÉCHET. УЩЕРБЪ, УБЫЛЬ воды въ источникѣ. Также, *недостатокъ* дѣйствительно вытекающаго количества воды изъ какого либо отверстія, противъ того, которое слѣдовало бы получить по теоріи. Смот. CONTRACTION DE LA VEINE FLUIDE.

DÉCIGRAMME. Смот. MÉTRIQUE (NOUVEAU SYSTÊME).

DÉCIMAL. (Ариѳ.) **ДЕСЯТИЧНЫЙ.** *Calcul décimal*; *десятичное счисленіе.* Смот. NUMÉRATION. *Arithmétique décimale*; *десятичная Ариѳметика*; Смот. ARITHMÉTIQUE. *Échele décimale*; *десятичная система.* Смот. ARITHMÉTIQUES (ÉCHELES).

DÉCIMALE. (Ариѳ.) **ДЕСЯТИЧНАЯ.** Такъ называется каждая изъ цифръ, составляющихъ десятичную дробь, а также и самая дробь. *Pousser l'approximation à quinze décimales. Приблизиться до пятнадцатой десятичной*; *довести приближеніе до пятнадцатой десятичной цифры.* Смот. ниже.

DÉCIMALE (FRACTION), PARTIE DÉCIMALE, или просто DÉCIMALE. (Ариѳ.) **ДЕСЯТИЧНАЯ ДРОБЬ,** ДЕСЯТИЧНАЯ ЧАСТЬ. Такъ называется дробь, имѣющая знаменателемъ своимъ число 10, возвышенное въ какую ни есть цѣлую степень, или, что всё равно, единицу съ нѣсколькими нуллями. И такъ, дроби $\frac{3}{10}$, $\frac{27}{100}$, $\frac{17}{1000}$ и проч. суть *десятичныя.* Если бы дроби десятичныя писались въ этомъ видѣ, то всѣ ариѳметическія дѣйствія можно бъ было производить надъ ними точно такъ, какъ надъ обыкновенными дробями. Но, основываясь на видѣ ихъ знаменателей, придумали нѣкоторыя упрощенія, которыя и предлагаются здѣсь.

По условію, принятому въ десятичномъ счисленіи, всякая цифра, по правую сторону которой ставится нуль, получаетъ значеніе въ десять разъ бо́льшее противъ первоначальнаго. И такъ, чтобы написать *три десятка*, приписываемъ съ правой стороны *трехъ* знакъ *нуль*, и получаемъ 30, то есть *тридцать.* По аналогіи очень естественно условиться въ томъ, что если напишемъ нуль съ лѣвой стороны цифры, то она получитъ значеніе въ десять разъ меньшее противъ первоначальнаго. И такъ, для изображенія *трехъ десятыхъ*, то есть десятой части отъ трехъ, мы можемъ написать 03. Чтобы изобразить *десятую часть отъ трехъ десятыхъ*, должно опять приписать нуль съ лѣвой стороны 03, и получится 003, то есть *три сотыя*, и такъ далѣе. Ясно, что руководствуясь этимъ способомъ, мы въ состояніи будемъ изобразить всякую десятичную дробь, не имѣя надобности писать знаменателя, который въ такомъ случаѣ подразумѣвается. Сверхъ того, для обозначенія мѣста простыхъ единицъ, условились отдѣлять послѣдній нуль съ лѣвой стороны точкою или запятою; и такъ, вмѣсто $03=\frac{3}{10}$, пишутъ 0.3 или 0,3; вмѣсто $003=\frac{3}{100}$, 0,03; вмѣсто $0003=\frac{3}{1000}$, 0,003, и такъ далѣе.

Когда къ десятичной дроби желаемъ присовокупить цѣлое число, то пишемъ единицы сего послѣдняго на мѣсто нуля, отдѣленнаго точкою или запятою отъ дроби. И такъ 42.003 или 42,003 означаетъ 42 цѣлыя единицы и три тысячныя.

Если бы желали представить дробь $\frac{275043}{10000}$ въ видѣ десятичной, то замѣтивъ что

$$\frac{275043}{10000}=\frac{270000}{10000}+\frac{5000}{10000}+\frac{40}{10000}+\frac{3}{10000}$$
$$=27+\frac{5}{10}+\frac{4}{1000}+\frac{3}{10000},$$

получили бы дробь 27,5043, которая выговаривается слѣдующимъ образомъ: 27 *цѣлыхъ и* 5043 *десятитысячныхъ*, или еще: 27 *цѣлыхъ*, 5 *десятыхъ*, нуль *сотыхъ*, 4 *тысячныхъ*, 3 *десятитысячныхъ.*

Правила, относящіяся къ ариѳметическимъ дѣйствіямъ надъ десятичными дробями, выводятся какъ нельзя проще изъ самаго опредѣленія этого рода дробей. Предлагаемъ эти правила въ сокращенномъ видѣ.

Для приведенія нѣсколькихъ десятичныхъ дробей къ одному знаменателю, стоитъ только приписать къ этимъ дробямъ съ правой стороны послѣдней цифры столько нулей, сколько нужно для того, чтобы у каждой изъ нихъ было одинаковое число десятичныхъ знаковъ. Напримѣръ, для приведенія къ одному знаменателю трехъ дробей

1,203, 25,6 , 363,5306,

приписываемъ къ первой изъ нихъ *одинъ нуль*, ко второй *три нуля*, и получаемъ

1,2030, 25,6000, 363,5306;

каждая изъ этихъ дробей имѣетъ знаменателемъ 10000. Чтобы усмотрѣть справедливость этого правила, стоитъ только замѣтить, что присовокупленіе нулей къ десятичной дроби, съ правой стороны, не измѣняетъ ея значенія; и въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ десятичная дробь 0,6 найдется послѣдовательно:

$0,6=\frac{6}{10}=\frac{60}{100}=0,60$, $\frac{60}{100}=\frac{600}{1000}=0,600$, и такъ далѣе.

Сложеніе и *вычитаніе* десятичныхъ дробей производится точно такъ, какъ сложеніе и вычитаніе цѣлыхъ чиселъ; только, при расположеніи слагаемыхъ чиселъ, должно наблюдать, чтобы единицы стояли подъ единицами, десятыя доли подъ десятыми, сотыя подъ сотыми, и такъ далѣе. Вотъ примѣры:

Примѣръ сложенія десятичныхъ дробей

$$\text{Слагаемыя числа:}\left\{\begin{array}{r}36,152\\389,03673\\58,3184\\1025,91\end{array}\right.$$

$$\text{Сумма: } 1509,41713$$

Примѣръ вычитанія десятичныхъ дробей:

Изъ	735,82500660
вычесть	59,90830762
Разность:	675,91469898

Для *умноженія* десятичной дроби на другую, также десятичную, откидываемъ запятыя въ обѣихъ, и перемножаемъ ихъ какъ цѣлыя числа; потомъ, въ найденномъ произведеніи, отдѣляемъ запятою столько десятичныхъ знаковъ, сколько ихъ находилось въ данныхъ двухъ дробяхъ. Если случится, что произведеніе не имѣетъ достаточнаго числа десятичныхъ знаковъ для отдѣленія ихъ запятою, то надобно дополнить это число нулями, приписывая ихъ съ лѣвой стороны найденнаго произведенія. Очевидно, что если бы одно изъ двухъ данныхъ чиселъ было цѣлое, то произведеніе имѣло бы столько десятичныхъ знаковъ, сколько другое число, которое по предположенію есть десятичная дробь. Когда цѣлое число будетъ 10, 100, 1000,..... и вообще 10^m, то умноженіе производится подвинувъ просто запятую вправо на одинъ, на два, на три..... и вообще на m десятичныхъ знаковъ.

Приведенный способъ умноженія доказывается самымъ простымъ образомъ наблюдая, что если знаменатель одной изъ нихъ будетъ 10^m, а другой, 10^n, то разсматривая эти двѣ дроби въ видѣ обыкновенныхъ, и перемноживъ ихъ по извѣстному правилу, получимъ новую дробь, у которой числитель будетъ равенъ произведенію числителей данныхъ двухъ дробей, а знаменатель, $10^m \times 10^n = 10^{m+n}$. Слѣдовательно, откинувъ этого знаменателя, должны получить въ произведеніи столько десятичныхъ знаковъ, то есть столько цифръ послѣ запятой, сколько содержится единицъ въ суммѣ $m+n$.

Вотъ нѣсколько примѣровъ.

Примѣры умноженія десятичныхъ дробей.

Найти произведеніе $31,563 \times 7,81$.

$$\begin{array}{lr}\text{Множимое:} & 31563\\ \text{Множитель:} & \underline{781}\\ & 31563\\ & 252504\\ & \underline{220941}\\ \text{Произведеніе:} & 24650703\end{array}$$

Найти произведеніе $6,12 \times 0,0035$.

$$\begin{array}{lr}\text{Множимое:} & 612\\ \text{Множитель:} & \underline{35}\\ & 3060\\ & \underline{1836}\\ \text{Произведеніе:} & 0,021420 = 0,02142.\end{array}$$

$0,00638 \times 10000 = 63,8$, $65,36 \times 100 = 6536$.

При *дѣленіи* одной десятичной дроби на другую, приписываемъ къ той изъ нихъ, у которой менѣе десятичныхъ цифръ, столько дополнительныхъ нулей съ правой стороны, сколько нужно для того, чтобы у обѣихъ дробей было одинаковое число десятичныхъ знаковъ; потомъ откидываемъ запятыя, и получаемъ два цѣлыя числа, надъ которыми производимъ дѣленіе по обыкновеннымъ правиламъ. Очевидно, что такимъ образомъ получимъ искомое частное число, ибо откидывая запятую въ обѣихъ дробяхъ, мы въ одно время увеличиваемъ какъ дѣлимое, такъ и дѣлителя въ 10, во 100, въ 1000.... разъ, чрезъ что̀ частное число не перемѣняется. Когда надобно раздѣлить десятичную дробь на 10, на 100 на 1000,.... то подвигаемъ только ея запятую въ лѣвую сторону на одинъ, на два, на три,.... десятичныхъ знака. Предлагаемъ нѣсколько примѣровъ.

Примѣры дѣленія десятичныхъ дробей:

Раздѣлить 245,30256 на 4,32

$$\frac{24530256}{432000}=56\frac{338256}{432000}=56\frac{783}{1000}=56{,}783.$$

Раздѣлить 0,0196 на 0,35.

$$\frac{196}{3500}=\frac{56}{1000}=0{,}056.$$

$$\frac{35{,}00367}{1000}=0{,}03500367;\quad \frac{8362{,}569}{100}=83{,}62569.$$

Когда для умноженія или дѣленія даны десятичныя дроби съ значительнымъ числомъ десятичныхъ цифръ, то опредѣленіе точнаго произведенія или частнаго требуетъ вообще довольно продолжительныхъ выкладокъ. Въ подобныхъ случаяхъ обыкновенно довольствуются извѣстнымъ числомъ десятичныхъ знаковъ въ результатѣ, что̀ приводитъ къ нѣкоторымъ сокращеніямъ. Вотъ какимъ образомъ производится сокращенное умноженіе.

Для краткости рѣчи, изобразимъ чрезъ M множимое, а чрезъ N множителя, и условимся считать ихъ цифры слѣдуя обыкновенному порядку, то есть, отъ лѣвой руки къ правой. Помножаемъ сперва всѣ цифры множимаго на первую цифру множителя. Потомъ помножаемъ на вторую цифру числа N всѣ цифры M, при чемъ откидываемъ единицы, получаемыя отъ умноженія послѣдней цифры числа M, а десятки придаемъ къ произведенію на предпослѣднюю цифру множимаго; такимъ образомъ получится произведеніе, которое подписываемъ подъ преждснайденнымъ, наблюдая чтобы послѣднія цифры находились одна подъ другою. Далѣе, беремъ третью цифру числа N, и помножаемъ на нее множимое M, начиная умноженіе съ предпослѣдней цифры числа M; при такомъ дѣйствіи откидываемъ опять единицы, а десятки придаемъ къ произведенію на третью цифру отъ конца. Получаемое такимъ образомъ произведеніе третьей цифры множителя на множимое подписываемъ подъ двумя преждснайденными. Продолжаемъ это дѣйствіе до тѣхъ поръ, пока не дойдемъ до послѣдней цифры множителя; сумма всѣхъ найденныхъ частныхъ произведеній будетъ равна искомому произведенію, ограниченному извѣстнымъ числомъ десятичныхъ знаковъ, которое легко опредѣлить принявъ въ соображеніе какъ цѣлыя числа сопровождающія множимое и множителя, такъ и первыя ихъ десятичныя цифры. Для поясненія этихъ правилъ, предлагаемъ нѣсколько примѣровъ.

1.)	2.)	3.)
98,7654321		
12,3456789	3,0 056	6,23141
	3 6,07	0,0003 789
98 7654321	9 0 168	1869423
19 7530864	1 8 034	436199
2 9629630	210	49851
3950617	10 8,412	5608
493827		0,002361081
59259		
6913		
790		
88		
1219,326309		

Чтобы не сбиться въ цифрахъ множителя, на которыя помножаемъ множимое, а также и въ тѣхъ, съ которыхъ начинаемъ умноженіе въ множимомъ, не худо отмѣчать ихъ точкою по мѣрѣ того, какъ доходитъ до нихъ очередь.

Этотъ сокращенный способъ умноженія весьма удовлетворителенъ по своей точности, въ чемъ читатель можетъ удостовѣриться опредѣливъ предѣлъ суммы откидываемыхъ десятичныхъ знаковъ, ближайшихъ къ послѣдней цифрѣ, сохраняемой въ произведеніи. Сверхъ того, предѣлъ погрѣшности уменьшается еще тѣмъ, что когда откидываемъ единицы, и присовокупляемъ десятки къ произведенію на предшествующую цифру множимаго, то увеличиваемъ эти десятки единицею, если откидываемыхъ единицъ болѣе 5. И такъ, во второмъ примѣрѣ, произведеніе

18034 получилось слѣдующимъ образомъ: помножая 6 на 6 имѣемъ 36; единицы, т. е. 6 откидываемъ, а удерживаемъ не 3, а 4, потому что 36 ближе къ 40 чѣмъ къ 30. Далѣе, $6 \times 5 = 30$, 4 въ умѣ, и того 34; пишу (4), а въ умѣ 3. Помножаю 6 на 0 и придаю 3, и того (3), Помножаю 6 на 0, получаю (0). Наконецъ $6 \times 3 = 18$; приписываю (18), и получаю въ произведеніи 18034.

Чтобы читатели могли судить о степени точности найденныхъ трехъ приближенныхъ произведеній, приводимъ для сравненія точные результаты:

1.) $98{,}7654321 \times 12{,}3456789 = 1219{,}32631112635269$.
2.) $3{,}0056 \times 36{,}07 = 108{,}411992$.
3.) $6{,}23141 \times 0{,}0003789 = 0{,}002361081249$.

Сокращенное дѣленіе производится на основаніи тѣхъ же правилъ, которыя служатъ для умноженія. Для примѣра сдѣлаемъ повѣрку 1-го изъ приведенныхъ выше умноженій, принявъ число 1219,326309 за дѣлимое, а 98,7654321 за дѣлителя.

1219326309	987654321
987654321	12,3456789
231671988	
197530864	
34141124	
29629630	
4511494	
3950617	
560877	
493827	
67050	
59259	
7791	
6913	
878	
790	
88	
88	
0	

Вотъ какимъ образомъ произведено это дѣленіе: расположивъ обыкновеннымъ образомъ дѣлимое и дѣлителя, говоримъ: 9 въ 12 содержится одинъ разъ; пишемъ 1 въ частномъ, а подъ дѣлимымъ ставимъ произведеніе единицы на дѣлителя, то есть просто дѣлителя; вычитаемъ его изъ дѣлимаго, и получаемъ въ остаткѣ 231671988; далѣе: 9 въ 23, 2 раза, пишемъ 2 въ частномъ, и помножаемъ дѣлителя на 2; и такъ, $2 \times 1 = 2$, двухъ не пишемъ, а продолжаемъ: $2 \times 2 = 4$, $2 \times 3 = 6$ и такъ далѣе; получаемое произведеніе 197530864 вычитаемъ изъ 231671988, и получаемъ въ остаткѣ 34141124. Говоримъ опять: 9 въ 34 содержится 3 раза; пишемъ 3 въ частномъ, и помножаемъ дѣлителя на 3, начиная уже съ предпослѣдней его цифры 2. И такъ $3 \times 2 = 6$; но 6 ближе къ 10 чѣмъ къ 0, почему удерживаемъ единицу въ умѣ, и придавъ ее къ произведенію $3 \times 3 = 9$, получаемъ 10; пишемъ 0, и удерживаемъ опять въ памяти 1; далѣе, $3 \times 4 = 12$ и 1 въ умѣ, 13, пишемъ 3, 1 въ умѣ; $3 \times 5 = 15$ и 1, 16, пишемъ 6, а 1 въ умѣ, и такъ далѣе, пока не дойдемъ до первой цифры дѣлителя; такимъ образомъ получится произведеніе 29629630, которое вычитаемъ изъ 34141124, и находимъ въ остаткѣ 4511494. Продолжаемъ дѣленіе на томъ же самомъ основаніи, то есть для каждой новой цифры въ частномъ числѣ отступаемъ на одинъ знакъ отъ правой руки къ лѣвой въ дѣлителѣ, и получаемъ наконецъ въ остаткѣ 0, а въ частномъ числѣ 12,3456789. Что касается до числа десятичныхъ знаковъ, то оно легко опредѣлится принявъ въ соображеніе цѣлыя числа, сопровождающія дѣлимое и дѣлителя, также ихъ первые десятичные знаки.

Сокращенное дѣленіе можно производить еще другимъ образомъ: отсылаемъ къ статьѣ DIVISION ORDONNÉE.

Для превращенія обыкновенной дроби въ десятичную, приписываемъ къ числителю одинъ, два, три.... и вообще m нулей, чрезъ что данная дробь увеличится въ 10, во 100, въ 1000, и вообще въ 10^m разъ. Потомъ дѣлимъ числителя, такимъ образомъ увеличеннаго, на знаменателя предложенной дроби; очевидно, что частное число должно будетъ уменьшить въ 10, во 100, въ 1000, и вообще въ 10^m разъ, а этого достигаемъ подвинувъ запятую въ частномъ на 1, на 2, на 3,.... и вообще на m десятичныхъ знаковъ отъ правой стороны въ лѣвую. Вотъ нѣсколько примѣровъ:

Превратить $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{25}$, $\frac{411}{125}$ *въ десятичныя дроби.*

$$\begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \underline{28} & \overline{0,75} = \frac{3}{4} \\ 20 & \\ \underline{20} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 25 \\ \underline{50} & \overline{0,24} = \frac{6}{25} \\ 100 & \\ \underline{100} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 411 & 125 \\ \underline{375} & \overline{3,288} = \frac{411}{125}. \\ 360 & \\ \underline{250} & \\ 1100 & \\ \underline{1000} & \\ 1000 & \\ \underline{1000} & \\ 0 & \end{array}$$

Легко усмотрѣть, что не всякая дробь можетъ быть выражена точнымъ образомъ посредствомъ десятичной. Дѣйствительно, пусть будетъ $\frac{A}{B}$ предложенная дробь, которую предполагаемъ несократимою. Если бы дробь $\frac{A}{B}$ могла быть во всякомъ случаѣ превращена въ десятичную, то получили бы $\frac{A}{B}=\frac{D}{10^m}$, гдѣ D и m цѣлыя числа. Изъ этого равенства выводимъ $B\times D=10^m.A=2^m\times 5^m.A$, откуда $D=\frac{2^m\times 5^m.A}{B}$. Но какъ A и B по предположенію не имѣютъ общихъ дѣлителей, а D цѣлое число, то $2^m\times 5^m$ должно дѣлиться на B. Слѣдовательно, обыкновенная дробь $\frac{A}{B}$ выражается точнымъ образомъ дробью десятичною только въ томъ случаѣ, когда ея знаменатель B будетъ или степенью отъ 2, то есть вида 2^n, или степенью отъ 5, то есть вида 5^n, или наконецъ, если этотъ знаменатель выразится произведеніемъ двухъ степеней отъ чиселъ 2 и 5, то есть будетъ вида $2^n\times 5^m$. Когда B не удовлетворитъ такимъ требованіямъ, то десятичная дробь, выражающая $\frac{A}{B}$, будетъ простираться въ безконечность Впрочемъ очевидно, что по мѣрѣ увеличенія m, величина $\frac{D}{10^m}$ будетъ менѣе и менѣе разниствовать отъ дроби $\frac{A}{B}$, ибо раздѣливъ $10^m.A$ на B, получимъ частное число D, которое будетъ менѣе противъ надлежащаго, а сдѣлается бо́льшимъ, если увеличимъ его единицею. И такъ, $\frac{A}{B}$ будетъ заключаться между двумя числами $\frac{D}{10^m}$ и $\frac{D+1}{10^m}$, которыхъ разность равна $\frac{1}{10^m}$, и слѣдовательно, съ увеличеніемъ показателя m, можетъ быть уменьшена по произволенію. Вотъ примѣры безконечныхъ десятичныхъ дробей:

$$\frac{1}{3}=0,333333\ldots,\ \frac{40}{33}=1,212121\ldots\ldots$$

$$\frac{8}{7}=1,142857142857\ldots\ldots,\ \frac{3}{13}=0,230769230769\ldots\ldots$$

Легко доказать, что когда обыкновенная дробь $\frac{A}{B}$ выражается безконечною десятичною дробью, то сія послѣдняя будетъ *періодическою* (*fraction décimale périodique* или *circulante*), то есть, нѣкоторыя ея цифры будутъ непрерывно повторяться въ одномъ и томъ же порядкѣ. И такъ въ дроби $\frac{1}{3}$ повторяющаяся цифра будетъ 3, въ дроби $\frac{40}{33}$ повторяющіяся цифры 2 и 1, то есть число 21, и такъ далѣе. Совокупность повторяющихся цифръ называется *періодомъ дроби* (*période de la fraction*). Въ приведенныхъ примѣрахъ періоды будутъ соотвѣтственно: 3, 21; 142857, 230769.

Когда періодъ начинается съ первой десятичной цифры, то дробь принимаетъ названіе *простой періодической*, а ежели со второй или съ дальнѣйшей, то она называется *смѣшанною періодическою дробью.*

Мы сказали, что когда число B не подходитъ подъ видъ $2^n\times 5^m$, то превращая дробь $\frac{A}{B}$ въ десятичную, получаемъ безконечную періодическую дробь. И дѣйствительно, такъ какъ по предположенію A и B не имѣютъ общихъ дѣлителей, а B вида отличнаго отъ $2^n\times 5^m$, то ясно, что приписавъ сколько угодно нулей къ A, и произведя потомъ дѣленіе на B, никогда не получимъ остатка, равнаго нулю. Сверхъ того очевидно, что каждый остатокъ будетъ менѣе дѣлителя B, почему ихъ число и не можетъ превышать $B-1$. И такъ, предполагая даже, что всѣ эти остатки различны между собою, ясно, что послѣ нѣсколькихъ дѣленій получится одинъ изъ прежнихъ остатковъ, а слѣдовательно и прежняя цифра въ частномъ числѣ; далѣе, по причинѣ возвращающихся въ прежнемъ порядкѣ остатковъ, и цифры въ частномъ числѣ будутъ повторяться, и составятъ періодъ.

Превращеніе періодической десятичной дроби въ обыкновенную не представляетъ никакого затрудненія. Изъ слѣдующихъ двухъ примѣровъ легко усмотрѣть какъ должно поступать вообще.

Пусть данная періодическая дробь будетъ $x = 0,27272727....$ Помножаемъ это равенство на число 10, возвышенное въ степень, равную числу цифръ, заключающихся въ періодѣ, т. е. на $10^2 = 100$; получимъ

$$100\,x = 27,272727....$$

вычтя $\qquad x = 0,272727....$

найдется $99\,x = 27,$

откуда

$$x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}.$$

Возьмемъ смѣшанную періодическую дробь

$$x = 5,23165165165......$$

Помножимъ ее сперва на число 10, возвышенное въ степень, равную числу десятичныхъ цифръ, предшествующихъ періоду, сложенному съ числомъ цифръ самаго періода, то есть въ степень $2+3=5$; получимъ

$$100000\,x = 523165,165165165.....$$

Далѣе: помножимъ предложенную дробь на число 10, возвышенное въ степень, равную числу десятичныхъ цифръ, предшествующихъ періоду; найдемъ

$$100x = 523,165165165.....$$

Вычтя это равенство изъ предыдущаго, получимъ

$$99900x = 522642,$$

откуда

$$x = \frac{522642}{99900} = \frac{87107}{16650}.$$

DÉCIMÈTRE. Смот. MÉTRIQUE (NOUVEAU SYSTÊME).

DÉCISIONS. (Ис. Вѣр.) **РѢШЕНІЯ.** *Probabilités des décisions rendues à la pluralité des voix*; *вѣроятность справедливости рѣшеній по большинству голосовъ.* Смот. ASSEMBLÉES, TRIBUNAUX.

DÉCISTÈRE. Смот. MÉTRIQUE (NOUVEAU SYSTÊME).

DÉCLIC или **DÉCLICQ. ПРУЖИНА, ДЕРЖАЛКА.** Такъ называется всякая пружина, препятствующая извѣстному движенію. Напримѣръ, въ машинѣ для вбиванія свай, такая пружина служитъ для удержанія бабы на надлежащей высотѣ; посредствомъ веревки спускаютъ эту пружину, и баба падаетъ съ силою на верхъ сваи, и углубляетъ ее въ землю.

DÉCLIN. Смот. DÉCOURS.

DÉCLINAISON. (Астр.) **СКЛОНЕНІЕ.** Угловое разстояніе звѣзды отъ небеснаго экватора, измѣряемое на дугѣ большаго круга, проходящаго чрезъ полюсы міра и чрезъ звѣзду. Склоненіе называется *сѣвернымъ* (*boréale*) или *южнымъ* (*australe*), смотря по тому, въ какомъ полушаріи находится звѣзда — въ сѣверномъ или южномъ. Когда знаемъ высоту полюса, или широту φ мѣста наблюденія, и разстояніе z звѣзды отъ зенита во время ея прохожденія чрезъ меридіанъ, то склоненіе звѣзды, которое изобразимъ чрезъ δ, опредѣлится разностію $\delta = \varphi - z$. Если $\varphi > z$, то склоненіе будетъ одного наименованія съ широтою мѣста. Склоненіе вмѣстѣ съ прямымъ восхожденіемъ служатъ къ опредѣленію мѣста свѣтила, и, въ отношеніи къ звѣздамъ, имѣютъ то же значеніе, какъ широта и долгота мѣста на поверхности земной. Склоненіе звѣздъ перемѣняется по причинѣ собственнаго ихъ движенія и отступленія точекъ равноденственныхъ. Смот. PRÉCESSION.

Cercle de déclinaison. Кругъ склоненія; кругъ, проходящій чрезъ полюсы міра, и на которомъ измѣряется склоненіе.

Parallèles de déclinaison. Параллели, параллельные круги склоненія; малые круги небесной сферы, параллельные экватору.

Parallaxe de déclinaison. Параллаксъ склоненія; дуга круга склоненія, измѣряющая число градусовъ, на которое увеличивается или уменьшается склоненіе отъ дѣйствія параллакса высоты. Смот. PARALLAXE.

DÉCLINAISON. СКЛОНЕНІЕ. *Déclinaison d'un plan vertical*; *склоненіе вертикальной плоскости.* Въ Гномоникѣ, дуга горизонта, заключающаяся между первымъ вертикальнымъ кругомъ и пересѣченіемъ плоскости квадрана съ горизонтомъ.— *Déclinaison de l'aiguille aimantée*; *склоненіе магнитной стрѣлки.* Уголъ, на который горизонтальная намагниченная стрѣлка уклоняется отъ направленія полуденной линіи.

DÉCLINANT. (Астр.) **СКЛОНЯЮЩІЙСЯ.** Имѣющій какое либо склоненіе; Смот. выше. *Cadran déclinant*; *склоняющійся квадрант*.

DÉCLINATEUR или **DÉCLINATOIRE.** (Гном.) **ДЕКЛИНАТОРЪ.** Инструментъ, употребляемый въ Гномоникѣ, и посредствомъ котораго опредѣляется склоненіе и наклоненіе плоскости квадрана. Читатели найдутъ описаніе этого инструмента въ *Encyclopédie méthodique*, Mathématiques (Томъ 1 стр. 487).

DÉCLINATOIRE. (Практ. Геом.) **ДЕКЛИНАТОРЪ.** Малая буссоль, употребляемая при съёмкѣ плановъ, и служащая для приведенія менсулы въ надлежащее положеніе, когда на планѣ означено направленіе магнитной стрѣлки. Этотъ инструментъ дѣлается безъ круга, раздѣленнаго на градусы: на немъ означены только точки сѣвера и юга. — *Деклинаторомъ* называется также графометръ съ лимбомъ, раздѣленнымъ на градусы, и съ подвижною алидадою, которая снабжена компасомъ.

DÉCLINATORIUM, AIGUILLE или BOUSSOLE DE DÉCLINAISON. **КОМПАСЪ СКЛОНЕНІЯ.** Снарядъ, употребляемый для точныхъ наблюдедeній надъ склоненіемъ магнитной стрѣлки. Описаніе этого инструмента читатели найдутъ почти во всѣхъ курсахъ Физики.

DÉCOMPOSABLE. РАЗЛОЖИМЫЙ. *Un nombre décomposable en facteurs; число разложимое на множители. Chaque entier est décomposable en quatre carrés*; *всякое цѣлое число можетъ быть разложено на четыре квадрата. Toute fonction réele rationelle et entière est décomposable en facteurs réels du premier ou du second degré; всякая вещественная функція, цѣлая и раціональная, можетъ быть разложена на вещественные множители первой и второй степени. Un polyèdre est décomposable en pyramides*; *многогранникъ можетъ быть разложенъ, разбитъ на пирамиды. Toute force appliquée à un point matériel est décomposable en deux autres agissant à angle droit*; *всякая сила, приложенная къ матеріяльной точкѣ, можетъ быть разложена на двѣ другія, дѣйствующія подъ прямымъ угломъ.*

DÉCOMPOSER. РАЗЛОЖИТЬ, РАЗБИТЬ. *Décomposer un nombre entier en facteurs simples; разложить, разбить цѣлое число на простые множители. Décomposer un polygone en triangles*; *разложить, разбить многоугольникъ на треугольники. Décomposer une force en deux autres*; *разложить силу на двѣ другія.*

DÉCOMPOSITION. (Ариѳ. и Алг.) **РАЗЛОЖЕНІЕ, РАЗБИВКА.** Дѣйствіе, посредствомъ котораго число или какое нибудь алгебрическое выраженіе изображается въ другомъ видѣ, болѣе простомъ или удобномъ для предполагаемой цѣли. *Décomposition d'un nombre en facteurs simples*; *разложеніе числа на простые множители;* Смот. DIVISEUR. *Décomposition d'une fraction rationelle en fractions partielles*; *разложеніе раціональной дроби на частныя дроби*; Смот. FRACTION. *Décomposition des équations*; *разложеніе уравненій.* Таково, напримѣръ, разложеніе, по способу *Декарта*, уравненія 4-ой степени на два множителя 2-ой степени; Смот. ÉQUATION, BIQUADRATIQUE.

DÉCOMPOSITION. (Геом.) **РАЗЛОЖЕНІЕ, РАЗБИВКА.** Раздѣленіе какого нибудь цѣлаго на части. *Décomposition d'un polygone en triangles et d'un polyèdre en pyramides*; *разложеніе многоугольника на треугольники и многогранника на пирамиды.*

DÉCOMPOSITION DES FORCES. (Мех.) **РАЗЛОЖЕНІЕ СИЛЪ.** Дѣйствіе, посредствомъ котораго данныя силы замѣняютъ другими, дѣйствующими вообще по направленіямъ, отличнымъ отъ первыхъ; Смот. PARALLELOGRAMME DES FORCES. Когда, напротивъ того, приводятъ нѣсколько силъ къ меньшему числу, то такое дѣйствіе называется *совокупленіемъ силъ*, Смот. COMPOSITION DES FORCES.

DÉCOMPOSITION DES VITESSES. РАЗЛОЖЕНІЕ СКОРОСТЕЙ. Замѣненіе данныхъ скоростей другими, имѣющими въ отношеніи къ первымъ другія направленія. Смот. VITESSE, PARALLÉLOGRAMME DES VITESSES.

DÉCOURS. (Астр.) **УЩЕРБЪ ЛУНЫ.** Промежутокъ времени между полнолуніемъ и послѣдующимъ новолуніемъ. Время отъ новолунія до полнолунія называется *наращеніемъ луны* (*croissant*).

DÉCRÉMENT, то же что **AUGMENT.** Уст. выр. **ПРИРАЩЕНІЕ.** Смот. ACCROISSEMENT.

DÉCRIRE. (Геом. и Мех.) **ОПИСЫВАТЬ.** Въ Геометріи говорится, что точка описываетъ прямую или кривую линію, когда воображаемъ что эта точка движется, и въ движеніи своемъ чертитъ ту прямую или кривую линію. Въ томъ же смыслѣ говорятъ, что линія *описываетъ* поверхность, площадь описываетъ тѣло. Смот. GÉNÉRATION. Въ Механикѣ *описывать* употребляется въ значеніи глаголовъ *переходить, пробѣгать*. И такъ, говоримъ: *un corps pesant lancé dans le vide décrit une parabole*; *тяжелое тѣло, брошенное въ пустомъ пространствѣ, описываетъ параболу*. *Le rayon vecteur décrit des aires proportionelles au temps*; *радіусъ векторъ описываетъ площади, пропорціональныя временамъ*. — Начертить. *Décrire un cercle, une parabole*; *начертить, описать кругъ, параболу*. Смот. DESCRIPTION.

DÉCRIVANT. (Геом.) Не употр. **ПРОИЗВОДЯЩІЙ, ОПИСЫВАЮЩІЙ, ЧЕРТЯЩІЙ.** Смот. GÉNÉRATEUR. *Point décrivant*; *описывающая, чертящая точка*.

DÉCROISSANT. (Анал.) **УМЕНЬШАЮЩІЙСЯ, УБЫВАЮЩІЙ, НИСХОДЯЩІЙ.** *Série décroissante*; *нисходящій рядъ*. Смот. CROISSANT.

DÉCROISSEMENT. УМЕНЬШЕНІЕ, УБЫВАНІЕ.

DÉCROITRE. (Анал.) **УМЕНЬШАТЬСЯ, УБЫВАТЬ.** *Cette quantité restant constamment positive, décroit au-delà de toute limite*; *эта величина, оставаясь постоянно положительною, уменьшается, и дѣлается менѣе всякаго даннаго количества*.

DÉCUPLE. (Ариө.) **ДЕСЯТЬ РАЗЪ ВЗЯТЫЙ, УДЕСЯТЕРЕННЫЙ, ДЕСЯТИЧНЫЙ.** *Rapport décuple*; *десятеричное отношеніе*. Таково напримѣръ отношеніе 30 : 3.

DÉCUPLÉ (RAPPORT) или RAISON DÉCUPLÉE. Не упот. **ОТНОШЕНІЕ КОРНЕЙ ДЕСЯТЫХЪ СТЕПЕНЕЙ.** Напримѣръ, отношеніе 3 : 2 равняется отношенію корней десятыхъ степеней чиселъ 3^{10} и 2^{10}, ибо $\sqrt[10]{3^{10}}=3$ и $\sqrt[10]{2^{10}}=2$.

DÉCUSSATION (POINT DE). (Опт.) **ТОЧКА ПЕРЕСѢЧЕНІЯ ЛУЧЕЙ,** напримѣръ фокусъ зажигательнаго стекла или зеркала.

DÉDOUBLER (SE). РАЗБИВАТЬСЯ, РАЗЛАГАТЬСЯ НА ДВА. Напримѣръ, уравненіе

$$(ax-by)(a'x-b'y-1)=0,$$

разлагается на два слѣдующія:

$$ax-by=0 \text{ и } a'x-b'y-1=0.$$

DÉDUCTION. ВЫВОДЪ, ВЫВОДИМОЕ СЛѢДСТВІЕ.

DÉDUIRE. ВЫВЕСТИ. *Déduire la valeur de l'inconnue*; *вывести величину неизвѣстной*.

DÉFAILLANT. Смот. DÉFECTIF.

DÉFAUT. (Гидравл.) **РАЗНОСТЬ** между высотою, на которую струя водомета должна бы подняться по теоріи и дѣйствительною ея высотою. Смот. JET D'EAU. — Недостатокъ.

PAR DÉFAUT. По недостатку. *Ces deux nombres diffèrent de la véritable valeur de l'inconnue l'une par excès, et l'autre par défaut.* *Одно изъ сихъ чиселъ разнствуетъ отъ настоящей величины неизвѣстной по избытку, а другое, по недостатку.* То есть, одно число болѣе неизвѣстной, а другое менѣе.

DÉFECTIF (NOMBRE) или NOMBRE DÉFICIENT, или еще NOMBRE DÉFAILLANT. (Ариө.) **НЕДОСТАТОЧНОЕ ЧИСЛО.** Смот. ABONDANT.

DÉFECTIVES (HYPERBOLES), или HYPERBOLES DÉFICIENTES. (Геом.) **НЕСОВЕРШЕННЫЯ ИПЕРБОЛЫ,** иперболы объ одной ассимптотѣ. Такъ названы *Ньютономъ* кривыя третьяго порядка, имѣющія только одну прямолинейную ассимптоту, и слѣдовательно отличающіяся въ этомъ отношеніи отъ обыкновенной или Аполлоніевой иперболы, которая имѣетъ двѣ ассимптоты.

Кривая, опредѣляемая уравненіемъ

$$xy^2+\varepsilon y=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta,$$

обращается въ *недостаточную иперболу* когда $\alpha<0$. Дѣйствительно, рѣшивъ предыдущее уравненіе въ отношеніи къ y, получимъ

$$y=-\frac{\varepsilon}{2x}\pm\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma+\frac{\delta}{x}+\frac{\varepsilon^2}{4x^2}};$$

если положимъ $x=0$, то найдемъ $y=-\frac{\varepsilon}{0}=$ *безконечности*. Слѣдовательно ось y-овъ будетъ ассимптотою разсматриваемой кривой. Положивъ $x=\infty$, найдемъ уравненіе $y=\pm x\sqrt{\alpha}$, которое, по причинѣ α отрицательнаго, изобразитъ ассимптоты мнимыя. И такъ, предложенная кривая третьяго порядка имѣетъ только одну ассимптоту, совпадающую съ осью y-овъ.

DÉFÉRENT (CERCLE). ЭКСЦЕНТРИЧЕСКІЙ

КРУГЪ, описанный около земли центромъ эпицикла планеты. Древніе астрономы, для объясненія видимыхъ неравенствъ въ движеніи планетъ, предполагали, что каждая планета движется по окружности круга (названнаго ими эпициклом), коего центръ описываетъ около земли *эксцентрическій кругъ* (*cercle portant* или *déférent*) въ то время какъ планета переходитъ свой эпициклъ. Смот. EPICYCLE.

DÉFICIENT (NOMBRE) или **DÉFECTIF.** Смот. ABONDANT. *Hyperbole déficiente.* Смот. DÉFECTIVE (HYPERBOLE).

DÉFICIT. НЕДОСТАТОКЪ.

DÉFINIE (INTÉGRALE). МЕЖДУПРЕДѢЛЬНЫЙ, ОПРЕДѢЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЪ. Смот. INTÉGRAL (CALCUL).

DÉFINIR. ОПРЕДѢЛИТЬ. Смот. DÉFINITION. *Définir une courbe par son équation*; *опредѣлить кривую уравненіемъ.* Смот. COURBE.

DÉFINITIF. ОКОНЧАТЕЛЬНЫЙ. — КОНЕЧНЫЙ. *Résultat définitif*; *окончательный выводъ. Intégrale définitive*; *окончательный интегралъ.*

DÉFINITION. ОПРЕДѢЛЕНІЕ. Въ Логикѣ различаютъ два рода опредѣленій: *опредѣленіе словъ* или *именное* (*définition de nom*) и *опредѣленіе вещей* или *дѣйствительное* (*définition de chose*).

Именное опредѣленіе есть объясненіе смысла, который придаемъ употребляемому нами слову. Въ *дѣйствительномъ опредѣленіи* исчисляются всѣ признаки, составляющіе сущность опредѣляемой вещи, и отличающіе ее отъ всѣхъ другихъ.

Въ чистомъ Анализѣ, и даже въ Геометріи, употребляются, собственно говоря, только именныя опредѣленія. И такъ, опредѣляя термины: *сложеніе*, *вычитаніе*, *дробь*, *квадратное число*, *треугольникъ*, *шаръ* и проч. мы только объясняемъ то, что разумѣемъ подъ сими словами.

Въ приложеніяхъ математическаго анализа къ Естественной Философіи, мы принуждены заимствовать данныя изъ наблюденій надъ явленіями природы, и въ такомъ случаѣ нерѣдко предлагаемъ дѣйствительныя опредѣленія, болѣе или менѣе удовлетворительныя. Такъ, напримѣръ, наблюдая природу тѣлъ твердыхъ, жидкихъ и воздухообразныхъ, мы опредѣляемъ каждое изъ сихъ трехъ состояній, и потомъ уже на этихъ опредѣленіяхъ основываемъ дальнѣйшія изслѣдованія ихъ свойствъ.

Всякое опредѣленіе состоитъ изъ *простыхъ* или *первоначальныхъ идей*; простая идея не подлежитъ опредѣленію. Нѣкоторые авторы, и въ особенности лексикографы, пытались опредѣлить понятія о *величинѣ*, *линіи*, *пространствѣ*, *времени* и т. п.; но они не успѣли въ этомъ, потому что подобныя понятія принадлежатъ къ числу простыхъ идей, и не могутъ быть опредѣлены. Отсылаемъ къ сказанному объ этомъ предметѣ въ статьѣ COURBE. Не смотря на всѣ наши старанія опредѣлять только такія слова, которыя подлежатъ опредѣленію, читатели, безъ сомнѣнія, найдутъ въ нашемъ Лексиконѣ нѣкоторыя противувольныя отступленія отъ этого правила; можетъ быть также встрѣтятъ они и опредѣленія, не совсѣмъ удовлетворительныя. Мы сознаемся въ этомъ недостаткѣ, но вмѣстѣ съ тѣмъ позволяемъ себѣ замѣчаніе, что есть такія понятія, которымъ весьма трудно сдѣлать хорошее опредѣленіе.

DÉFLEXION. СОВРАЩЕНІЕ, УКЛОНЕНІЕ.

DÉFORMATION. Смот. ANAMORPHOSE.

DÉGAGEMENT DE L'INCONNUE. (Алг.) **ОСВОБОЖДЕНІЕ НЕИЗВѢСТНОЙ.** Напримѣръ, изъ уравненія $\frac{5x}{7}+6=16$ получаемъ *чрезъ освобожденіе неизвѣстной*, $x=14$.

DÉGAGER L'INCONNUE. ОСВОБОДИТЬ НЕИЗВѢСТНУЮ. Смот. выше.

DÉGRADATION DE LUMIÈRE. (Физ.) **ПОСТЕПЕННОЕ УМЕНЬШЕНІЕ, ОСЛАБЛЕНІЕ СВѢТА.**

DEGRÉ. (Геом.) **ГРАДУСЪ.** 360-ая часть цѣлой окружности круга по старому дѣленію, и 400-ая по новому. Смот. ANGLE, CERCLE, CIRCONFÉRENCE. — Степень. *Courbe du second, du troisième degré*; *кривая второй, третей степени.* Смот. COURBE.

DEGRÉ. (Алг.) **СТЕПЕНЬ. — ИЗМѢРЕНІЕ.** *Degré d'une équation*; *степень уравненія.* Такъ называется показатель высшей степени неизвѣстной въ алгебрическомъ уравненіи. *Équation du second, du troisième degré*; *уравненіе второй, третей степени.* Смот. PUISSANCE, EXPOSANT, ÉQUATION.

Degré d'homogénéité; *степень измѣренія однородности*. Смот. HOMOGÈNE (FONCTION), DIMENSION.

DEGRÉ. (Астр.) **ГРАДУСЪ.** *Degré de latitude, de longitude*; *градусъ широты, долготы*. Смот. LATITUDE, LONGITUDE.

DEGRÉ TERRESTRE. (Астр.) **ЗЕМНОЙ ГРАДУСЪ.** Земная дуга, считаемая по меридіану, и соотвѣтствующая небесному градусу. И такъ, земной градусъ есть дуга меридіана, при оконечностяхъ которой вертикальныя линіи, то есть линіи перпендикулярныя къ земной поверхности, наклонены одна къ другой подъ угломъ, равнымъ одному градусу. Эту дугу меридіана выражаютъ въ извѣстной мѣрѣ, какъ то въ миляхъ, верстахъ, метрахъ и проч. Что касается собственно до измѣренія земныхъ градусовъ, то отсылаемъ по сему предмету къ статьѣ: MESURE DE LA TERRE. Смот. также FIGURE DE LA TERRE.

Degré de latitude, de longitude, d'ascension, de déclinaison и проч. Градусъ широты, долготы, восхожденія, склоненія и проч. Смот. LATITUDE, LONGITUDE, ASCENSION, DÉCLINAISON и проч.

DEGRÉ de certitude. (Исч. Вѣр.) **СТЕПЕНЬ** достовѣрности. *Яковъ Бернулли* употреблялъ это наименованіе въ одномъ смыслѣ съ *вѣроятностію*. Такъ какъ сія послѣдняя выражается всегда дробью, когда принимаютъ *достовѣрность* за единицу, то ясно, что вѣроятность будетъ нѣкоторою частію достовѣрности, и поэтому можетъ быть названа *степенью достовѣрности*. Впрочемъ это наименованіе, въ приведенномъ сей-часъ значеніи, вышло теперь изъ употребленія. Нынѣ, придаютъ ему слѣдующій смыслъ: сверхъ достовѣрности *математической* или *абсолютной*, разсматриваютъ еще *достовѣрность физическую* (*certitude physique*) и *достовѣрность внутреннюю* или *нравственную* (*certitude morale*). Подъ этими названіями разумѣютъ не иное что, какъ весьма большія вѣроятности. И такъ, когда человѣкъ говоритъ, что онъ внутренне убѣжденъ прожить еще одну минуту, то это значитъ, что вѣроятность его существованія въ продолженіи этой минуты такъ мало разнится отъ единицы, то есть, отъ абсолютной достовѣрности, что разность сію можно пренебречь. Достовѣрности физическія и нравственныя могутъ быть весьма различны, и онѣ тѣмъ болѣе заслуживаютъ названіе достовѣрности, чѣмъ менѣе разнствуютъ отъ достовѣрности математической. Теперь легко понять, что должно разумѣть подъ реченіемъ: *различныя степени достовѣрности*; это выраженіе, въ слѣдствіе сказаннаго выше, не будетъ даже требовать и объясненія, когда замѣнимъ названіе какъ физической, такъ и нравственной достовѣрности наименованіемъ: *большая вѣроятность*. Для дальнѣйшихъ подробностей отсылаемъ къ статьѣ: PROBABILITÉ.

DÉINCLINANT или **DÉINCLINÉ (CADRAN).** Не употр. Смот. CADRAN INCLINÉ ET DÉCLINANT.

DÉLIAQUE (PROBLÊME). ДЕЛІЙСКАЯ ЗАДАЧА или задача объ удвоеніи куба. Смот. DUPLICATION DU CUBE.

DÉLINÉATION. ВЫЧЕРЧИВАНІЕ, ЧЕРЧЕНІЕ. Изображеніе какой либо фигуры одними линіями.

DEMANDE, или **POSTULAT. ТРЕБОВАНІЕ, ПОСТУЛАТЪ, ПОЛОЖЕНІЕ.** — Предположеніе, ипотеза. Такъ называется очевидное предложеніе, которымъ утверждаютъ возможность или невозможность что либо сдѣлать. Напримѣръ, когда говоримъ, что чрезъ двѣ точки можно провести прямую линію, или что кругъ можетъ быть описанъ изъ какой угодно точки произвольнымъ радіусомъ, то такого рода предложенія называются *постулатами*. Иногда постулаты бываютъ менѣе очевидны: такъ, напримѣръ, Маркизъ *де л'Опиталь* основываетъ свой трактатъ *Analyse des infiniment petits* на слѣдующихъ двухъ положеніяхъ: 1-е Требованіе. Двѣ величины, разнствующія между собою количествомъ безконечно малымъ, могутъ быть принимаемы одна за другую. 2-е Требованіе. Кривая линія можетъ быть принимаема за многоугольникъ, состоящій изъ безконечнаго числа прямолинейныхъ, безконечно малыхъ сторонъ. Впрочемъ, между *ипотезою* и *постулатомъ* нѣкоторые полагаютъ то различіе, что ипотеза можетъ быть не совсѣмъ точная, какъ случается иногда въ наукахъ Физико-математическихъ, между тѣмъ какъ постулатъ, по опредѣленію своему, означаетъ предложеніе, справедливость котораго не подвержена никакому сомнѣнію.

DEMI, HÉMI, SEMI. ПОЛУ. Это слово употребляется слитно съ другимъ, и въ такомъ случаѣ означаетъ половину той величины, которую называютъ. И такъ, говорится: *demi-diamètre, hémisphère, parabole semi-cubique*; *полу-діаметръ, полушаріе, полу-кубическая парабола*, или, что всё равно, *кубическая парабола второй степени*. Смот. CUBIQUE (PARABOLE). Впрочемъ слова *hémi* и *semi* употребляются весьма рѣдко.

DEMI-CERCLE. (Геом.) Полу-кругъ. Пространство, ограниченное съ одной стороны полу-окружностію круга, а съ другой его поперечникомъ.

DEMI-DIAMÈTRE. (Геом.) Полу-поперечникъ, полу-діаметръ, радіусъ. Смот. DIAMÈTRE.

DEMI-ORDONNÉES. Не упот. (Геом.) Полуординаты. Подъ этимъ наименованіемъ прежніе математики разумѣли линіи, называемыя нынѣ просто *ординатами*. Смот. COORDONNÉES.

DEMI-PARABOLE. Не упот. (Геом.) Полу-парабола. Такъ называли нѣкоторые авторы кривыя линіи, опредѣляемыя уравненіемъ вида $y^m = px^{m-1}$, напр. $y^3 = px^2$, $y^4 = px^3$, и проч. — Нынѣ *полу-параболой*, *полу-эллипсомъ* и проч. называютъ половину параболы, эллипса, и вообще кривой, раздѣленной своею осью на двѣ части равныя.

DEMI-CERCLE или RAPPORTEUR. ТРАНСПОРТИРЪ. Инструментъ для нанесенія какихъ нибудь угловъ на бумагу. Смот. RAPPORTEUR.

DEMI-CROIX. ПОЛУ-КРЕСТЪ. Инструментъ, бывшій въ употребленіи у Голландцевъ для опредѣленія высоты свѣтилъ на морѣ. Полу-крестъ не иное что какъ половина такъ называемаго *геометрическаго креста*.

DÉMONSTRATION. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, ДОВОДЪ. Умствованіе, посредствомъ котораго основываютъ на истинахъ очевидныхъ справедливость какого либо предложенія. Впрочемъ, нѣтъ необходимости восходить во всякомъ случаѣ до первоначальныхъ аксіомъ: достаточно привести доказательство какого либо предложенія къ истинѣ, предварительно доказанной, то есть, выведенной непосредственно изъ сихъ аксіомъ, или основанной на предложеніяхъ, которыя сами проистекаютъ изъ первоначальныхъ истинъ. Такимъ образомъ мы значительно сокращаемъ доказательства, не нарушая ихъ строгости, ибо, отъ вспомогательныхъ предложеній всегда можемъ дойти до истинъ первоначальныхъ.

Всякое доказательство имѣетъ основаніемъ одно изъ слѣдующихъ трехъ началъ: 1°. *Начало противорѣчія и тождества* (*principe de contradiction et d'identité*). 2°. *Начало исключенія* (*principe d'exclusion*) и 3°. *Начало достаточной причины* (*principe de la raison suffisante*). Мы не будемъ останавливаться на разборѣ сихъ началъ: подробности по сему предмету принадлежатъ къ Логикѣ. Скажемъ только, что въ *Чистой Математикѣ* и въ *Геометріи* употребляютъ доказательства, основанныя на первыхъ двухъ началахъ, а въ *Прикладной* пользуются иногда и началомъ достаточной причины. Древніе геометры основывали свои доказательства почти исключительно на началѣ противорѣчія. Смот. ABSURDE (RÉDUCTION A L').

DÉMONSTRATION A PRIORI. Доказательство a priori; доказательство отъ перваго. Когда, принявъ за точку отправленія первоначальныя аксіомы, или уже доказанныя истины, выводимъ справедливость какого либо предложенія, то такой способъ умствованія называется доказательствомъ *a priori*. И такъ, доказательство *a priori*, собственно говоря есть *синтетическое*.

DÉMONSTRATION A POSTERIORI. Доказательство a posteriori; доказательство отъ послѣдняго. Когда принимаемъ за точку отправленія ту истину, которую имѣемъ въ виду доказать, и чрезъ рядъ вѣрныхъ и равнообъемлющихъ заключеній доходимъ до другой истины, уже доказанной, или до первоначальныхъ аксіомъ, то такой способъ умствованія называется доказательствомъ *a posteriori*. Можетъ также случиться, что принявъ за точку отправленія доказываемую истину, и выводя изъ нея рядъ вѣрныхъ и равнообъемлющихъ съ нею другихъ истинъ, дойдемъ наконецъ до слѣдствія, раздробляющагося на нѣсколько предложеній, которыя, взятыя въ совокупности, равнообъемющи съ этимъ слѣдствіемъ. Если каждое изъ упомянутыхъ предложеній приводитъ къ первоначальнымъ аксіомамъ или къ истинамъ, уже доказаннымъ, то мы въ правѣ будемъ заключить о справедливости предположенной истины, то есть той, которую имѣли въ виду доказать. Такое доказательство будетъ также *a posteriori*. Изъ этого опредѣленія видимъ, что доказательства *a posteriori* принадлежатъ къ числу *аналитическихъ*.

Объяснимъ примѣромъ сказанное здѣсь о доказательствахъ *a priori* и *a posteriori*. Если бы имѣли въ виду доказать *законъ всеобщаго тяготѣнія*, то представились бы на этотъ конецъ два способа: 1°. Можно бы было принять за точку отправленія три закона Кеплера, изъ которыхъ, посредствомъ непрерывнаго ряда заключеній, вывели бы выраженіе для ускорительной силы, удерживающей планеты въ ихъ орбитахъ. Такимъ образомъ мы доказали бы *a priori* Нютоновъ законъ. 2°. Можно также допустить этотъ законъ, и потомъ выводить изъ него слѣдствія; когда же въ числѣ этихъ слѣдствій найдемъ три закона Кеплера, принимаемые за неопровержимыя истины, доказанныя наблюденіями, и когда сверхъ того докажемъ, что никакой другой законъ притяженія не приведетъ къ упомянутымъ истинамъ, то въ правѣ будемъ заключить о справедливости первоначальнаго предположенія, то есть, закона всеобщаго тяготѣнія. Такое доказательство будетъ *a posteriori*.

DÉMONSTRATION DIRECTE. ПРЯМОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство, проистекающее изъ самой сущности разсматриваемаго предмета.

DÉMONSTRATION INDIRECTE. НЕ ПРЯМОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство, основанное на истинахъ, взятыхъ внѣ разсматриваемаго предмета. Къ этому роду принадлежитъ *доводъ къ нелѣпости*. Для другихъ подробностей объ этомъ предметѣ, отсылаемъ читателей къ статьямъ: ANALYSE, EXCLUSION (MÉTHODE D'), EXAUSTION (MÉTHODE D'), INDIVISIBLES (MÉTHODE DES), INDUCTION, SYNTHÈSE и проч.

DÉMONSTRATION PAR L'ABSURDE или DÉMONSTRATION A L'IMPOSSIBLE. Смот. ABSURDE (RÉDUCTION A L').

DÉMONSTRATION MÉCANIQUE. МЕХАНИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Когда посредствомъ приличныхъ инструментовъ, или графическими способами, повѣряемъ справедливость какого либо предложенія, то говоримъ, что доказали *механически* это предложеніе. Напримѣръ, если изъ трехъ угловъ треугольника, однимъ и тѣмъ же радіусомъ, опишемъ дуги, измѣряющія углы этого треугольника, и потомъ, посредствомъ хордъ, нанесемъ эти три дуги на окружность круга, тѣмъ же радіусомъ описаннаго, то увидимъ, что совокупность трехъ дугъ составитъ полу-окружность; отсюда заключаемъ, что сумма трехъ угловъ треугольника равна двумъ прямымъ угламъ. Равнымъ образомъ, доказываемъ *механически* законы паденія тяжелыхъ тѣлъ посредствомъ *Атвудовой машины*. Смот. ATWOOD (MACHINE D'). Само собой разумѣется, что механическія доказательства въ чистомъ Анализѣ и въ Геометріи ни въ какомъ случаѣ не могутъ быть допущены.

DÉMONTER. (Прикл. Мех.) **РАЗБИРАТЬ.** Говорится преимущественно о машинахъ, составленныхъ изъ частей металлическихъ. *Démonter une montre*; *разобрать часы*. Смот. DÉSASSEMBLER.

DÉMONTRER. ДОКАЗАТЬ. Смот. DÉMONSTRATION.

DÉNAIRE (ARITHMÉTIQUE). Смот. ARITHMÉTIQUE.

DENDROMÈTRE. (Практ. Геом.) **ДЕНДРОМЕТРЪ, ДРЕВОМѢРЪ.** Инструментъ посредствомъ котораго измѣряютъ самымъ простымъ образомъ высоты и діаметры деревъ. Дендрометръ употребляется также для измѣренія высотъ и разстояній, приступныхъ и неприступныхъ.

DENIER. ОДНОПРОЦЕНТНЫЙ КАПИТАЛЪ. Капиталъ, съ котораго получается одинъ процентъ. *L'intérêt est à* 20 *deniers*; *одинъ процентъ съ* 20, или, что все равно, 5 *процентовъ со ста*. Смот. INTÉRÊT.

DÉNOMINATEUR. (Ариѳ.) **ЗНАМЕНАТЕЛЬ.** Знаменателемъ дроби называется число, означающее на сколько частей, по предположенію, раздѣлена единица. Смот. FRACTION. *Réduire des fractions au même dénominateur* или *à même dénomination*; *привести дроби къ одному* или, *къ общему знаменателю*.

DÉNOMINATEUR D'UN RAPPORT или RAISON.

Не упот. Знаменатель содержанія. Смот. RAPPORT.

DÉNOMINATION. Не упот. То же что DÉNOMINATEUR (Смот.). — **ВИДЪ.** *Une quantité présentée sous deux dénominations différentes*; *количество представленное въ двухъ различныхъ видахъ.* Смот. FORME.

DÉNOMINÉS (NOMBRES). (Ариө.) Не упот. **ИМЕНОВАННЫЯ ЧИСЛА.** Смот. COMPLEXE.

DENSITÉ. (Мех.) **ПЛОТНОСТЬ.** Частное, получаемое чрезъ раздѣленіе массы какого ни есть тѣла на его объёмъ, называется *среднею плотностію* (*densité moyenne*) этого тѣла. Если, вмѣсто всего тѣла, будемъ разсматривать только какую нибудь часть его, то получимъ среднюю плотность этой части. Наконецъ, если предположимъ, что разсматриваемая частица тѣла дѣлается безконечно малою, то частное, о которомъ идетъ рѣчь, изобразитъ среднюю плотность частицы. Для другой, безконечно малой же частицы, плотность будетъ также другая, и вообще она измѣнится при переходѣ отъ одной частицы тѣла къ другой. Пусть будутъ $dm, dm', dm'', \ldots$ массы безконечно малыхъ частицъ, составляющихъ тѣло, а $dv, dv', dv'', \ldots$ объёмы этихъ самыхъ частицъ; плотности сихъ послѣднихъ выразятся соотвѣтственно чрезъ $\frac{dm}{dv}, \frac{dm'}{dv'}, \frac{dm''}{dv''}, \ldots$

Если означимъ чрезъ M массу всего тѣла, а чрезъ V объёмъ его, то дробь

$$\frac{dm+dm'+dm''+\ldots}{dv+dv'+dv''+\ldots}=\frac{M}{V}$$

изобразитъ *среднюю плотность* тѣла, и это названіе весьма свойственно, ибо дробь $\frac{M}{N}$ дѣйствительно выражаетъ среднюю между дробями $\frac{dm}{dv}, \frac{dm'}{dv'}, \frac{dm''}{dv''}, \ldots$ Когда всѣ эти дроби равны между собою, то тѣло принимаетъ названіе *однороднаго*; въ такомъ случаѣ средняя его плотность, одинаковая для всѣхъ составляющихъ частицъ, называется просто *плотностію.* Изъ этого слѣдуетъ, что за плотность тѣла однороднаго можно принять массу единичнаго его объёма. Читатели найдутъ почти во всѣхъ трактатахъ о Физикѣ таблицы, показывающія численныя значенія этой массы для многихъ однородныхъ веществъ. Чтобы найти массу какого ни есть объёма, стоитъ только помножить на число, которое изображаетъ этотъ объёмъ, показаніе таблицы, соотвѣтствующее разсматриваемому веществу. Смот. MASSE, PESANTEUR SPÉCIFIQUE.

DENT. (Мех.) **ЗУБЕЦЪ.** Зубцами называются выдающіяся части, которыми усаженъ ободъ колеса, а промежутки между зубцами именуются *впадинами* (*creux de la roue*). Самое же колесо въ такомъ случаѣ принимаетъ названіе *зубчатаго* (*roue dentée*). Къ *валу* (*arbre, axe*) колеса A (черт. 8 Листъ VII) обыкновенно прикрѣпляется наглухо другое зубчатое колесо a, меньшаго размѣра, именуемое *шестернею* (*pignon*); зубцы шестерни называются *кулаками*, а иногда *крыльями* (*ailes*). Кулаки шестерни, задѣвая за зубцы втораго колеса B, сообщаютъ сему послѣднему вращательное движеніе около его оси, и такъ далѣе.

Пусть будутъ P и Q двѣ силы, приложенныя къ разсматриваемой системѣ зубчатыхъ колесъ. Положимъ, что сила P направляется по касательной mT (черт. 8) къ первому колесу, а Q дѣйствуетъ посредствомъ веревки, навивающейся на валъ послѣдняго колеса. Для равновѣсія этихъ двухъ силъ, *сила P должна относиться къ сопротивленію Q, какъ произведеніе радіусовъ всѣхъ шестерень $a, b, c \ldots$ къ произведенію радіусовъ всѣхъ колесъ $A, B, C \ldots$* Смот. TOUR.

И такъ, когда имѣемъ три колеса, какъ означено на чертежѣ 8, то для равновѣсія силъ P и Q должно быть

$$P : Q :: rr'r'' : RR'R''$$

или

$$P = Q.\frac{rr'r''}{RR'R''},$$

гдѣ r, r' и r'' соотвѣтственно изображаютъ радіусы круговъ a, b и c, а R, R' и R'' радіусы колесъ A, B и C.

Въ большихъ машинахъ употребляютъ часто вмѣсто шестерень *барабаны* (*lanternes*). На чертежѣ 9 (Листъ VII), CD изображаетъ барабанъ, который состоитъ изъ нѣсколькихъ жердочекъ, называемыхъ *цѣвками* (*fuseaux*); онѣ параллельны между собою, и скрѣплены посредствомъ двухъ кружковъ m и n. Цѣвки барабана, при его обращеніи около оси EF, задѣваютъ за зубья колеса *AB*, которое такимъ образомъ и приводится въ движеніе. Смот. ALUCHONS.

Зубчатые колесы употребляются въ большей части машинъ, напримѣръ въ мельницахъ, часахъ и проч. Главное назначеніе зубчатыхъ колесъ состоитъ въ томъ, чтобы передать вращательное движеніе другому колесу и вмѣстѣ съ тѣмъ измѣнить угловую его скорость. Для дальнѣйшихъ подробностей отсылаемъ къ статьямъ: ENGRENÁGES (THEORIE DES), TOUR.

DENTÉ. (Мех.) **ЗУБЧАТЫЙ.** *Roue dentée*; *зубчатое колесо*. Смот. DENT, ROUE.

DÉPASSER. ПРЕВЫШАТЬ, ПРЕВОСХОДИТЬ. *L'équation finale ne dépassera pas le cinquième degré*; *окончательное уравненіе будетъ не выше пятой степени.*

DÉPENDANCE. ЗАВИСИМОСТЬ, ПОДЧИНЕННОСТЬ. *Ces deux quantités sont dans une dépendance mutuelle*; *между сими двумя количествами существуетъ взаимная зависимость, подчиненность.*

DÉPENDANTE (VARIABLE). (Анал.) **ПЕРЕМѢННАЯ ЗАВИСИМАЯ.** Когда перемѣнныя величины связаны между собою такъ, что по данной одной или нѣсколькимъ изъ нихъ, всѣ остальныя величины опредѣляются, то сіи послѣднія называются *перемѣнными зависимыми*. И такъ, въ уравненіи $z = f(x,y)$, величина z можетъ быть принимаема за перемѣнную *зависимую*, ибо она зависитъ отъ частныхъ значеній, приписываемыхъ измѣняемымъ величинамъ x и y, которыя, въ этомъ случаѣ, называются уже *перемѣнными независимыми* (*variables indépendantes*). Смот. FONCTION, VARIABLE.

DÉPENDRE. ЗАВИСѢТЬ. *Cette quantité dépend de plusieurs autres*; *эта величина зависитъ отъ нѣсколькихъ другихъ*. Смот. выше.

DÉPENSE. (Гидрав.) **РАСХОДЪ.** *Расходомъ воды* называется количество воды, вытекающей въ опредѣленное время изъ водохранилища чрезъ трубку, извѣстнаго діаметра.

DÉPLACEMENT. (Мех.) **ПЕРЕМѢЩЕНІЕ, ПЕРЕДВИЖЕНІЕ.** Перемѣщеніе тѣла или матеріальной точки есть перемѣна занимаемаго мѣста этимъ тѣломъ или точкою; въ такомъ смыслѣ перемѣщеніе одно и то же что движеніе. Преимущественно же подъ *перемѣщеніемъ* разумѣютъ движеніе, соотвѣтствующее весьма малому времени, или, такое движеніе, въ продолженіи котораго перейденное пространство весьма мало.

DÉPLACEMENTS ABSOLUS. Абсолютныя перемѣщенія. Движенія, происходящія въ абсолютномъ пространствѣ, и соотвѣтствующія весьма малому времени.

DÉPLACEMENTS RELATIFS. Относительныя перемѣщенія. Движенія, соотвѣтствующія также весьма малому времени, по разсматриваемыя относительно какого ни есть тѣла, коего положеніе извѣстно.

DÉPLACEMENTS VIRTUELS OU POSSIBLES. Возможныя перемѣщенія. Такія передвиженія, которыя тѣла системы могутъ получить безъ нарушенія связи, существующей между сими тѣлами. Смот. VIRTUEL.

DÉPLACEMENTS IMPOSSIBLES. Невозможныя перемѣщенія. Движенія, несовмѣстныя съ препятствіями, которыя существуютъ въ системѣ.

DÉPLACEMENTS EFFECTIFS OU ACTUELS. Дѣйствительныя перемѣщенія, то есть тѣ, которыя система дѣйствительно имѣетъ. Должно отличать дѣйствительныя перемѣщенія отъ перемѣщеній возможныхъ: послѣднія могутъ произойти и не отъ силъ, приложенныхъ къ системѣ, а первыя происходятъ всегда отъ силъ, дѣйствующихъ на систему.

DÉPLACEMENTS INSTENTANÉS. Мгновенныя перемѣщенія суть такія передвиженія, которыя происходятъ мгновенно, то есть въ безконечно малый промежутокъ времени.

Читатели могутъ обратиться къ статьямъ: CURVILIGNE (MOUVEMENT), ÉQUILIBRE, FORCE, MOUVEMENT, VIRTUELLES (PRINCIPE DES VITESSES), въ которыхъ они увидятъ употребленіе сихъ различныхъ родовъ перемѣщеній.

DÉPLACEMENT. (Гидрост.) **ВОДОИЗМѢЩЕНІЕ.** Количество вымѣщенной воды при погруженіи въ нее какого либо тѣла. Въ этомъ смыслѣ говоримъ *водоизмѣщеніе корабля.*

DÉPLACER. ВЫМѢЩАТЬ, ВЫТѢСНЯТЬ. *Un corps plongé dans un fluide, y perd une partie de son poids, égale au poids du fluide qu'il déplace.*

Тѣло, погруженное въ жидкость, теряетъ въ ней часть своего вѣса, равную вѣсу вытѣсненной жидкости.

DÉPRESSION DE L'HORISON. (Астр.) **ПОНИЖЕНІЕ ГОРИЗОНТА.** Положимъ что наблюдатель, находящійся выше поверхности моря, напримѣръ на кораблѣ, опредѣляетъ высоту свѣтила. Пусть будетъ $FBDG$ (черт. 10 Листъ VII) земная поверхность, A мѣсто наблюденія, а S наблюдаемое свѣтило. Искомый уголъ, то есть высота свѣтила, будетъ EAS, принимая линію AE перпендикулярною къ радіусу земли, или, что всё равно, къ направленію AC. Но наблюдатель, употребляя отражательный угломѣрный снарядъ, опредѣлитъ непосредственно не настоящій уголъ EAS, но уголъ DAS, составляемый лучемъ зрѣнія AS, идущимъ къ свѣтилу, и лучемъ AD, направляющимся къ предѣлу видимаго горизонта моря, и слѣдовательно касательнымъ въ точкѣ D, къ поверхности земной. Уголъ EAD, который должно отнять отъ наблюденнаго SAD для полученія высоты EAS свѣтила, называется *угломъ пониженія*, или просто *пониженіемъ горизонта* (*angle de dépression de l'horison*). Для опредѣленія этого угла замѣтимъ, что предположивъ радіусъ земли $BC = r$, возвышеніе наблюдателя $AB = h$, пониженіе горизонта $EAD = \varphi$, получимъ во первыхъ, по причинѣ угла EAC прямаго, *уголъ* $EAD =$ *углу* ACD, а изъ прямоугольнаго треугольника ACD выведемъ пропорцію

$$Sin\varphi : \overline{AD} :: Cos\varphi : \overline{CD} \text{ или } Sin\varphi : \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2} :: Cos\varphi : \overline{CD}.$$

Но $\overline{AC} = r + h$, $\overline{CD} = r$; слѣдовательно

$$Sin\varphi : \sqrt{(r+h)^2 - r^2} :: Cos\varphi : r,$$

откуда

$$tang\varphi = \frac{\sqrt{(r+h)^2 - r^2}}{r} = \sqrt{\frac{2h}{r} + \frac{h^2}{r^2}}.$$

Такъ какъ отношеніе $\frac{h^2}{r^2}$ будетъ всегда количество весьма малое по причинѣ незначительности величины h въ разсужденіи радіуса земли r, то откинувъ это отношеніе, получимъ

$$tang\varphi = \sqrt{\frac{2h}{r}}.$$

Вотъ формула, опредѣляющая уголъ φ или пониженіе горизонта; но этотъ уголъ долженъ еще быть исправленъ, ибо дѣйствіемъ преломленія свѣта увеличиваются высоты предметовъ надъ земною поверхностію. И такъ, лучъ зрѣнія, который по нашему предположенію направляется по прямой AD, опишетъ дѣйствительно кривую Acd, и слѣдовательно уголъ пониженія будетъ не EAD, но EAD', составляемый горизонтальною прямою AE съ касательною AD' къ кривой Acd въ точкѣ A. Найдено изъ наблюденій, что уголъ EAD', который изобразимъ чрезъ φ', равенъ $0{,}929 \times \varphi$. Слѣдовательно, принявъ въ соображеніе, что тангенсы весьма малыхъ угловъ чувствительнымъ образомъ пропорціональны самымъ угламъ, получимъ окончательно

$$tang\,\varphi' = 0{,}929\sqrt{\frac{2h}{r}}.$$

DÉPRESSION DU MERCURE DANS LE BAROMÈTRE. Пониженіе ртути въ барометрѣ.

DÉRIVATION. ДЕРИВАЦІЯ. ПРОИСХОЖДЕНІЕ. Смот. ниже.

DÉRIVATIONS (CALCUL DES). ДЕРИВАЦІОННОЕ ИСЧИСЛЕНІЕ. Такъ назвалъ *Арбогастъ*, профессоръ Математики въ Страсбургѣ, придуманный имъ общій способъ для разложенія въ ряды различныхъ видовъ функцій объ одной или нѣсколькихъ перемѣнныхъ. Сочиненіе его подъ заглавіемъ: *Du Calcul des Dérivations, par L. F. A. Arbogast*, à Strasbourg, An VIII (1800), in-4°, содержитъ въ себѣ подробное изложеніе правилъ этого исчисленія и множество весьма примѣчательныхъ приложеній, свидѣтельствующихъ о плодовитости и о пользѣ теоріи, о которой говоримъ. Непонятно почему способъ Арбогаста не имѣлъ общаго успѣха, котораго въ правѣ былъ ожидать: можетъ быть невниманіе бóльшей части математиковъ къ его книгѣ произошло оттого, что она, не смотря на ясность изложенія, по многочисленности новыхъ знакоположеній, требовала тщательнаго изученія, а слѣдовательно и не мало времени.

Чтобъ объяснить сущность Деривационнаго Исчисленія приводимъ здѣсь слова Арбогаста, которыя заимствуемъ изъ его предисловія къ упомянутому выше сочиненію:

„Чтобы составить себѣ понятіе о деривацiяхъ, замѣтимъ, что количества или функціи, выводимыя одни изъ другихъ посредствомъ единообразныхъ дѣйствій, суть количества производныя: таковы, напримѣръ, послѣдовательные дифференціалы. Можно распространить это понятіе разсматривая количества, выводимыя одни изъ другихъ не относительно ихъ значеній, но только въ разсужденіи дѣйствій, которыя соединяютъ и связываютъ ихъ, при чемъ самыя количества предполагаются произвольными, независимыми между собою. И такъ, допустивъ, что изъ нѣсколькихъ различныхъ буквъ, только первая входитъ въ нѣкоторую функцію, между тѣмъ какъ двѣ первыя входятъ извѣстнымъ образомъ въ ея производную, три первыя, по тому же закону, въ производную этой производной, и такъ далѣе, получимъ производныя функціи въ томъ обширномъ смыслѣ, въ которомъ я разумѣлъ ихъ. Здѣсь уже количества, изображенныя различными буквами, не производятся одни отъ другихъ; я разсматриваю производныя преимущественно въ смыслѣ производныхъ отъ дѣйствій, чѣмъ производныхъ отъ количествъ. Подобнымъ образомъ и Алгебра занимается болѣе дѣйствіями, которыя должны быть произведены надъ величинами, нежели самымъ вычисленіемъ этихъ величинъ."

„Деривація есть дѣйствіе, посредствомъ котораго выводятъ производную изъ предшествующей ей, или изъ функціи. Способъ Дериваціи состоитъ вообще въ опредѣленіи закона, который связываетъ между собою различныя совокупленія какихъ ни есть количествъ, и въ его употребленіи для перехода отъ одной производной къ другой."

Чтобъ ознакомить сколько нибудь нашихъ читателей съ самыми пріёмами Деривацiоннаго Исчисленія, предлагаемъ въ самомъ краткомъ видѣ нѣкоторыя изъ основныхъ его началъ; при этомъ изложеніи будемъ придерживаться первой главы сочиненія Арбогаста.

§ 1. Пусть будетъ $f(\alpha+x)$ какая ни есть функція двучленнаго количества $\alpha+x$. Извѣстно, что получится рядъ вида

$$(1) \qquad f(\alpha+x)=$$
$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}x+\frac{\mathfrak{c}}{1.2}x^2+\frac{\mathfrak{d}}{1.2.3}x^3+\frac{\mathfrak{e}}{1.2.3.4}x^4+\text{ и проч.}$$

въ которомъ $\mathfrak{a}=f(\alpha)$, $\mathfrak{b}$ выводится изъ $\mathfrak{a}$ или $f(\alpha)$, $\mathfrak{c}$ изъ $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ изъ $\mathfrak{c}$ и проч. по одному и тому же закону. И такъ, зная какимъ образомъ $\mathfrak{b}$ выводится изъ $\mathfrak{a}$ или изъ $f(\alpha)$, мы будемъ въ состояніи вывести $\mathfrak{c}$ изъ $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ изъ $\mathfrak{c}$ и проч.

Если изобразимъ характеристикою D дѣйствіе, которое должно произвести надъ $f(\alpha)$ чтобъ получить $\mathfrak{b}$, то очевидно будетъ $\mathfrak{b}=\mathrm{D}f(\alpha)$, $\mathfrak{c}=\mathrm{DD}f(\alpha)=\mathrm{D}^2f(\alpha)$, $\mathfrak{d}=\mathrm{D}^3f(\alpha)$ и проч. Слѣдовательно рядъ (1) можетъ быть представленъ въ видѣ.

$$(2) \qquad f(\alpha+x)=$$
$$f(\alpha)+\frac{\mathrm{D}f(\alpha)}{1}x+\frac{\mathrm{D}^2f(\alpha)}{1.2}x^2+\frac{\mathrm{D}^3f(\alpha)}{1.2.3}x^3+\ldots\ldots$$

Но мы знаемъ [Смот. TAYLOR (THÉORÊME DE)], что принявъ α за перемѣнную, имѣемъ

$$\mathrm{D}f(\alpha)=\frac{df(\alpha)}{d\alpha},\ \mathrm{D}^2f(\alpha)=\frac{d^2f(\alpha)}{d\alpha^2},\ \mathrm{D}^3f(\alpha)=\frac{d^3f(\alpha)}{d\alpha^3},\text{ и пр.}$$

гдѣ $d\alpha$ изображаетъ произвольную постоянную величину. Принявъ $d\alpha=1$, получимъ просто $\mathrm{D}f(\alpha)=df(\alpha), \mathrm{D}^2f(\alpha)=d^2f(\alpha), \mathrm{D}^3f(\alpha)=d^3f(\alpha),\ldots$ а отсюда заключаемъ, что правила для опредѣленія дериваціи въ томъ случаѣ, который разсматривается теперь, одинаковы съ правилами для дифференцированія.

Для разложенія функціи $f(\alpha+\beta x)$ стоитъ только измѣнить x въ βx въ уравн. (2), въ слѣдствіе чего получится

$$(3) \qquad f(\alpha+\beta x)=$$
$$f(\alpha)+\frac{\mathrm{D}f(\alpha).\beta}{1}x+\frac{\mathrm{D}^2f(\alpha).\beta^2}{1.2}x^2+\frac{\mathrm{D}^3f(\alpha).\beta^3}{1.2.3}x^3+\ldots\ldots$$

Въ этомъ разложеніи можно разсматривать степени β какъ бы происшедшими отъ дѣйствій, произведенныхъ надъ функціею $f(\alpha)$. Дѣйствительно, положимъ что α есть такая функція $\mathfrak{f}(\mathfrak{a})$ перемѣнной $\mathfrak{a}$, что $d\mathfrak{f}(\mathfrak{a})=\beta$, а $d\mathfrak{a}=1$; въ такомъ предположеніи $\mathrm{D}f(\alpha)$ обратится въ $\frac{df(\alpha)}{d\alpha}\cdot\frac{d\mathfrak{f}(\mathfrak{a})}{d\mathfrak{a}}=\frac{df(\alpha)}{d\alpha}d\mathfrak{f}(\mathfrak{a})=\mathrm{D}f(\alpha).\,\mathrm{D}\mathfrak{f}(\mathfrak{a})$. Но такъ какъ, по причинѣ $d\mathfrak{a}=1$, имѣемъ $\mathrm{D}\mathfrak{f}(\mathfrak{a})=d\mathfrak{f}(\mathfrak{a})=\beta$ и $\mathrm{D}^2\mathfrak{f}(\mathfrak{a})=d^2\mathfrak{f}(\mathfrak{a})=0$, то стоитъ только взять $\mathfrak{f}(\mathfrak{a})=\beta\mathfrak{a}$, разумѣя подъ β величину постоянную.

Чтобъ отличить это новое состояніе дериваціи $\mathrm{D}f(\alpha)$ отъ перваго, въ которомъ $d\alpha=1$ и $\mathrm{D}\alpha=1$, Арбогастъ ставитъ точку послѣ буквы D; и такъ $\mathrm{D}.f(\alpha)=\mathrm{D}f(\alpha).\beta$. Въ слѣдствіе этого условія $\mathrm{D}.f(\alpha)$ будетъ производная отъ функціи $f(\alpha)$, въ которой α принимается за перемѣнную, имѣющую свою производную $\mathrm{D}.\alpha=\beta=d\mathfrak{f}(\mathfrak{a})$; что касается до знакоположенія $\mathrm{D}f(\alpha)$, безъ точки послѣ D, то оно изображаетъ производную отъ $f(\alpha)$, гдѣ α принимается также за перемѣнную, производная которой равна $\mathrm{D}\alpha=1=d\alpha$.

Если надъ дериваціею $D.f(\alpha) = Df(\alpha) \cdot D.\alpha = Df(\alpha).\beta$ произведемъ то же дѣйствіе, какое произвели надъ функціею $f(\alpha)$, то положивъ $D.\alpha = \beta$ постоянною, получимъ $D^2.f(\alpha) = D.(Df(\alpha) \cdot D.\alpha) = D^2f(\alpha).(D.\alpha)^2 = D^2f(\alpha).\beta^2$; точно такимъ образомъ найдется $D^3.f(\alpha) = D.[D^2f(\alpha).(D.\alpha)^2] = D^3f(\alpha).(D.\alpha)^3 = D^3f(\alpha).\beta^3$, и такъ далѣе. Слѣдовательно рядъ (3) приметъ видъ

$$(4) \qquad f(\alpha+\beta x) = f(\alpha) + \frac{D.f(\alpha)}{1}x + \frac{D^2.f(\alpha)}{1.2}x^2 + \frac{D^3.f(\alpha)}{1.2.3}x^3 + \ldots\ldots$$

§ 2. Чтобы перейти отъ разложенія функцій двучленныхъ количествъ къ многочленнымъ, возьмемъ функцію φ обѣихъ частей уравненія (4); получимъ

$$\varphi f(\alpha+\beta x) = \varphi\left(f(\alpha) + \frac{D.f(\alpha)}{1}x + \frac{D^2.f(\alpha)}{1.2}x^2 + \ldots\right),$$

и, сверхъ того, подставивъ въ формулу (4) φf вмѣсто f,

$$\varphi f(\alpha+\beta x) = \varphi f(\alpha) + \frac{D.\varphi f(\alpha)}{1}x + \frac{D^2.\varphi f(\alpha)}{1.2}x^2 + \frac{D^3.\varphi f(\alpha)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

И такъ, положивъ $f(\alpha) = a$, $D.f(\alpha) = D.a$, $D^2.f(\alpha) = D^2.a$ и проч. получится

$$(5) \left\{ \begin{aligned} &\varphi\left(a + \frac{D.a}{1}x + \frac{D^2.a}{1.2}x^2 + \ldots\right) \\ &= \varphi(a) + \frac{D.\varphi(a)}{1}x + \frac{D^2.\varphi(a)}{1.2}x^2 + \ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Остается только разложить дериваціи..... $D.\varphi(a)$, $D^2.\varphi(a)$, $D^3.\varphi(a)$,..... Для этого вспомнимъ, что $D.\varphi(a) = D\varphi(a).D.a$; но такъ какъ въ настоящемъ случаѣ $D^2.a$, $D^3.a$,.... не равны нулю, то дериваціи $D^2.\varphi(a)$, $D^3.\varphi(a)$,..... не будутъ соотвѣтственно равны величинамъ.... $D^2\varphi(a).(D.a)^2$, $D^3\varphi(a).(D.a)^3$,.....; къ этимъ членамъ должно еще прибавить другіе, происходящіе отъ измѣняемости дериваціи $D.a$, $D^2.a$ и проч.

Для опредѣленія $D^2.\varphi(a)$ надобно произвести надъ $D.\varphi(a) = D\varphi(a).D.a$ то самое дѣйствіе, какое производили надъ функціею $\varphi(a)$, когда выводили изъ нея $D.\varphi(a)$, принимая при томъ $D^2.a$ за производную отъ $D.a$. Но такъ какъ правила для нахожденія дериваціи и дифференціаловъ одинаковы, то и получимъ:

$$\begin{aligned} D^2.\varphi(a) &= D.(D\varphi(a).D.a) \\ &= D\varphi(a) \times D.(D.a) + D.(D\varphi(a)) \times D.a \\ &= D\varphi(a).D^2.a + D^2\varphi(a).(D.a)^2; \end{aligned}$$

подобнымъ образомъ найдемъ:

$$\begin{aligned} D^3.\varphi(a) &= D.[D^2.\varphi(a)] \\ &= D.\{D\varphi(a).D^2.a + D^2\varphi(a).(D.a)^2\} \\ &= D.\varphi(a).D^3.a + D^2\varphi(a).D.a.D^2.a \\ &\quad + D^2\varphi(a).2D.a.D^2.a + D^3\varphi(a).(D.a)^3 \\ &= D\varphi(a).D^3.a + 3D^2\varphi(a).D.a.D^2.a + D^3\varphi(a).(D.a)^3; \end{aligned}$$

и такъ далѣе.

Изъ этого легко усмотрѣть, что коэффиціенты послѣдовательныхъ степеней x во второй части уравненія (5) происходятъ одни изъ другихъ и изъ перваго члена $\varphi(a)$ по одному и тому же закону. Этотъ законъ, собственно говоря, одинаковъ съ тѣмъ, по которому составляются послѣдовательные члены разложенія функціи $f(\alpha+x)$; одно только различіе, что въ $f(\alpha+x)$ производная $D\alpha = 1$, между тѣмъ какъ въ разсмотрѣнномъ нами случаѣ производная $D.a$ есть величина перемѣнная, которой производная равна $D^2.a$, и проч.

§ 3. Положимъ теперь что ищется функція φ многочленнаго выраженія

$$a + b\,x + \frac{c}{1.2}x^2 + \frac{d}{1.2.3}x^3 + \text{и проч.},$$

въ которомъ ни b не зависитъ отъ a, ни c отъ b, ни d отъ c,..... и гдѣ, однимъ словомъ, всѣ коэффиціенты a, b, c, d,..... изображаютъ количества совершенно произвольныя. Если вообразимъ что величины a, b, c, d,..... производятся однѣ отъ другихъ, то получимъ какъ и выше

$$(6) \left\{ \begin{aligned} &\varphi\left(a + b\,x + \frac{c}{1.2}x^2 + \frac{d}{1.2.3}x^3 + \ldots\right) \\ &= \varphi(a) + D.\varphi(a).x + \frac{D^2.\varphi(a)}{1.2}x^2 + \frac{D.\varphi(a)}{1.2.3}x^3 + \ldots \end{aligned} \right.$$

съ тѣмъ условіемъ, чтобы по составленіи дериваціи $D.\varphi(a)$, $D^2.\varphi(a)$, $D^3.\varphi(a)$,...., перемѣнить $D.a$ на b, $D^2.a$ на c, $D^3.a$ на d и проч.

Дѣйствительно, вторая часть уравн. (6), до подстановленія b на мѣсто $D.a$, c на мѣсто $D^2.a$, d на мѣсто $D^3.a$, ... равна второй части уравн. (5); но, по разложеніи дериваціи $D.\varphi(a)$, $D^2.\varphi(a)$, $D^3.\varphi(a)$,... въ той формулѣ (5), получимъ тожественное уравненіе, то есть такое, въ которомъ дериваціи $D.a$, $D^2.a$, $D^3.a$, ... могутъ быть принимаемы независимыми между собою, почему и можно будетъ въ уравн. (5), по составленіи дериваціи, написать b вмѣсто $D.a$, c вмѣсто $D^2.a$, d вмѣсто $D^3.a$, и проч. И такъ получимъ слѣдующую теорему:

Изобразимъ чрезъ a, b, c, d,... *какія ни есть количества, и положимъ что требуется разложить функцію*

$$\varphi\left(a + bx + \frac{c}{1.2}x^2 + \frac{d}{1.2.3}x^3 + \ldots\right)$$

въ рядъ вида

$$A + Bx + \frac{C}{1.2}x^2 + \frac{D}{1.2.3}x^3 + \ldots + \frac{A_n}{1.2.3\ldots n}x^n + \text{и пр.}$$

Коэффиціенты A, B, C, D,.... *этого разложенія опредѣлятся слѣдующими формулами:*

$A = \varphi(a)$, $B = D.\varphi(a)$, $C = D^2.\varphi(a)$, $D = D^3.\varphi(a)$,...

и вообще $A_n = D^n.\varphi(a)$, *съ тѣмъ условіемъ, чтобы по разложеніи сихъ деривацій въ предположеніи* D.a, D^2.a,.... *перемѣнныхъ, поставили* b *на мѣсто* D.a, c *на мѣсто* D^2.a *или* D.b, d *на мѣсто* D^3.a *или* D.c, *и проч.*

§ 4. Чаще случается, что многочленное выраженіе представляется въ видѣ

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots + \alpha_n x^n + \text{ и проч.}$$

то есть, безъ численныхъ коэффиціентовъ $\frac{1}{1.2}$, $\frac{1}{1.2.3}$, $\frac{1}{1.2.3.4}$,....; въ такомъ случаѣ должно предположить

$$\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots + \alpha_n x^n + \text{ и проч.})$$
$$= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots + A_n x^n + \text{и проч.}$$

Опредѣленіе коэффиціентовъ $A, B, C, D,\ldots$ не представляетъ никакого затрудненія: дѣйствительно, мы приводимъ предыдущій рядъ къ преждеразсмотрѣнному положивъ

$$\gamma = \frac{\gamma'}{1.2},\ \delta = \frac{\delta'}{1.2.3},\ldots\ \alpha_n = \frac{\alpha'_n}{1.2.3\ldots n},$$

$$C = \frac{C'}{1.2},\ D = \frac{D'}{1.2.3},\ldots\ A_n = \frac{A'_n}{1.2.3\ldots n},$$

въ слѣдствіе чего онъ приметъ видъ

$$\varphi\left(\alpha + \beta x + \frac{\gamma'}{1.2}x^2 + \frac{\delta'}{1.2.3}x^3 + \ldots + \frac{\alpha'_n}{1.2.3\ldots n}x^n + \text{ и проч.}\right)$$

$$= A + Bx + \frac{C'}{1.2}x^2 + \frac{D'}{1.2.3}x^3 + \ldots + \frac{A'_n}{1.2.3\ldots n}x^n + \text{и проч.}$$

Опредѣливъ величины A, B, C', $D'\ldots A_n'$ по объясненнымъ выше правиламъ, и подставивъ потомъ

1.2γ *вмѣсто* γ', $1.2.3\delta$ *вмѣсто* δ',.....$1.2.3\ldots n\alpha_n$ *вмѣсто* α'^n

$1.2\,C$ *вмѣсто* C', $1.2.3\,D$ *вмѣсто* D',....$1.2.3\ldots nA_n$ *вмѣсто* A'_n

получимъ разложеніе функціи $\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots)$.

Можно также поступить другимъ образомъ: прямо искать деривацій $D.\varphi(\alpha)$, $D^2.\varphi(\alpha)$, $D^3.\varphi(\alpha)$,... и потомъ подставить въ нихъ

β *вмѣсто* $D.\alpha$, 1.2γ *вмѣсто* $D^2.\alpha$,

$1.2.3.\delta$ *вмѣсто* $D^3.\alpha$,... $1.2.3\ldots n\alpha_n$ *вмѣсто* $D^n.\alpha$,

B *вмѣсто* $D.A$, $1.2\,C$ *вмѣсто* $D^2.A$,

$1.2.3.\,D$ *вмѣсто* $D^3.A$,... $1.2.3\ldots nA_n$ *вмѣсто* $D^n.A$.

Легко усмотрѣть, что если будемъ вычислять послѣдовательно коэффиціенты $A, B, C, D,\ldots$, дѣлая въ то же время сокращенія, то надобно будетъ подставить

β *вмѣсто* $D.\alpha$, 2γ *вмѣсто* $D.\beta$,

3δ *вмѣсто* $D.\gamma$,....$n\alpha_n$ *вмѣсто* $D.\alpha_{n-1}$

B *вмѣсто* $D.A$, $2C$ *вмѣсто* $D.B$,

$3D$ *вмѣсто* $D.C$,...nA_n *вмѣсто* $D.A_{n-1}$.

Что касается до правилъ для опредѣленія деривацій $D.\varphi(\alpha)$, $D^2.\varphi(\alpha)$, $D^3.\varphi(\alpha)$ и проч., то они, для разсмотрѣннаго нами случая, совершенно одинаковы съ правилами, по которымъ находимъ дифференціалы $d.\varphi(\alpha)$, $d^2.\varphi(\alpha)$, $d^3.\varphi(\alpha)$ и проч. въ предположеніи количества α и послѣдовательныхъ его дифференціаловъ $d\alpha, d^2\alpha, d^3\alpha,\ldots$ перемѣнныхъ. Если сверхъ того замѣтимъ, что деривацiи, означаемыя характеристикою D безъ точки, то есть знакоположенія $D\varphi(\alpha)$, $D^2\varphi(\alpha)$, $D^3\varphi(\alpha)$,...., соотвѣтственно изображаютъ выраженія $d\varphi(\alpha)$, $d^2\varphi(\alpha)$, $d^3\varphi(\alpha)$,...., въ которыхъ $d\alpha$ принимается за единицу, то получимъ

$$D.\varphi(\alpha) = D\varphi(\alpha) \times D.\alpha$$
$$D^2.\varphi(\alpha) = D\varphi(\alpha) \times D^2.\alpha + D^2\varphi(\alpha) \times (D.\alpha)^2$$
$$D^3.\varphi(\alpha) = D\varphi(\alpha) \times D^3.\alpha + 3D^2\varphi(\alpha) \times D.\alpha \times D^2.\alpha + D^3\varphi(\alpha) \times (D.\alpha)^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

или, написавъ β вмѣсто $D.\alpha$, $1.2.\gamma$ вмѣсто $D^2\alpha$, $1.2.3.\delta$ вмѣсто $D^3.\alpha$,....

$$(7)\quad \begin{cases} D.\varphi(\alpha) = D\varphi(\alpha).\beta \\ D^2.\varphi(\alpha) = D\varphi(\alpha).1.2.\gamma + D^2\varphi(\alpha).\beta^2 \\ D^3.\varphi(\alpha) = D\varphi(\alpha).1.2.3.\delta + 3D^2\varphi(\alpha).\beta.(1.2.\gamma)^2 + D^3\varphi(\alpha).\beta^3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Первый членъ $\varphi(\alpha)$, изъ котораго выводятся всѣ послѣдующіе, Арбогастъ называетъ *началомъ деривацій* (*origine des dérivations*)

§ 5. Для объясненія приведенныхъ здѣсь правилъ Деривацiоннаго Исчисленія, предлагаемъ нѣсколько примѣровъ.

Примѣръ 1. Разложить логариѳмическую функцію

$$\log(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\dots)$$

въ рядъ вида

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\dots$$

Если положимъ $x=0$, то найдемъ $A=\log\alpha$; изъ этого перваго члена, на основаніи сказаннаго въ §§ 3 и 4, выводимъ послѣдовательные коэффиціенты B, C, D, E,..... Вотъ подробности этихъ вычисленій:

$A=\log\alpha$

$B=\mathrm{D}.\log\alpha=\frac{\mathrm{D}.\alpha}{\alpha}=\alpha^{-1}.\beta$

$2C=\mathrm{D}.(\alpha^{-1}.\beta)=\alpha^{-1}.2\gamma-\alpha^{-2}.\beta^2$, откуда

$C=\alpha^{-1}.\gamma-\frac{\alpha^{-2}\beta^2}{2}$; взявъ деривацію, получимъ

$3D=\alpha^{-1}.3\delta-\alpha^{-2}\beta\gamma-\frac{\alpha^{-2}}{2}.2\beta.2\gamma+\frac{2\alpha^{-3}}{2}\beta.\beta^2$,

или, по сокращеніи

$D=\alpha^{-1}.\delta-\frac{\alpha^{-2}}{2}.2\beta\gamma+\frac{\alpha^{-3}}{3}\beta^3$; взявъ опять деривацію, найдемъ

$$4E=\alpha^{-1}.4\varepsilon-\alpha^{-2}\beta\delta-\frac{\alpha^{-2}}{2}(2\beta.3\delta+2.2\gamma^2)$$
$$+\frac{2\alpha^{-3}}{2}\beta.2\beta\gamma+\frac{\alpha^{-3}}{3}.3\beta^2.2\gamma-\frac{3\alpha^{-4}}{3}\beta^4,$$

откуда по сокращеніи,

$$E=\alpha^{-1}.\varepsilon-\frac{\alpha^{-2}}{2}(2\beta\delta+\gamma^2)+\frac{\alpha^{-3}}{3}.3\beta^2\gamma-\frac{\alpha^{-4}}{4}.\beta^4,$$

и такъ далѣе. Если положимъ $\gamma=\delta=\varepsilon=\dots=0$, то получимъ

(8) $\log(\alpha+\beta x)=\log\alpha+\frac{\beta x}{\alpha}-\frac{\beta^2x^2}{2\alpha^2}+\frac{\beta^3x^3}{3\alpha^3}-$ и проч.

Этотъ же способъ приводитъ самымъ простымъ образомъ къ опредѣленію коэффиціентовъ A, B, C, D, E,..... *въ возвратномъ видѣ* (*en termes reccurrens*), то есть помощію формулъ, заключающихъ въ себѣ коэффиціенты, предшествующіе тому, который опредѣляется. Въ настоящемъ случаѣ имѣемъ $A=\log\alpha$, откуда $\mathrm{D}.A=\frac{\mathrm{D}.\alpha}{\alpha}$ или $B=\frac{\beta}{\alpha}$. И такъ, получимъ

$$A=\log\alpha$$
$$B\alpha=\beta;$$

взявъ деривацію, найдется

$$2C\alpha+B\beta=2\gamma,$$

или

$$C\alpha+\tfrac{1}{2}B\beta=\gamma;$$
$$3D\alpha+C\beta+\tfrac{1}{2}.2C\beta+\tfrac{1}{2}B.2\gamma=3\delta,$$

или

$$D\alpha+\tfrac{2}{3}C\beta+\tfrac{1}{3}B\gamma=\delta;$$
$$4E\alpha+D\beta+\tfrac{2}{3}.3D\beta+\tfrac{2}{3}C.2\gamma+\tfrac{1}{3}.2C\gamma+\tfrac{1}{3}B.3\delta=4\varepsilon,$$

а по сокращеніи

$$E\alpha+\tfrac{3}{4}D\beta+\tfrac{2}{4}C\gamma+\tfrac{1}{4}B\delta=\varepsilon,$$

и такъ далѣе. Изъ этихъ уравненій выводимъ какъ нельзя проще каждый изъ коэффиціентовъ C, D, E,.... посредствомъ предшествующихъ коэффиціентовъ.

Примѣръ II. Разложить тригонометрическую функцію

$$\sin(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\dots)$$

въ рядъ вида

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\dots$$

Положивъ $x=0$ получимъ $A=\sin\alpha$, откуда, посредствомъ правилъ Деривационнаго Исчисленія,

$A=\sin\alpha$

$B=\cos\alpha.\beta$

$C=\cos\alpha.\gamma-\frac{\sin\alpha}{1.2}.\beta^2$

$D=\cos\alpha.\delta-\frac{\sin\alpha}{1.2}.2\beta\gamma-\frac{\cos\alpha}{1.2.3}.\beta^3$

$E=\cos\alpha.\varepsilon-\frac{\sin\alpha}{1.2}(2\beta\delta+\gamma^2)-\frac{\cos\alpha}{1.2.3}.3\beta^2\gamma+\frac{\sin\alpha}{1.2.3.4}.\beta^4$

....

§ 6. Арбогастъ, изложивъ способъ для опредѣленія коэффиціентовъ A, B, C, D, E,.... въ томъ видѣ, въ которомъ онъ предложенъ здѣсь, переходитъ къ его упрощенію. Онъ показываетъ, какимъ образомъ изъ опредѣленнаго коэффиціента выводится непосредственно слѣдующій за нимъ въ самомъ простомъ видѣ, то есть со всѣми возможными сокращеніями какъ относительно подобныхъ членовъ, такъ и численныхъ коэффиціентовъ. И такъ, въ I-омъ примѣрѣ, вмѣсто величины

$$4E=\alpha^{-1}.4\varepsilon-\alpha^{-2}.\beta\delta-\frac{\alpha^{-2}}{2}(2.\beta.3\delta+2.2\gamma^2)$$
$$+\frac{2\alpha^{-3}}{2}\beta.2\beta\gamma+\frac{\alpha^{-3}}{3}.3\beta^2.2\gamma-\frac{3\alpha^{-4}}{3}.\beta^4,$$

по сокращенному способу получится непосредственно

$$E=\alpha^{-1}.\varepsilon-\frac{\alpha^{-2}}{2}(2\beta\delta+\gamma^2)+\frac{\alpha^{-3}}{3}.3\beta^2\gamma-\frac{\alpha^{-4}}{4}.\beta^4.$$

Правила, предлагаемыя на этотъ конецъ Арбогастомъ, доводятъ вычисленіе коэффиціентовъ A, B, C, D, E,..... до возможной степени простоты; нахожденіе ихъ, по его способу, и съ надлежащимъ навыкомъ, едва ли требуетъ большаго времени, какъ сколько нужно для того, чтобы писать ихъ. Предѣлы нашего Лексикона не позволяютъ намъ привести этого сокращеннаго способа, требующаго довольно подробнаго изложенія; отсылаемъ по сему предмету къ сочиненію Арбогаста.

§ 7. Въ заключеніе предложимъ еще одинъ примѣръ разложенія, приводящаго къ опредѣленію суммы n-ыхъ степеней всѣхъ корней какого ни есть алгебрическаго уравненія въ функціи его коэффиціентовъ, и независимо отъ суммъ низшихъ степеней.

Пусть предложенное уравненіе будетъ

$$x^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+dx^{m-3}+\ldots\ldots=0,$$

и α, β, γ, δ,..... его корни; слѣдовательно

$$x^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+dx^{m-3}+\ldots\ldots$$
$$=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots\ldots$$

Если положимъ $x=\frac{1}{z}$, то это уравненіе приметъ видъ

$$1+bz+cz^2+dz^3+\ldots\ldots$$
$$=(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\gamma z)(1-\delta z)\ldots\ldots;$$

взявъ логариѳмы обѣихъ частей, получимъ

$$\log(1+bz+cz^2+dz^3+\ldots\ldots)=$$
$$\log(1-\alpha z)+\log(1-\beta z)+\log(1-\gamma z)+\log(1-\delta z)+\ldots$$

Но ежели въ формулѣ (8) положимъ $\alpha=1$, $\beta=-m$, $x=z$, то найдемъ

$$\log(1-mz)=-mz-\frac{m^2}{2}z^2-\frac{m^3}{3}z^3-\frac{m^4}{4}z^4-\ldots\ldots;$$

слѣдовательно

$$\log(1+bz+cz^2+dz^3\ldots\ldots)=$$
$$-(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots\ldots)z$$
$$-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\ldots\ldots)\frac{z^2}{2}$$
$$-(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3+\ldots\ldots)\frac{z^3}{3}$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-(\alpha^n+\beta^n+\gamma^n+\delta^n+\ldots\ldots)\frac{z^n}{n}$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

И такъ, положивъ

$$B=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots\ldots$$
$$C=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\ldots\ldots$$
$$D=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3+\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n+\delta^n+\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

предыдущее уравненіе приметъ видъ

$$(9)\left\{\begin{array}{l}\log(1+bz+cz^2+dz^3\ldots\ldots)=\\ -Bz-\frac{C}{2}z^2-\frac{D}{3}z^3-\ldots\ldots-\frac{A_n}{n}z^n-\ldots\end{array}\right.$$

Для опредѣленія величинъ B, C, D,..... въ функціи коэффиціентовъ b, c, d,.... предложеннаго уравненія, стоитъ только разложить первую часть урави. (9) по степенямъ перемѣнной z. Чтобы удобнѣе произвести это разложеніе, поставимъ a вмѣсто перваго члена 1; и такъ, $\log a$ будетъ первымъ членомъ второй части урави. (9); но такъ какъ $a=1$, то $\log a=0$, что и должно быть. По объясненнымъ выше правиламъ получимъ послѣдовательно:

$$(-B)=a^{-1}.b$$
$$1.2\left(-\frac{C}{2}\right)=a^{-1}.1.2.c-a^{-2}b^2$$
$$1.2.3\left(-\frac{D}{3}\right)=a^{-1}.1.2.3.d-6a^{-2}bc+2a^{-3}b^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

откуда

$$B=\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots\ldots=-b$$
$$C=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots\ldots=-2c+b^2$$
$$D=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\ldots\ldots=-3d+3bc-b^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Что касается до общаго члена A_n, то основываясь на сокращенномъ способѣ, о которомъ упомянуто было выше, Арбогастъ нашелъ

$$A_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n+\delta^n+\ldots=$$
$$-\frac{n}{1}\underset{c}{D}^{n-1}.b+\frac{n}{2}\underset{c}{D}^{n-2}.b^2-\frac{n}{3}\underset{c}{D}^{n-3}.b^3+\ldots$$
$$\pm\frac{n}{n-1}D.b^{n-1}\mp\frac{n}{n}b^n,$$

или, написавъ члены въ обратномъ порядкѣ,

$$A_n=\mp\frac{n}{n}b^n\pm\frac{n}{n-1}D.b^{n-1}\mp\frac{n}{n-2}\underset{c}{D}^2.b^{n-2}$$
$$\pm\frac{n}{n-3}\underset{c}{D}^3.b^{n-3}\mp\ldots\ldots-\frac{n}{1}\underset{c}{D}^{n-1}.b.$$

Законъ этой формулы очевиденъ: буква c, поставленная для сокращенія подъ характеристикою D, означаетъ знаменателя, равнаго произведенію цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до порядка деривацій. И такъ

$$\underset{c}{D}^2.b^{n-2}=\frac{D^2.b^{n-2}}{1.2},\quad \underset{c}{D}^3.b^{n-2}=\frac{D^3.b^{n-2}}{1.2.3}$$
$$\underset{c}{D}^{n-1}.b=\frac{D^{n-1}.b}{1.2.3\ldots(n-1)}.$$

Легко также опредѣлить коэффиціенты B, C, D, E,.... въ возвратномъ видѣ; дѣйствуя какъ показано было выше, найдемъ

$B = -b$
$C = -bB - 2c$
$D = -bC - cB - 3d$
$E = -bD - cC - dB - 4e$
....

Вотъ самое краткое изложеніе началъ *Деривационнаго Исчисленія.* Можно почерпнуть обширныя свѣдѣнія объ этомъ предметѣ въ сочиненіи Арбогаста. Но чтобы показать какимъ пособіемъ въ Анализѣ можетъ служить способъ, о которомъ говоримъ, мы считаемъ неизлишнимъ познакомить читателей нашихъ съ содержаніемъ этой книги. Сочиненіе Арбогаста раздѣлено на семь слѣдующихъ главъ: 1° *Легкій и общій способъ для разложенія въ ряды функцій какихъ ни есть полиномій, и для вычисленія какого ни есть члена этого разложенія, независимо отъ другихъ членовъ.* 2°. *Разложеніе въ ряды функцій двухъ или нѣсколькихъ полиномій, расположенныхъ по степенямъ одной и той же буквы.* 3°. *Разложеніе функцій одной или нѣсколькихъ полиномій, простирающихся по степенямъ и произведеніямъ двухъ или нѣсколькихъ различныхъ буквъ въ ряды, расположенные такимъ же образомъ.* 4°. *Приложенія Деривационнаго Исчисленія къ возвратнымъ рядамъ, простымъ, двойнымъ, тройнымъ и вообще какого ни есть порядка.* 5°. *Приложенія Деривационнаго Исчисленія къ обращенію рядовъ* (*retour des suites*). 6°. *Употребленіе деривацій въ Дифференціальномъ Исчисленіи. Объ обратныхъ деривацiяхъ и приложеніе ихъ къ Интегральному Исчисленію.* 7°. *Приложенія Деривационнаго Исчисленія къ другимъ отраслямъ теоріи рядовъ.*

DÉRIVÉE. ПРОИЗВОДНАЯ. Смот. ниже.

DÉRIVÉES (FONCTIONS). (Анал.) **ПРОИЗВОДНЫЯ ФУНКЦІИ.** Когда разлагаемъ въ рядъ какую ни есть функцію одной или нѣсколькихъ перемѣнныхъ, то получаемъ въ разложеніи новыя функціи, которыя *Лагранжъ* назвалъ *производными.* Чтобы показать въ чемъ состоитъ теорія производныхъ функцій, изобразимъ чрезъ $f(x)$ какую ни есть функцію перемѣнной x, и положимъ что x получило произвольное приращеніе h; въ такомъ предположеніи $f(x)$ измѣнится въ $f(x+h)$. Можно доказать, что рядъ, въ который разложится функція $f(x+h)$ при неопредѣленкомъ x, не будетъ заключать въ себѣ ни отрицательныхъ, ни дробныхъ степеней приращенія h. Сверхъ того, легко видѣть, что членъ разложенія, независящій отъ h, будетъ не иное что, какъ первоначальная функція $f(x)$. Смот. TAYLOR (THÉORÊME DE). И такъ, можно предположить

$$f(x+h) = f(x) + ph + qh^2 + rh^3 + sh^4 + \dots..$$

Въ этомъ ряду количества $p, q, r, s, \dots$ зависятъ отъ перемѣнной x и отъ вида функціи, означенной характеристикою f; для опредѣленія этой зависимости, положимъ что x получило новое приращеніе i, независящее отъ h, въ слѣдствіе чего функція $f(x+h)$ обратится въ $f(x+i+h)$. Но очевидно, что получится та самая величина $f(x+i+h)$, когда въ функціи $f(x+h)$ подставимъ $h+i$ вмѣсто h. Пусть будутъ

$$\begin{array}{l} f(x) + f'(x)i + \dots. \\ p + p'i + \dots\dots\dots \\ q + q'i + \dots\dots\dots \\ r + r'i + \dots\dots\dots \\ s + s'i + \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

первые члены разложенія функцій $f(x), p, q, r, s, \dots$, въ которыхъ замѣнили x суммою $x+i$. Въ слѣдствіе сдѣланнаго сей-часъ замѣчанія, найдется слѣдующее уравненіе:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) + f'(x)i + \dots. \\ +(p+p'i+\dots.)h + .. \\ +(q+q'i+\dots.)h^2 + .. \\ +(r+r'i+\dots.)h^3 + .. \\ +(s+s'i+\dots.)h^4 + .. \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \begin{array}{l} = f(x) + p(h+i) + q(h+i)^2 \\ + r(h+i)^3 + s(h+i)^4 + \dots. \end{array}$$

Такъ какъ это равенство должно имѣть мѣсто при всякихъ величинахъ для h и i, то сравнивая коэффиціенты передъ $i, hi, h^2i, h^3i \dots$, получимъ

$$p = f'(x),\ 2q = p',\ 3r = q',\ 4s = r', \dots\dots$$

Функція $f'(x)$, изображающая коэффиціентъ у первой степени h въ разложеніи $f(x+h)$, называется *первою производною* функціи $f(x)$; очевидно что p' выводится изъ p точно такъ, какъ $f'(x)$ изъ $f(x)$, почему и будетъ *первою производною* функціи p; q' — функціи q; r' — функціи r, и такъ далѣе. Для единообразія изобразимъ чрезъ $f''(x)$ первую производную функціи $f'(x)$, чрезъ $f'''(x)$ первую производную функціи $f''(x), \dots.$; получимъ

$p = f'(x), q = \frac{1}{2} f''(x), r = \frac{1}{2.3} f'''(x), s = \frac{1}{2.3.4} f^{IV}(x) \ldots,$

слѣдовательно

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{1.2} + f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3} + f^{IV}(x)\frac{h^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

Функція $f(x)$ въ отношеніи къ функціямъ $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., называется *первообразною функціею* (*fonction primitive*), а функціи $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ... — *производными функціями* (*fonctions dérivées*). Первая изъ нихъ, $f'(x)$, принимаетъ названіе *первой производной* или *производной перваго порядка* (*fonction prime* или *dérivée du premier ordre*); вторая, $f''(x)$, называется *второю производною* или *производною втораго порядка* (*fonction seconde* или *dérivée du second ordre*); третья, $f'''(x)$, *третею производною* или *производною третьяго порядка* (*fonction tierce* или *dérivée du troisième ordre*), и такъ далѣе.

Если изобразимъ первообразную функцію $f(x)$ чрезъ y, то послѣдовательныя ея производныя могутъ быть означены чрезъ y', y'', y''', ... $y^{(n)}$ или еще чрезъ $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ... $\frac{d^ny}{dx^n}$, такъ что

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}$$

$$f''(x) = y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$f'''(x) = y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(x) = y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Для дальнѣйшихъ подробностей о производныхъ функціяхъ, отсылаемъ къ сочиненію Лагранжа: *Théorie des fonctions analytiques*, а также къ трактатамъ о Дифференціальномъ и Интегральномъ Исчисленіи. Въ статьѣ DIFFÉRENTIEL (CALCUL) этого Лексикона читатели найдутъ какимъ образомъ по данной функціи опредѣляются послѣдовательныя производныя.

ÉQUATIONS DÉRIVÉES. Производныя уравненія. Уравненія, получаемыя чрезъ составленіе производныхъ всѣхъ членовъ первообразнаго уравненія. И такъ, имѣя уравненіе $xy^2 - y^3 + x^2y - x^3 - a = 0$, найдется для его производнаго $y^2 + 2xy - 3x^2 + (2xy - 3y^2 + x^2)y' = 0$. *Équations dérivées du premier ordre, du second ordre* и проч.; *производныя уравненія перваго, втораго порядка* и проч. Такія уравненія, которыя могутъ быть составлены посредствомъ какого либо соединенія первообразнаго уравненія съ *первымъ производнымъ* (*équation prime*), съ *вторымъ производнымъ* (*équation seconde*) и такъ далѣе. Смот ARBITRAIRES (ÉLIMINATION DES CONSTANTES).

DÉRIVÉES PARTIELLES. Частныя производныя. Смот. § 6 статьи: DIFFÉRENTIEL (CALCUL).

DÉRIVER. ПРОИСХОДИТЬ. FAIRE DÉRIVER; производить. *Ces quantités dérivent les unes des autres*; *эти количества производятся одни изъ другихъ.*

DERNIER QUARTIER. (Астр.) **ПОСЛѢДНЯЯ ЧЕТВЕРТЬ.** Говорится о лунѣ. Смот. PHASE.

DERNIÈRE VALEUR. ПОСЛѢДНЯЯ ВЕЛИЧИНА. Когда перемѣнное количество непрестанно приближается къ нулю, и наконецъ совсѣмъ уничтожается, то значеніе сей перемѣнной, непосредственно предшествующее нулю, называется *послѣднею ея величиною.* Дѣйствительно, когда перемѣнная совсѣмъ изчезнетъ, то она не будетъ имѣть никакого значенія, а до изчезанія получитъ нѣкоторую величину, которая будетъ послѣднею, если между нею и нулемъ не заключается никакой другой величины; если же разсматриваемая величина можетъ еще болѣе приблизиться къ нулю, то она не будетъ послѣднею. Для объясненія сказаннаго, положимъ что какое нибудь тѣло движется съ уменьшающеюся скоростію, и наконецъ совсѣмъ останавливается. Послѣдняя скорость этого тѣла не будетъ нуль, ибо нуль не изображаетъ никакой скорости; но послѣдняя скорость будетъ та, послѣ которой непосредственно тѣло остановится. Ясно, что эта скорость, какова бы она ни была, непремѣнно существуетъ. — Напротивъ того, если перемѣнное количество, обратясь въ нуль, получаетъ потомъ непрерывный рядъ значеній, положительныхъ или отрицательныхъ, то величина его, непосредственно слѣдующая за нулемъ, называется *первою величиною* (*première valeur*). Когда имѣемъ двѣ перемѣнныя, которыя обѣ приближаются къ нулю, или послѣ изчезанія принимаютъ послѣдовательныя значенія, положительныя или отрицательныя, то отношеніе *послѣднихъ* *величинъ* сихъ двухъ перемѣнныхъ называется *послѣднимъ содержаніемъ* (*dernière raison*), а отношеніе *первыхъ ихъ величинъ*, — *первымъ содержаніемъ* (*première raison*). Какъ послѣднее такъ и первое содержаніе называютъ иногда *предѣльнымъ* (*rapport limite*). Если двѣ перемѣнныя, о которыхъ говоримъ, измѣняются въ одно время, такъ что извѣстному измѣненію одной соотвѣтствуетъ извѣстное же измѣненіе другой изъ нихъ, то *послѣднее* и *первое* ихъ содержанія будутъ величины совершенно опредѣленныя. Разысканіе сихъ содержаній составляетъ предметъ способа Флюкцій или Дифференціальнаго Исчисленія.

Пояснимъ теперь примѣрами сказанное здѣсь о послѣднихъ содержаніяхъ. Положимъ, что имѣемъ кривую AMB (черт. 11 Листъ VII), на которой разсматриваются двѣ точки M и N, соединенныя прямою NMS. Опустимъ изъ сихъ точекъ на ось OX перпендикуляры MP и NQ, а изъ M проведемъ параллельную этой оси линію MR; такимъ образомъ составится треугольникъ MRN, котораго одна сторона, MR, изображаетъ приращеніе абсциссы OP, а другая, RN, приращеніе ординаты PM. Если допустимъ теперь, что точка N приближается постепенно къ точкѣ M, которую предполагаемъ неподвижною, то сѣкущая NS, обращаясь около M, будетъ болѣе и болѣе приближаться къ касательной MT къ кривой, и вмѣстѣ съ тѣмъ уменьшающійся треугольникъ MRN будетъ стремиться къ подобію съ треугольникомъ TPM. Слѣдовательно, отношеніе $\frac{MP}{TP}$ есть предѣлъ, къ которому неопредѣленно приближается содержаніе $\frac{NR}{MR}$. Когда MR и NR получатъ *послѣднія величины*, то очевидно $\frac{NR}{MR}=\frac{MP}{TP}$. И такъ $\frac{MP}{TP}$, то есть отношеніе подкасательной кривой къ ея ординатѣ, будетъ *послѣднимъ содержаніемъ* выраженія $\frac{NR}{MR}$, которое изображаетъ отношеніе приращенія ординаты кривой къ приращенію ея абсциссы.

Положимъ еще, что ищемъ послѣднее отношеніе хорды къ синусу. Изобразимъ чрезъ x синусъ-версусъ, и предположивъ радіусъ круга равнымъ единицѣ, получимъ *хорда* $=\sqrt{2x}$, *синусъ* $=\sqrt{2x-x^2}$. И такъ

$$\frac{\text{хорда}}{\text{синусъ}}=\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x-x^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x}}.$$

Но, по предположенію, $\sqrt{2x}$, а поэтому и перемѣнная x, уменьшается неопредѣленно, и приближается къ нулю; слѣдовательно, когда предположимъ что x получаетъ послѣднюю величину, то знаменатель $\sqrt{2-x}$ обратится въ $\sqrt{2}$, а самое отношеніе $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x}}$, по причинѣ неизмѣняемости числителя, будетъ равно *единицѣ*. И такъ, единица изобразитъ послѣднее содержаніе хорды къ синусу.

Способъ послѣднихъ и первыхъ содержаній, употребленный *Нютономъ* въ его *Philosophiae naturalis principia Mathematica*, основанъ на одинхъ началахъ съ способомъ предѣловъ; но часто первый имѣетъ предъ вторымъ то преимущество, что облегчаетъ представленіе разныхъ понятій, дѣлая ихъ, такъ сказать, осязательными. По аналогіи предметовъ отсылаемъ читателей къ статьямъ: LIMITE, EXHAUSTION (MÉTHODE D'), INDIVISIBLES (MÉTHODE DES), DÉRIVÉE, DIFFÉRENTIEL (CALCUL).

DÉROULÉE. (Геом.) Уст. сл. **КРИВАЯ РАЗВЕРТЫВАНІЯ, РАЗВЕРТКА.** *Вариньонъ* въ Разсужденіи своемъ: *Nouvelle formation des spirales* (Mémoires de l'Académie Royale de Sciences, 1740 г.), разсматривалъ особаго рода развертаніе спиральныхъ линій, и далъ этому развертанію названіе *déroulée*.

DÉROULEMENT. (Геом.) Уст. выр. **РАЗВЕРТЫВАНІЕ.** Смот. выше.

DÉROULER. РАЗВЕРНУТЬ. Найти развертаніе.

DÉSASSEMBLER. (Мех.) **РАЗНИМАТЬ, РАЗБИРАТЬ.** Говорится о деревянныхъ сооруженіяхъ. *Désassembler les pièces d'une machine*; *разобрать машину по частямъ*. Смот. DÉMONTER.

DESCARTES (FOLIUM DE). (Геом.) **ДЕКАРТОВЪ ЛИСТЪ, ФОЛІЙ.** Кривая третей степени, опредѣляемая уравненіемъ $x^3+y^3=3axy$. Смот. FOLIUM.

OVALES DE DESCARTES. ДЕКАРТОВЫ ОВАЛЫ. Такъ названы нѣкоторыя кривыя линіи четвертаго порядка, изслѣдованіемъ которыхъ занимался *Декартъ*. Смот. OVALES DE DESCARTES.

DESCARTES (RÈGLE DE — POUR LA RESOLUTION DES ÉQUATIONS DU 4-ME DEGRÉ). Смот. BIQUADRATIQUE

DESCARTES (RÈGLE DES SIGNES DE). (Алг.) **ДЕКАРТОВО ПРАВИЛО ЗНАКОВЪ,** называемое также нѣкоторыми авторами Гарріотовою теоремою. Правило, открытое *Декартомъ*, и служащее для нахожденія предѣла числа положительныхъ и отрицательныхъ корней алгебрическаго уравненія посредствомъ знаковъ, сопровождающихъ его коэффиціенты. Декартъ, въ своей Геометріи, предлагаетъ это правило въ слѣдующемъ видѣ:

Если въ данномъ уравненіи

$$x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0,$$

или, что все равно, въ ряду коэффиціентовъ

$$1,\ a_1,\ a_2, \ldots\ldots a_{m-1},\ a_m$$

осчитаемъ число перемѣнъ и повтореній знаковъ между послѣдовательными его членами, то окажется, что предложенное уравненіе можетъ имѣть столько корней положительныхъ, *сколько перемѣнъ знаковъ, и столько корней* отрицательныхъ, *сколько повтореній знаковъ.*

Роберваль возставалъ противъ справедливости правила Декарта; возраженія его основывались на ложномъ смыслѣ, который онъ придавалъ теоремѣ сего математика. По недоразумѣнію ли, или по другой причинѣ, ему казалось будто Декартъ утверждалъ, что уравненіе *имѣетъ* (Декартъ говоритъ только *можетъ имѣть*) именно столько положительныхъ корней, сколько находится перемѣнъ знаковъ между послѣдовательными его коэффиціентами, и столько отрицательныхъ, сколько повтореній знаковъ. Въ опроверженіе этого правила Роберваль предлагалъ уравненія, которыя, сверхъ вещественныхъ корней, имѣли корни мнимые. Удовлетворительные отвѣты Декарта не могли побѣдить настойчивости его противника.

Послѣ Роберваля *Вальисъ* и *Роллъ* возобновили прежнія неосновательныя возраженія противъ теоремы Декарта.

Впослѣдствіи, *Декартово правило знаковъ* было доказано многими математиками; самыя удовлетворительныя доказательства сей теоремы предложены *Гауссомъ и Коши*. Первое помѣщено въ Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von A. L. Crelle, dritter Band, 1828, а второе, въ Cours d'Analyse par A. L. Cauchy 1-ère Partie, Analyse algébrique, 1821. Предлагаемъ здѣсь второе изъ сихъ доказательствъ, сдѣлавъ въ немъ нѣкоторыя измѣненія, на которыя мы были наведены упомянутымъ сей-часъ способомъ Гаусса.

Пусть будетъ уравненіе

$$(1)\quad x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots\ldots + a_{m-1}x + a_m = 0,$$

въ которомъ $a_1, a_2, \ldots a_{m-1}, a_m$ означаютъ данныя величины, положительныя или отрицательныя. Если ни одинъ изъ членовъ ряда

$$(2)\qquad 1,\ a_1,\ a_2, \ldots\ldots a_{m-1},\ a_m$$

не равенъ нулю, то число перемѣнъ и повтореній знаковъ будетъ совершенно опредѣлено; такъ напримѣръ въ уравненіи

$$x^5 - x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 6x - 8 = 0,$$

или, что все равно, въ ряду

$$+1,\ -1,\ +2,\ +7,\ -6,\ -8$$

имѣемъ *три* перемѣны, именно отъ $+1$ къ -1, отъ -1 къ $+2$ и отъ $+7$ къ -6, и *два* повторенія: отъ $+2$ къ $+7$ и отъ -6 къ -8.

Но когда въ ряду (2) недостаетъ нѣкоторыхъ членовъ, то ясно, что замѣнивъ ихъ нулями, положительными или отрицательными, число перемѣнъ и повтореній знаковъ будетъ зависѣть какъ отъ числа недостающихъ членовъ, такъ и отъ порядка, въ которомъ размѣщаемъ знаки передъ ними. Впрочемъ это число можетъ достигнуть *наибольшей* и *наименьшей* величины. Легко усмотрѣть, что число перемѣнъ сдѣлается *наибольшимъ*, когда будемъ принимать каждый изъ уничтожающихся членовъ со знакомъ противнымъ тому, который сопровождаетъ предшествующій ему членъ, а *наименьшимъ*, если будемъ брать каждый уничтожающійся членъ съ одинакимъ знакомъ съ предшествующимъ же ему членомъ. И такъ, въ ряду

$$+1,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ -1,$$

получится наибольшее число перемѣнъ, когда напишемъ его въ видѣ

$+1,\ -0,\ +0,\ -1,\ +0,\ -1\ldots\ldots$ *пять* перемѣнъ,

а наименьшее, когда напишемъ

$+1,\ +0,\ +0,\ -1,\ -0,\ -1\ldots$ *одна* перемѣна.

Ясно, что наибольшее число повтореній соотвѣтствуетъ наименьшему числу перемѣнъ, а наименьшее число повтореній — наибольшему числу перемѣнъ. И такъ, предыдущій рядъ доставляетъ

Наименьшее число повтореній:

$+1, -0, +0, -1, +0, -1$ *нуль* повтореній.

Наибольшее число повтореній:

$+1, +0, +0, -1, -0, -1$ *четыре* повторенія.

Докажемъ теперь, что если умножимъ какую ни есть полиномію, полную или неполную, на линейный множитель $x+\alpha$, разумѣя подъ α величину положительную, то *наибольшее* число перемѣнъ знаковъ, получаемыхъ въ новой полиноміи, не увеличится чрезъ введеніе этого множителя.

Пусть будетъ

$$(3)\quad x^m-+-\ldots\pm N_0x^{n+1}\pm Nx^n\mp\pm\ldots\pm P_0x^{p+1}\pm Px^p\mp\pm\ldots\pm S_0x^{s+1}\pm Sx^s\mp\pm\ldots\pm T_0x\mp T$$

какая ни есть полиномія. Если она *неполная*, то недостающіе въ ней члены замѣняемъ нулями, принимая сіи послѣдніе съ такими знаками, чтобы число перемѣнъ знаковъ было наибольшее. И такъ, предполагаемъ что въ ряду (3) отъ перваго члена x^m до $\pm N_0x^{n+1}$ включительно, отъ $\pm Nx^n$ до $\pm P_0x^{p+1}$ и такъ далѣе, наконецъ отъ $\pm Sx^s$ до $\mp T$ будутъ однѣ *перемѣны знаковъ*, а *повторенія знаковъ* существуютъ при переходѣ отъ члена $\pm N_0x^{n+1}$ къ $\pm Nx^n$, отъ $\pm P_0x^{p+1}$ къ $\pm Px^p$ и такъ далѣе до члена $\pm S_0x^{s+1}$, составляющаго съ $\pm Sx^s$ послѣднее повтореніе. Помноживъ выраженіе (3) на $x+\alpha$, получимъ

$$(4)\quad \begin{array}{rl} x^{m+1}-+\ldots\pm N_0x^{n+2}\pm N & \Big| \, x^{n+1}\mp\pm\ldots \\ \pm\alpha N_0 & \Big| \\ \pm P_0x^{p+2}\pm P & \Big| \, x^{p+1}\mp\pm\ldots \\ \pm\alpha P_0 & \Big| \\ \pm S_0x^{s+2}\pm S & \Big| \, x^{s+1}\mp\pm\ldots \\ \pm\alpha S_0 & \Big| \\ \pm T_0x^2\mp T & \Big| \, x \\ \pm\alpha T_0 & \Big| \quad \mp\alpha T. \end{array}$$

Легко видѣть, что въ этомъ выраженіи наибольшее число перемѣнъ знаковъ отъ члена x^{m+1} до $\pm(N+\alpha N_0)x^{n+1}$, отъ $\pm(N+\alpha N_0)x^{n+1}$ до $\pm(P+\alpha P_0)x^{p+1}$, и такъ далѣе до $\pm(S+\alpha S_0)x^{s+1}$, не можетъ превышать наибольшаго числа перемѣнъ знаковъ, существующихъ въ полиноміи (3) отъ члена x^m до $\pm Nx^n$, отъ $\pm Nx^n$ до $\pm Px^p$ и такъ далѣе до $\pm Sx^s$. Дѣйствительно, въ ряду (3) отъ члена x^m до $\pm Nx^n$ имѣемъ $m-n+1$ членъ, включая сюда и крайніе, и слѣдовательно, по сдѣланному предположенію, $m-n-1$ перемѣну; но какъ въ ряду (4) число членовъ отъ x^{m+1} до $\pm(N+\alpha N_0)x^{n+1}$ будетъ также $m-n+1$, а послѣдній имѣетъ одинакій знакъ съ $\pm Nx^n$, то и очевидно, что между ними не можетъ быть болѣе $m-n-1$ перемѣны знаковъ. Это сужденіе можетъ быть приложено отъ слова до слова къ промежуткамъ отъ $\pm(N+\alpha N_0)x^{n+1}$ до $\pm(P+\alpha P_0)x^{p+1}$ и такъ далѣе до члена $\pm(S+\alpha S_0)x^{s+1}$; слѣдовательно, наибольшее число перемѣнъ знаковъ въ ряду (4), отъ перваго члена x^{m+1} до $\pm(S+\alpha S_0)x^{s+1}$, не можетъ превзойти числа перемѣнъ знаковъ въ полиноміи (3) отъ перваго члена x^m до $\pm Sx^s$. Остается только доказать, что число перемѣнъ знаковъ отъ члена $\pm(S+\alpha S_0)x^{s+1}$ и до послѣдняго $\mp\alpha T$ не можетъ превзойти числа перемѣнъ знаковъ, доставляемыхъ рядомъ (3) отъ члена $\pm Sx^s$ до послѣдняго $\mp T$. Для этого замѣтимъ, что отъ $\pm Sx^s$ до $\mp T$ имѣемъ $s+1$ членъ, и слѣдовательно, по допущенному условію, s перемѣнъ; отъ члена же $\pm(S+\alpha S_0)x^{s+1}$ до $\mp\alpha T$ всего $s+2$ члена, и послѣдній изъ нихъ имѣетъ одинакій знакъ съ послѣднимъ членомъ ряда (3), то есть съ $\mp T$. Въ силу послѣдняго условія видимъ, что хотя рядъ

$$(5)\quad \pm(S+\alpha S_0)x^{s+1}\ldots\ldots\ldots\mp(T-\alpha T_0)x\mp\alpha T$$

и заключаетъ въ себѣ одинъ членъ лишній противъ ряда

$$(6)\quad \pm Sx^s\mp\pm\mp\ldots\pm T_0x\mp T,$$

но число перемѣнъ знаковъ, находящихся въ немъ, не можетъ превышать числа s. Дѣйствительно, чтобы получить наибольшее число перемѣнъ знаковъ, какое только можетъ доставить рядъ (5), надобно, какъ сказано выше, размѣстить знаки такъ, чтобы каждый членъ имѣлъ знакъ противный съ предшествующимъ ему членомъ; слѣдовательно рядъ (5), при наибольшемъ числѣ перемѣнъ знаковъ, будетъ такого вида:

$$\pm(S+\alpha S_0)x^{s+1}\mp\pm\mp\ldots\pm\mp(\mp\alpha T).$$

Ясно, что предпослѣдній членъ доставитъ повтореніе знака съ послѣднимъ $\mp\alpha T$, почему и останется всего $s+1$ членъ, между которыми получится s перемѣнъ знаковъ, то есть столько же, какъ и въ ряду (6).

И такъ, заключаемъ окончательно, что наибольшее число перемѣнъ знаковъ, доставляемыхъ полиномією (4), не можетъ превышать наибольшаго числа перемѣнъ знаковъ, существующихъ въ полиноміи (5).

Изъ этого предложенія выводимъ какъ слѣдствіе, что если помножимъ какую ни есть полиномію на сколько угодно линейныхъ множителей $x+\alpha$, $x+\beta$, $x+\gamma$, ..., то не увеличимъ *наибольшаго* числа перемѣнъ знаковъ между новыми коэффиціентами послѣдовательныхъ степеней количества x.

Теперь уже легко доказать слѣдующую теорему, которая заключаетъ въ себѣ, но въ видѣ болѣе опредѣлительномъ, *Декартово правило знаковъ*, приведенное въ началѣ этой статьи:

Теорема. *Пусть будетъ для полиноміи*
$$f(x)=x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m$$
μ наименьшее *число повтореній, а* ν наименьшее *число перемѣнъ знаковъ между коэффиціентами послѣдовательныхъ степеней x. Въ такомъ предположеніи* 1°) *число отрицательныхъ корней уравненія*
$$f(x)=0$$
будетъ равно или меньше μ; 2°) *число положительныхъ его корней равно или меньше* ν; 3°) *число мнимыхъ корней равно или больше разности* $m-\mu-\nu$.

Слѣдствіе. Если данное уравненіе не имѣетъ корней мнимыхъ, то число отрицательныхъ его корней будетъ равняться наибольшему числу повтореній знаковъ, а число положительныхъ корней, наименьшему числу перемѣнъ знаковъ между послѣдовательными коэффиціэнтами этого уравненія.

Чтобы доказать первую часть теоремы, замѣтимъ, что если изобразимъ чрезъ α, β, γ, ... отрицательные корни уравненія $f(x)=0$, то $f(x)$ будетъ дѣлиться на-цѣло на $(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)$...; пусть будетъ
$$\frac{f(x)}{(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)\ldots}=X.$$
Но, въ слѣдствіе доказаннаго выше, *наибольшее* число перемѣнъ знаковъ въ полиноміи $f(x)$ будетъ равно или меньше *наибольшаго* числа перемѣнъ знаковъ, соотвѣтствующаго полиноміи X, то есть равно или менѣе степени этой полиноміи X. Слѣдовательно, *наименьшее* число повтореній знаковъ въ $f(x)$ будетъ равно или болѣе разности между числомъ m и степенью частнаго X, а эта разность, по предположенію, изображаетъ число отрицательныхъ корней уравненія $f(x)=0$.

Для доказательства второй части теоремы стоитъ только замѣтить, что написавъ въ $f(x)$, $-x$ на мѣсто x, перемѣнимъ положительные корни уравненія $f(x)=0$ въ отрицательные, и вмѣстѣ съ тѣмъ перемѣны знаковъ въ повторенія, и наоборотъ.

Третья часть теоремы есть непосредственное слѣдствіе двухъ первыхъ частей, ибо, извѣстно, что всякое уравненіе m-ой степени имѣетъ m корней, считая вещественные и мнимые.

Для примѣра приведемъ двучленное уравненіе
$$x^m+1=0.$$
Если m *четное* число, то получимъ $\mu=0$ и $\nu=0$; для m *нечетнаго* имѣемъ $\mu=1$, $\nu=0$. Отсюда заключаемъ, что предложенное уравненіе не имѣетъ корней вещественныхъ когда будетъ четной степени, а имѣетъ одинъ корень вещественный, именно отрицательный, когда это уравненіе нечетной степени.

Такъ какъ правило Декарта имѣетъ довольно близкую связь съ способами отдѣленія корней, предложенными *Фурье* и *Штурмомъ*, то, для сличенія, отсылаемъ читателей къ статьямъ: FOURIER (Analyse des équations déterminées par), STURM (Théorême de).

DESCARTES (GÉOMÉTRIE DE). ДЕКАРТОВА ГЕОМЕТРІЯ. Такъ называли послѣ *Декарта* приложеніе Алгебры къ Геометріи, и преимущественно способъ выражать кривыя линіи посредствомъ уравненій. И такъ собственно говоря, *Декартова Геометрія* есть наша *Аналитическая Геометрія*; Смот. GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE. Декартъ, которому наука обязана изобрѣтеніемъ этого способа, предложилъ его въ своей *Геометріи*, напечатанной въ 1637 году; Смот. COURBE. — Въ томъ же смыслѣ употребляютъ наименованіе: *Анализъ Декарта*.

DESCENDANT. (Мех.) **ПАДАЮЩІЙ, ОПУСКАЮЩІЙСЯ.**

DESCENDENTES (SÉRIES). (Анал.) **НИСХОДЯЩІЕ РЯДЫ.** Смот. ASCENDANTE.

Puissances descendantes. Нисходящія

степени. Когда имѣемъ рядъ, состоящій изъ конечнаго или безконечнаго числа членовъ, и который простирается по уменьшающимся степенямъ перемѣннаго количества, то говоримъ, что рядъ расположенъ по *нисходящимъ степенямъ* перемѣнной. Вотъ примѣръ:

$$x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}+\ldots=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots\ldots$$

DESCENSION. (Астр.) Не упот. **НИСХОЖДЕНІЕ.** Угловое разстояніе между точкою весенняго равноденствія и точкою экватора, заходящею въ одно время со звѣздою, называлось *прямымъ* или *косвеннымъ нисхожденіемъ* звѣзды (*descension droite, oblique*) смотря по тому, относилось ли это разстояніе къ прямой или косвенной сферѣ. Разность между прямымъ и косвеннымъ нисхожденіями называли *разностію нисхожденій* (*différence descentionelle*). Нынѣ вмѣсто *нисхожденій* употребляются только *восхожденія*. Смот. ASCENSION, а также DÉCLINAISON.

DESCENTE или **CHUTE DES CORPS.** (Мех.) **ПАДЕНІЕ ТѢЛЪ.** Прямое или косвенное движеніе тяжелыхъ тѣлъ къ земной поверхности. Смот. CHUTE DES GRAVES.

DESCENTE (COURBE DE LA PLUS COURTE или DE LA PLUS VITE). **КРИВАЯ НАИСКОРѢЙШАГО СКАТА.** Смот. BRACHYSTOCHRONE.

DESCRIPTION. (Геом.) **ОПИСЫВАНІЕ, ЧЕРЧЕНІЕ.** Дѣйствіе, посредствомъ котораго чертимъ какую нибудь линію, фигуру и проч. *Description d'une éllipse, d'une parabole*; *черченіе эллипса, параболы.* — *Description d'une courbe par points*; *черченіе* или *построеніе кривой линіи по точкамъ.* Когда, помощію какихъ либо геометрическихъ дѣйствій, опредѣлимъ нѣкоторое число точекъ кривой линіи, довольно близкихъ между собою и соединимъ потомъ, глазомѣрно или посредствомъ лекала, всѣ эти точки непрерывною линіею, то говоримъ, что *построили кривую по точкамъ.* Смот. ÉLLIPSE, PARABOLE и проч.; также CONTINU (MOUVEMENT).

DESCRIPTIVE (GÉOMÉTRIE). НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРІЯ. Смот. GÉOMÉTRIE.

DÉSIGNATION, то же что **NOTATION** (Смот.). **ОЗНАЧЕНІЕ, ЗНАКОПОЛОЖЕНІЕ, НАИМЕНОВАНІЕ.** *En employant les mêmes désignations on aura* и проч. *Употребивъ тѣ же знакоположенія, тѣ же наименованія, получимъ* и проч.

DÉSIGNÉ (DIVISEUR). (Ариѳ.) **СОКРАЩЕННЫЙ ДѢЛИТЕЛЬ.** Смот. DIVISION ORDONNÉE.

DÉSIGNER. ОЗНАЧИТЬ, обозначить, изобразить, представить, назвать. *En désignant par x l'inconnue, l'on aura l'équation* и проч. *Означивъ, изобразивъ неизвѣстную чрезъ x, получимъ уравненіе* и проч.

DÉTACHÉ (POINT), POINT ISOLÉ, POINT CONJUGUÉ. (Геом.) **ОТДѢЛЬНАЯ, СОПРЯЖЕННАЯ ТОЧКА.** Смот. CONJUGUÉ.

DÉTACHER. ОТДѢЛИТЬ. *En détachant un facteur* $a+b$ *de* $(a+b)^m$, *on obtient* $(a+b)^{m-1}(a+b)=a(a+b)^{m-1}+b(a+b)^{m-1}$; *отдѣливъ множителя* $a+b$ *отъ степеннаго выраженія* $(a+b)^m$, *получимъ* $(a+b)^{m-1}(a+b)=a(a+b)^{m-1}+b(a+b)^{m-1}$.

DÉTAILS. ПОДРОБНОСТИ. — ДЕТАЛИ. *Détails d'une levée topographique*; *подробности топографической съёмки. Détails d'une épure*; *подробности чертежа, эпюры. Détails d'un calcul*; *подробности вычисленія.*

DÉTENDRE UN RESSORT. (Прикл. Мех.) **СПУСТИТЬ ПРУЖИНУ.**

DÉTERMINANT D'UNE FORME. (Теор. Чис.) **ОПРЕДѢЛИТЕЛЬ ВИДА.** Различныя свойства трехчленнаго выраженія $ax^2+2bxy+cy^2$, гдѣ всѣ буквы изображаютъ цѣлыя числа, зависятъ преимущественно отъ числа b^2-ac, которое и названо *Гауссомъ* опредѣлителемъ вида $ax^2+2bxy+cy^2$. Такъ какъ выраженіе .... $ax^2+2bxy+cy^2$ можетъ быть представлено въ видѣ

$$\frac{(ax+by+y\sqrt{b^2-ac})(ax+by-y\sqrt{b^2-ac})}{a},$$

то ясно, что его опредѣлитель будетъ не иное что какъ число, находящееся подъ квадратнымъ корнемъ въ каждомъ изъ двухъ линейныхъ множителей, на которые предложенное выраженіе разлагается. Для нѣкоторыхъ подробностей о видахъ второй степени, отсылаемъ къ статьѣ: FORMES (THEORIE DES). Для полнаго же изученія теоріи видовъ, читатели могутъ обратиться къ извѣстному сочиненію Гаусса: *Disquisitiones arithmeticae.* Тамъ найдутъ они любопытныя изслѣдованія объ этомъ предметѣ, а также объясненіе различія, полагаемаго между *опредѣлителями правильными* (*déterminants réguliers*) и *неправильными* (*irréguliers*).

DÉTERMINATION. ОПРЕДѢЛЕНІЕ, нахожденіе, разысканіе. — Значеніе. Смот. VALEUR. — Подъ словомъ *détermination* разумѣютъ также совокупность сужденій, посредствомъ которыхъ показываютъ въ какомъ случаѣ и какимъ образомъ какая либо задача можетъ быть рѣшена, а также, сколько она допускаетъ рѣшеній. Смот. DIORISME.

DÉTERMINÉ. ОПРЕДѢЛЕННЫЙ. *Problème déterminé*; *опредѣленная задача.* Задача, допускающая одно или вообще конечное число рѣшеній. Говорится въ противоположность тѣмъ задачамъ, которыя допускаютъ безконечное число рѣшеній. Смот. ALGÈBRE, ÉQUATION. INDÉTERMINÉE (ANALYSE).

Analyse déterminée. Опредѣленный Анализъ. Анализъ, занимающійся рѣшеніемъ опредѣленныхъ задачъ; Смот. выше.

DÉTERMINER. ОПРЕДѢЛИТЬ, найти, вывести, сыскать, разыскать. *Déterminer la valeur d'une inconnue*; *опредѣлить, найти значеніе неизвѣстной.*

DÉTURBATRICE (FORCE). Такъ назвалъ *Ла-Каль* (*La Caille*) въ своихъ *Leçons d'Astronomie* силу, перпендикулярную къ плоскости орбиты возмущенной планеты. Смот. PERTURBATIONS.

DEUX. ДВА. Deuxième; второй.

DÉVELOPPABLE (SURFACE). (Геом.) **РАЗВЕРТЫВАЮЩАЯСЯ, РАЗВЕРЗАЮЩАЯСЯ ПОВЕРХНОСТЬ.** Отличительное свойство развертывающихся поверхностей состоитъ въ томъ, что онѣ могутъ быть вытянуты въ плоскость безъ разрыва и безъ складокъ. Таковы напримѣръ поверхности *цилиндрическія*, *коническія*; Смот. CYLINDRIQUES (SURFACES), CONIQUES (SURFACES). Развертывающаяся поверхность происходитъ отъ движенія прямой линіи, которая, во всѣхъ своихъ положеніяхъ, остается касательною къ данной кривой линіи двоякой кривизны. Очевидно, что отъ этой кривой, называемой *возвратнымъ ребромъ*, зависитъ видъ образуемой поверхности. Легко видѣть, что характеристики этого рода поверхностей будутъ прямыя линіи.

Выведемъ теперь уравненіе развертывающейся поверхности. Означимъ чрезъ α, β, γ координаты возвратнаго ребра, и чрезъ $\beta=\varphi(\alpha)$, $\gamma=\psi(\alpha)$ его уравненія. Пусть x, y, z изображаютъ координаты касательной къ возвратному ребру. Уравненія этой касательной будутъ

$$y-\varphi(\alpha)=\frac{d\beta}{d\alpha}(x-\alpha) \text{ и } z-\psi(\alpha)=\frac{d\gamma}{d\alpha}(x-\alpha),$$

или

$$(1)\quad y-\varphi(\alpha)=\varphi'(\alpha)(x-\alpha) \text{ и } z-\psi(\alpha)=\psi'(\alpha)(x-\alpha).$$

Если изъ двухъ послѣднихъ уравненій исключимъ величину α, то получимъ уравненіе развертывающейся поверхности.

Очень легко получить общее уравненіе развертывающихся поверхностей, независимо отъ произвольныхъ функцій φ и ψ. Дѣйствительно, замѣтивъ, что въ силу уравненій (1), α есть нѣкоторая функція отъ x и y, дифференцируемъ уравненія (1) сперва по измѣняемости x, а потомъ по измѣняемости y, и получаемъ

$$(2)\left\{\begin{aligned} 0&=\varphi'(\alpha)+(x-\alpha)\varphi''(\alpha)\frac{d\alpha}{dx}\\ 1&=\qquad\qquad (x-\alpha)\varphi''(\alpha)\frac{d\alpha}{dy}\end{aligned}\right.$$

$$(3)\left\{\begin{aligned} \frac{dz}{dx}&=\psi'(\alpha)+(x-\alpha)\psi''(\alpha)\frac{d\alpha}{dx}\\ \frac{dz}{dy}&=\qquad\qquad (x-\alpha)\psi''(\alpha)\frac{d\alpha}{dy}.\end{aligned}\right.$$

Если въ уравненія (3) подставимъ величины для $(x-\alpha)\frac{d\alpha}{dx}$ и для $(x-\alpha)\frac{d\alpha}{dy}$, выведенныя изъ формулъ (2), то $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$ выразятся чрезъ произвольныя функціи одной перемѣнной; слѣдовательно, мы въ правѣ положить

$$\frac{dz}{dx}=\chi\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

разумѣя подъ χ произвольную функцію, ибо видъ ея зависитъ отъ произвольныхъ же функцій φ и ψ. Дифференцируя послѣднее уравненіе сперва по x, а потомъ по y, получимъ

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\chi'\left(\frac{dz}{dy}\right)\cdot\frac{d^2z}{dxdy}$$
$$\frac{d^2z}{dxdy}=\chi'\left(\frac{dz}{dy}\right)\cdot\frac{d^2z}{dy^2}.$$

Исключивъ $\chi'\left(\frac{dz}{dy}\right)$ изъ этихъ двухъ уравненій, найдемъ окончательно

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2-\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}=0.$$

Вотъ уравненіе въ частныхъ дифференціалахъ, принадлежащее всѣмъ развертывающимся поверхностямъ; оно найдено *Эйлеромъ*.

DÉVELOPPANTE. (Геом.) **РАЗВЕРЗАЮЩАЯ, РАЗВЕРТЫВАЮЩАЯ.** Такъ называется кривая, происходящая отъ разверзанія другой кривой линіи, которая, въ отношеніи къ первой, именуется *эволютою*; Смот. ниже.

DÉVELOPPÉE. (Геом.) **ЭВОЛЮТА,** разверзающаяся, развертывающаяся, развертка. Одна изъ примѣчательнѣйшихъ теорій, обогатившихъ Геометрію послѣ Декарта, есть, безъ сомнѣнія, *теорія эволютъ*, изобрѣтенная *Гугенсомъ*. Правда, что еще за два столѣтія до Р. Х. Аполлоній предложилъ нѣкоторыя понятія о разверзаніи кривыхъ: по оставленное имъ объ этомъ предметѣ такъ незначительно, что нельзя отказать Гугенсу въ первенствѣ сего открытія. Эта важная теорія изложена въ третей главѣ извѣстнаго его сочиненія *Horlogium oscillatorium*, напечатаннаго въ 1673 году.

Положимъ, что кривая ANF (черт. 12 Листъ VII) обернута гибкою и нерастяжимою нитью, которой одинъ конецъ укрѣпленъ въ точкѣ F, а другой вытянутъ по направленію касательной AO. Если будемъ разгибать нить и натягивать ее отъ O къ M, то по мѣрѣ того какъ она станетъ отдѣляться отъ кривой ANF, конецъ O опишетъ нѣкоторую кривую OMC, называемую *разверзающею* (*développante*) кривой ANF; линія же ANF, въ отношеніи къ OMC, принимаетъ названіе *эволюты*. Изъ этого образованія заключаемъ, что во всякой точкѣ M направленіе MN нити будетъ нормально къ разверзающей; дѣйствительно, если примемъ эволюту за многоугольникъ, состоящій изъ безконечнаго числа сторонъ, то легко будетъ усмотрѣть, что конецъ M нити NM опишетъ радіусомъ NM, около точки N какъ около центра, безконечно малую круговую дугу MM', сливающуюся съ элементомъ разверзающей. Подобнымъ образомъ, элементъ $M'M''$ можетъ быть принимаемъ за безконечно малую круговую дугу, описанную изъ точки N' радіусомъ $N'M'$, и такъ далѣе. Слѣдовательно, эволюта кривой OMC будетъ не иное что, какъ геометрическое мѣсто пересѣченій каждыхъ двухъ смежныхъ нормалей, проведенныхъ къ предложенной кривой OMC. На основаніи этого опредѣленія эволюты, мы покажемъ ниже выводъ ея уравненія. Линія NM, по свойству разверзанія, будетъ очевидно касательною къ эволютѣ въ точкѣ N; длина NM называется *радіусомъ эволюты* (*rayon de la développée*), или, въ отношеніи къ разверзающей, *радіусомъ кривизны* (*rayon de courbure*). Смот. OSCULATEUR (CERCLE), CONTACT. Легко также усмотрѣть, что разность $\overline{NM}-\overline{AO}$ двухъ радіусовъ равна спрямленной дугѣ AN эволюты.

Часто эволюту опредѣляютъ другимъ образомъ: эволютою кривой называютъ геометрическое мѣсто центровъ соприкасающихся круговъ данной кривой линіи. Смот. OSCULATEUR (CERCLE).

Приступимъ теперь къ выводу уравненія эволюты и къ аналитическому доказательству различныхъ ея свойствъ.

Пусть будетъ OMC (черт. 12 Листъ VII) данная кривая, а ANF ея эволюта. Отнесемъ обѣ кривыя къ двумъ прямоугольнымъ осямъ OX, OY, и положимъ $OP=x$, $PM=y$, $OQ=\alpha$ и $QN=\beta$. Зависимость между x и y будетъ извѣстна; надобно найти уравненіе между α и β, которое будетъ принадлежать эволютѣ.

Изобразимъ чрезъ

(1) $$f(x,y)=0$$

уравненіе предложенной кривой OMC, а чрезъ

(2) $$\varphi(\alpha,\beta)=0$$

уравненіе ея эволюты ANF. Мы сказали выше, что эволюта есть геометрическое мѣсто пересѣченій каждыхъ двухъ смежныхъ нормалей разверзающей. Если означимъ чрезъ X и Y перемѣнныя координаты нормали MN, проходящей чрезъ точки M и N, соотвѣтственно опредѣляемыя координатами (x, y) и (α, β), то получимъ

$$X-x+\frac{dy}{dx}(Y-y)=0.$$

Смежная нормаль $M'N$ проходитъ чрезъ точку $M'(x+dx,\ y+dy)$ и чрезъ $N(\alpha,\beta)$; и такъ, означивъ чрезъ X' и Y' ея перемѣнныя координаты, получимъ уравненіе

$$X'-x-dx+\frac{d(y+dy)}{d(x+dx)}(Y'-y-dy)=0.$$

Но точка N, опредѣляемая координатами α и β, будетъ общая обѣимъ нормалямъ; слѣдовательно, для опредѣленія координатъ этой точки, должно положить $X=X'=\alpha$, $Y=Y'=\beta$, и два послѣднія уравненія примутъ видъ

$$\alpha-x+\frac{dy}{dx}(\beta-y)=0$$

$$\alpha-x-dx+\frac{dy+d^2y}{dx+d^2x}(\beta-y-dy)=0.$$

Если примемъ dx постояннымъ, то d^2x обратится въ нуль; сверхъ того, второе изъ двухъ послѣднихъ уравненій сократится въ силу перваго изъ нихъ, и, откинувъ безконечно малое количество перваго порядка $\frac{d^2y}{dx^2}\,dy$, получимъ

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} & x-\alpha+(y-\beta)\frac{dy}{dx}=0 \\ & 1+\frac{dy^2}{dx^2}+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}=0. \end{aligned}\right.$$

Уравненія (3) въ совокупности съ уравн. (1) опредѣляютъ вполнѣ эволюту; дѣйствительно, исключивъ изъ этихъ трехъ формулъ двѣ перемѣнныя x и y, получимъ уравненіе, въ составъ котораго войдутъ только координаты α и β; найденное такимъ образомъ уравненіе будетъ принадлежать эволютѣ, и будетъ тожественно съ формулою (2).

Положимъ, напримѣръ, что ищется эволюта обыкновенной параболы, опредѣляемой уравненіемъ $y^2=px$. Такъ какъ въ этомъ случаѣ $\frac{dy}{dx}=\frac{p}{2y}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{p}{2y^2}\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{p^2}{4y^3}$, то уравненія (1) и (3) примутъ видъ

$$y^2=px$$

$$x-\alpha+(y-\beta)\frac{p}{2y}=0$$

$$1+\frac{p^2}{4y^2}-(y-\beta)\frac{p^2}{4y^3}=0.$$

Послѣднее равенство доставляетъ $y=-\sqrt[3]{\frac{p^2\beta}{4}}$ или $\beta=-\frac{4y^3}{p^2}$; подставляя во второе уравненіе эту величину для β, найдемъ

$$x-\alpha+\left(y+\frac{4y^3}{p^2}\right)\frac{p}{2y}=x-\alpha+\frac{p}{2}+\frac{2y^2}{p}=0;$$

но $\frac{2y^2}{p}$, по уравненію параболы, равно $2x$; слѣдовательно $x=\frac{1}{3}\left(\alpha-\frac{p}{2}\right)$. Наконецъ, если подставимъ найденныя величины для x и для y въ уравненіе $y^2=px$, то получимъ

$$\sqrt[3]{\frac{p^4\beta^2}{16}}=\frac{p}{3}\left(\alpha-\frac{p}{2}\right),$$

или

$$\left(\alpha-\frac{p}{2}\right)^3=\frac{27}{16}p.\beta^2.$$

Вотъ уравненіе эволюты обыкновенной параболы. И такъ, искомая эволюта будетъ кубическая парабола второй степени, имѣющая одну и ту же ось съ своею разверзающею, а вершину въ точкѣ A (черт. 12), находящейся отъ вершины O первоначальной кривой на разстояніи OA, то есть на полъ-параметра p. Параметръ эволюты равняется $\frac{27}{16}$ параметра разверзающей. Часть ANF есть эволюта вѣтви OMC данной параболы, а часть ALF', равная и противоположная дугѣ ANF, служитъ эволютою нижней вѣтви OKC'.

Мы сказали выше, что линія MN будетъ касательною къ эволютѣ; это свойство легко доказывается аналитически. Дѣйствительно, если возьмемъ дифференціалъ перваго изъ уравненій (3), принимая въ немъ всѣ величины за функціи перемѣнной x, то получимъ

$$1-\frac{d\alpha}{dx}+\frac{dy^2}{dx^2}-\frac{d\beta}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

или, въ силу втораго изъ уравненій (3),

$$-\frac{d\alpha}{dx}-\frac{d\beta}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}=0,$$

откуда

$$(4)\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{d\beta}{dx}}=-\frac{d\alpha}{d\beta}.$$

Если изобразимъ чрезъ X и Y перемѣнныя координаты направленія нормали MN, которая, по опредѣленію эволюты, должна проходить чрезъ точку N (α,β), то получимъ уравненіе

$$X-\alpha+\frac{dy}{dx}(Y-\beta)=0;$$

подставляя $-\frac{d\alpha}{d\beta}$ на мѣсто $\frac{dy}{dx}$ найдемъ уравненіе

$$Y-\beta=\frac{d\beta}{d\alpha}(X-\alpha),$$

которое, какъ извѣстно, принадлежитъ касательной эволюты.

*

Докажемъ теперь свойство эволюты, относящееся къ ея спрямленію. Если изобразимъ чрезъ ρ радіусъ NM, то, по причинѣ $\overline{MN}^2=\overline{MR}^2+\overline{RN}^2$, получимъ

$$(5)\qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2;$$

мы написали разность $y-\beta$, а не сумму $y+\beta$ потому что β само по себѣ есть количество отрицательное. Изъ уравненій (3) выводимъ

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned} x-\alpha&=\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\cdot\frac{dy}{dx}\\ y-\beta&=-\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}};\end{aligned}\right.$$

подставляя эти величины въ формулу (5), получимъ

$$(7)\qquad \rho=\pm\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Вотъ выраженіе радіуса эволюты, или, что всё равно, радіуса кривизны разверзающей OMC въ точкѣ M. Если возьмемъ дифференціалъ уравн. (5) принимая всѣ величины за функціи перемѣнной x, то получимъ уравненіе

$$(x-\alpha)-(x-\alpha)\frac{d\alpha}{dx}+(y-\beta)\frac{dy}{dx}-(y-\beta)\frac{d\beta}{dx}=\rho\frac{d\rho}{dx},$$

которое, въ слѣдствіе перваго изъ уравненій (3), приметъ видъ

$$-(x-\alpha)\frac{d\alpha}{dx}-(y-\beta)\frac{d\beta}{dx}=\rho\frac{d\rho}{dx},$$

или, по раздѣленіи на $\frac{d\alpha}{dx}$

$$-(x-\alpha)-(y-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}=\rho\frac{d\rho}{d\alpha}.$$

Исключимъ теперь изъ этой формулы три величины $x-\alpha$, $y-\beta$ и ρ; для этого подставимъ въ уравненія (6) и (7) $-\frac{d\alpha}{d\beta}$ на мѣсто $\frac{dy}{dx}$; найдется

$$\frac{1+\frac{d\alpha^2}{d\beta^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\cdot\frac{d\alpha}{d\beta}+\frac{1+\frac{d\alpha^2}{d\beta^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\cdot\frac{d\beta}{d\alpha}=\pm\frac{\left(1+\frac{d\alpha^2}{d\beta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\cdot\frac{d\rho}{d\alpha},$$

или

$$\left(1+\frac{d\alpha^2}{d\beta^2}\right)\left(\frac{d\alpha}{d\beta}+\frac{d\beta}{d\alpha}\right)=\pm\left(1+\frac{d\alpha^2}{d\beta^2}\right)\sqrt{1+\frac{d\alpha^2}{d\beta^2}}\cdot\frac{d\rho}{d\alpha};$$

по сокращеніи, это уравненіе приметъ слѣдующій весьма простой видъ:

$$d\rho=\pm\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2}.$$

Изобразимъ теперь чрезъ σ дугу эволюты, считаемую отъ какой угодно ея точки, напримѣръ отъ A; по извѣстной формулѣ будетъ $d\sigma=\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2}$ (Смот. ARC); слѣдовательно

$$d\sigma=\pm d\rho.$$

Изъ этого равенства заключаемъ, что σ и ρ суть функціи такого свойства, что дифференціалы ихъ равны между собою; такого рода функціи, какъ извѣстно изъ начальныхъ основаній Дифференціальнаго Исчисленія, могутъ разниствовать одна отъ другой только постоянною величиною; изобразивъ ее чрезъ C, получимъ

$$\sigma=\pm\rho+C.$$

Пусть будетъ $\sigma=$дугѣ AN, $\rho=$радіусу NM. Если положимъ $\sigma'=$дугѣ $A\nu$, $\rho'=$радіусу $\nu\mu$, то подобнымъ образомъ найдется

$$\sigma'=\pm\rho'+C;$$

вычитя изъ этого уравненія предыдущее, получимъ

$$\sigma'-\sigma=\pm(\rho'-\rho).$$

Изъ этой формулы заключаемъ, что дуга эволюты $N\nu$ равна разности между радіусами $\nu\mu$ и NM, соотвѣтствующими крайнимъ точкамъ разсматриваемой дуги. Это примѣчательное свойство, по которому опредѣляется длина какой ни есть дуги кривой ANF, и называется *спрямленіемъ эволюты* (*rectification de la développée*).

Пусть, для примѣра, ищется длина дуги AN (черт. 12) кубической параболы второй степени. Изобразивъ эту дугу чрезъ s, найдемъ

$$s=\overline{NM}-\overline{AO}.$$

Для опредѣленія радіусовъ $\overline{NM}$ и $\overline{AO}$ употребляемъ выраженіе (7); такъ какъ разверзающая разсматриваемой эволюты есть обыкновенная парабола, опредѣляемая уравненіемъ $y^2=px$, то получимъ $\frac{dy}{dx}=\frac{p}{2y}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{p^2}{4y^3}$; слѣдовательно

$$\rho=\overline{NM}=\mp\frac{\left(1+\frac{p^2}{4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{p^2}{4y^3}}=\mp\frac{(p^2+4y^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}$$

$$=\mp\frac{(p+4x)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{p}}.$$

Чтобы получить радіусъ $\overline{AO}$, стоитъ только въ предыдущемъ выраженіи положить $x=0$; такимъ образомъ найдемъ

$$\overline{AO}=\mp\frac{p^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{p}},$$

и слѣдовательно, принявъ дугу s положительною,

$$s=\frac{1}{2\sqrt{p}}\left[(p+4x)^{\frac{3}{2}}-p^{\frac{3}{2}}\right].$$

Читатели найдутъ примѣры опредѣленія эволютъ въ другихъ мѣстахъ нашего Лексикона, и между прочимъ въ статьяхъ: CYCLOIDE, SPIRALE LOGARITHMIQUE.

Легко доказать, что всякая плоская кривая, сверхъ найденной плоской эволюты, имѣетъ безчисленное множество другихъ эволютъ двоякой кривизны. Дѣйствительно, пусть будетъ AB (черт. 13 Листъ VII) данная кривая линія, а CD плоская ея эволюта. Если изъ всѣхъ точекъ N, N', N'', N'''..... кривой CD проведемъ линіи NQ, $N'Q'$, $N''Q''$....., перпендикулярныя къ ея плоскости, то совокупность сихъ перпендикуляровъ образуетъ цилиндрическую поверхность; плоскость MNE, проходящая чрезъ нормаль MN кривой AB и перпендикуляръ NQ, очевидно будетъ перпендикулярна къ предложенной кривой AB. То же самое должно разумѣть и о плоскостяхъ $M'N'E'$, $M''N''E''$, $M'''N'''E'''$.... Теперь легко видѣть, что всякая точка, взятая на перпендикулярѣ NQ, напримѣръ точка E, будетъ равно удалена отъ всѣхъ точекъ элемента MM', принимаемаго за безконечно малую круговую дугу, описанную изъ центра N радіусомъ NM. Равнымъ образомъ, произвольная точка перпендикуляра $N'Q'$ будетъ равно удалена отъ всѣхъ точекъ безконечно малой круговой дуги $M'M''$, описанной изъ центра N' радіусомъ $N'M'$, и такъ далѣе. На этомъ основаніи заключаемъ, что точка E можетъ быть принимаема за одинъ изъ центровъ дуги MM', а линія EM за одинъ изъ радіусовъ кривизны кривой AB, соотвѣтствующій точкѣ M. Наименьшій изъ сихъ радіусовъ будетъ радіусъ NM, заключающійся въ плоскости данной кривой и ея плоской эволюты.

Цилиндрическая поверхность $NN'N''$... $QQ'Q''$..., заключающая въ себѣ плоскую эволюту $NN'N''N'''$...., будетъ, вмѣстѣ съ тѣмъ, геометрическимъ мѣстомъ безчисленнаго множества другихъ неплоскихъ эволютъ первоначальной кривой AB. Дѣйствительно, если вмѣсто цилиндрической поверхности будемъ разсматривать призму, состоящую изъ безконечнаго числа граней $NN'QQ'$, $N'N''Q'Q''$, $N''N'''Q''Q'''$,...., и возьмемъ на какомъ ни есть ребрѣ, напримѣръ на NQ, произвольную точку E, то продолживъ радіусъ ME до встрѣчи E' съ смежнымъ ребромъ $N'Q'$, и соединивъ потомъ точку E' съ M' получимъ двѣ новые смежные радіуса ME и $M'E'$; продолживъ $M'E'$ до встрѣчи съ ребромъ $N''Q''$, и такъ далѣе, составимъ косой многоугольникъ $EE'E''E'''$...., при разверзаніи котораго опишутся безконечно малыя дуги MM', $M'M''$ $M''M'''$,...., принимаемыя за круговыя. Легко понять, что если вытянемъ нить по направленію ME, и станемъ потомъ обвивать ею призму $NN'N''$... $QQ'Q''$..., то нить совмѣстится съ многоугольникомъ $EE'E''E'''$.... Вмѣсто точки E мы могли бы взять всякую другую точку на ребрѣ NQ, и получили бы другую эволюту. Отсюда слѣдуетъ, что всякая плоская кривая AB, сверхъ плоской эволюты CD, имѣетъ безчисленное множество эволютъ двоякой кривизны, которыя, при разверзаніи цилиндрической поверхности, ихъ заключающей, обращаются всѣ въ прямыя линіи.

Основываясь на такихъ же соображеніяхъ можно доказать различныя предложенія, относящіяся къ разверзанію кривыхъ двоякой кривизны. Если обогнемъ неплоскую кривую линію нитью, укрѣпленною однимъ концомъ къ какой нибудь точкѣ этой кривой, и станемъ потомъ разгибать нить, натягивая ее по направленію касательной, то другой конецъ нити опишетъ нѣкоторую кривую, называемую *разверзающею* первой, а первая, въ разсужденіи разверзающей, принимаетъ названіе *эволюты*. И въ этомъ случаѣ касательная къ эволютѣ будетъ нормальна къ разверзающей. Должно замѣтить, что всякая кривая двоякой кривизны имѣетъ безчисленное множество эволютъ; геометрическое мѣсто всѣхъ ихъ будетъ нѣкоторая поверхность, принадлежащая къ роду *линейчатыхъ*. Смот. RÉGLÉES (SURFACES). Для подробностей по сему предмету отсылаемъ читателей къ первой части сочиненія: *Leçons sur les applications du Calcul Infinitésimal à la Géométrie*; par A. L. Cauchy 1826.

Опредѣленіе развертывающей по данной эволютѣ составляетъ *обратную задачу эволютъ*. Для рѣшенія этого вопроса стоитъ только подставить въ уравн. (2) величины α и β, выведенныя изъ формулъ (6). Изобразивъ чрезъ y' и y'' дифференціальные коэффиціенты $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, получимъ

$$(8)\qquad \varphi\left(x-\frac{1+y'^2}{y''}\cdot y',\ y+\frac{1+y'^2}{y''}\right)=0.$$

Вотъ дифференціальное уравненіе развертывающей. Если, для краткости, удержимъ α и β, а функцію означимъ просто характеристикою φ, то взявъ дифференціалъ послѣдняго уравненія, найдемъ

$$(9)\qquad \frac{d\varphi}{d\alpha}\left[1-(1+y'^2)-y'\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)\right] + \frac{d\varphi}{d\beta}\left[y'+\frac{d}{dx}\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)\right]=0,$$

или, по сокращеніи,

$$\left[y'+\frac{d}{dx}\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)\right]\left(\frac{d\varphi}{d\beta}-y'\frac{d\varphi}{d\alpha}\right)=0.$$

И такъ, должно быть

$$y'+\frac{d}{dx}\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)=0 \quad \text{или} \quad \frac{d\varphi}{d\beta}-y'\frac{d\varphi}{d\alpha}=0.$$

Первое изъ сихъ двухъ уравненій, не заключающее въ себѣ функціи φ, приводитъ сперва къ интегралу

$$y+\frac{1+y'^2}{y''}=C,$$

потомъ къ уравненію

$$(y-C)y'+x-C'=0,$$

изъ котораго выводимъ

$$(x-C')^2+(y-C)^2=C''^2,$$

разумѣя подъ C, C' и C'' постоянныя количества. Найденное уравненіе очевидно принадлежитъ кругу кривизны, ибо $C=\beta$, $C'=\alpha$, $C''=\rho$ [Смот. уравн. (5), а также статью OSCULATEUR (CERCLE)].

Что касается до уравненія

$$(10)\qquad \frac{d\varphi}{d\beta}-y'\frac{d\varphi}{d\alpha}=0,$$

то оно изображаетъ *частное рѣшеніе* (*solution particulière*) уравненія (9). Если изъ уравненій (8) и (10) исключимъ отношеніе $\frac{1+y'^2}{y''}$, то получимъ дифференціальное уравненіе 1-го порядка относительно перемѣнныхъ x, y, и оно будетъ принадлежать искомой развертывающей. Постоянное количество, входящее въ интегралъ этого уравненія, будетъ зависѣть отъ положенія точки O (черт. 12), которое опредѣляется длиною конца нити AO.

Легко усмотрѣть, что вмѣсто уравненій (8) и (10), можно прямо употребить слѣдующія три формулы:

$$\varphi(\alpha,\beta)=0$$

$$(x-\alpha)+\frac{dy}{dx}(y-\beta)=0$$

$$\frac{d\varphi(\alpha,\beta)}{d\beta}-\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d\varphi(\alpha,\beta)}{d\alpha}=0;$$

исключеніе величинъ α и β изъ этихъ уравненій приведетъ къ тому же дифференціальному уравненію развертывающей.

Здѣсь мѣсто упомянуть также о нѣкоторыхъ кривыхъ, принадлежащихъ къ роду эволютъ, и разсматриваніемъ которыхъ занимался *Яковъ Бернулли* (Acta Eruditorum за 1692 годъ). Положимъ, что какая ни есть кривая $CM4$ (черт. 14 Листъ VII) катится по равной ей кривой $OM3$. При такомъ движеніи точка A, произвольно взятая въ плоскости *производящей кривой* $CM4$, опишетъ кривую $EA6$, которую, по ея сродству съ циклоидою, Бернулли называетъ *циклоидальною*. Кривую же $OM3$, по которой катится производящая, онъ называетъ *основною* (*exposita*). Кривая $OB1$, развертываніемъ которой описывается основная $OB3$, именуется *эволютою* сей послѣдней. Она, какъ мы уже видѣли выше, будетъ геометрическимъ мѣстомъ центровъ соприкасающихся круговъ основной кривой. И такъ, прямая MB изображаетъ радіусъ кривизны кривой $OM3$, соотвѣтствующій точкѣ M. Далѣе, Бернулли употребляетъ слѣдующія наименованія: онъ называетъ *зажигательною изъ точки* O (*caustica ex puncto O*) кривую $OI2$, образуемую послѣдовательными пересѣченіями отраженныхъ отъ основной кривой по направленію MI лучей OM, исходящихъ изъ какой либо точки O, а *противо-зажигательною* (*anti-caustica*), геометрическое мѣсто точекъ, которыя получатся когда продолжимъ направленіе отраженнаго луча IM, до A, и возьмемъ $MA=MO$; и такъ, на чертежѣ 14, противо-зажигательная есть кривая $EA6$. Если же падающій на основную $OM3$ лучъ OM будетъ продолженъ до i, такъ что $Mi=MI$, то точка i будетъ принадлежать кривой $Di5$ именуемой *пере-зажигательною* (*peri-caustica*).

Наконецъ, если продолжимъ радіусъ кривизны BM до b, такъ чтобы $BM = Mb$, то точка b будетъ принадлежать кривой $Fb7$, которая названа Бернулліемъ *противо-эволютою* (*anti-evoluta*, *anti-développée*).

Бернулли, разсматривая *противо-зажигательную, пере-зажигательную* и *противо-эволюту* какъ линіи оптическія, приписывалъ имъ слѣдующія значенія: первая изъ нихъ опредѣляетъ мѣсто изображенія A свѣтящейся точки O, усматриваемой изъ точки I зажигательной $OI2$ чрезъ отраженіе; вторая есть изображеніе цѣлой зажигательной въ зеркалѣ $OM3$, видимое изъ точки O; наконецъ, третья есть мѣсто изображенія глаза, видящаго себя изъ эволюты въ зеркалѣ $OM3$.

Бернулли, занимаясь изслѣдованіемъ сихъ кривыхъ, вывелъ многія любопытныя ихъ свойства; одно изъ примѣчательнѣйшихъ относится къ *логариѳмической спирали*: онъ доказалъ, что эта кривая тождественна съ своею эволютою, зажигательною, противо-эволютою и пере-зажигательною. Это свойство показалось особенно изящнымъ и удивительнымъ Якову Бернулли; припоминая обычай временъ Архимедовыхъ, онъ сожалѣлъ, что не могъ завѣщать чтобъ на его гробницѣ вырѣзали логариѳмическую спираль съ надписью: *eadem mutata resurgo* (*измѣнившись, возрождаюсь всегда въ одномъ видѣ*).

Окончимъ эту статью указаніемъ на одно весьма примѣчательное свойство послѣдовательныхъ плоскихъ эволютъ. Если на какой ни есть кривой линіи возьмемъ дугу, ограниченную двумя касательными, взаимно перпендикулярными, и построимъ плоскую эволюту этой дуги, потомъ эволюту первой найденной эволюты, и такъ далѣе, то видъ послѣдовательныхъ эволютъ будетъ стремиться къ *циклоидальному*, и если бы возможно было продолжить это дѣйствіе въ безконечность, то послѣдняя эволюта была бы, въ строгомъ смыслѣ, *обыкновенная циклоида*. Сія теорема принадлежитъ *Ивану Бернулли* (Смот. Jo. Bernoulli opera, том. IV). Читатели найдутъ Эйлерово доказательство этого предложенія въ X томѣ *Novi Comment. Acad. Petrop.*, и еще другія доказательства въ *Exercices de Calcul Intégral*, соч. Лежандра.

Développée imparfaite. Несовершенная эволюта. Такъ назвалъ *Фонтенель* нѣкоторый родъ эволютъ, которыя разсматривалъ математикъ *Реомюръ* въ *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, 1709 г.

Если предположимъ, что чрезъ безконечно близкія точки m, m', m'', m''',..... кривой AB (черт. 15 Листъ VII) проведены линіи r, r', r'', r'''....., составляющія съ касательными rt, $r't'$, $r''t''$, $r'''t'''$,..... углы постоянные, но только не прямые какъ въ обыкновенной эволютѣ, то геометрическое мѣсто CD точекъ пересѣченія n, n', n'',.... каждыхъ двухъ смежныхъ радіусовъ r и r', r' и r'', r'' и r''',..... будетъ изображать *несовершенную эволюту* предложенной кривой AB.

Ланкре (*Lancret*), во второмъ томѣ изданія: *Mémoires présentés à l'Institut par divers savans*, 1811 г. предлагаетъ разныя изслѣдованія объ несовершенныхъ эволютахъ, которыя онъ называетъ *développoides*. Читатели найдутъ въ его Разсужденіи многія любопытныя замѣчанія какъ объ самыхъ кривыхъ этого рода, такъ и о поверхностяхъ, на которыхъ онѣ могутъ быть начерчены.

DÉVELOPPEMENT. (Геом.) **РАЗВЕРТЫВАНІЕ, РАЗВЕРЗАНІЕ.** Дѣйствіе, посредствомъ котораго развертываютъ кривую линію или поверхность. Смот. DÉVELOPPÉE, DÉVELOPPABLE (SURFACE). — Въ Начальной Геометріи, а также и въ Начертательной, подъ этимъ словомъ разумѣютъ плоскую фигуру, представляющую развернутую поверхность какого нибудь тѣла. Таковы напримѣръ фигуры $ABCDEF$ (черт. 16 Листъ VII) и $ABCDE$ (черт. 17 Листъ VII); первая изображаетъ разверзаніе *четыреграника*, а вторая, половину правильнаго *двѣнадцатиграника*.

DÉVELOPPEMENT. (Алг.) **РАЗЛОЖЕНІЕ, РАЗВЕРТЫВАНІЕ, РАСКРЫТІЕ. — РЯДЪ, СТРОКА.** Такъ называютъ дѣйствіе, посредствомъ котораго выражаютъ какую нибудь функцію конечною или безконечною строкою. *Développement d'une fraction, d'un radical, d'une fonction trigonométrique en série*; *разложеніе дроби, радикала, тригонометрической функціи въ строку, въ рядъ.* — Самая строка часто называется также *разложеніемъ*. — *Développement d'un calcul*; *подробности вычисленія, выкладки*.

DÉVELOPPEMENT (MÉTHODE DE). Смот. CULTÉLLATION.

DÉVELOPPER. (Анал. и Геом.) **РАЗЛОЖИТЬ, РАЗВЕРНУТЬ, РАЗВИТЬ, РАСКРЫТЬ.** Смот. DÉVELOPPEMENT. *Développer un logarithme en série*; *разложить логариѳмъ въ рядъ*. *Développer un cône, un cylindre*; *развернуть конусъ, цилиндръ*. *Développer un calcul*; *произвести вычисленіе со всѣми подробностями*.

DÉVELOPPOIDE. Смот. DÉVELOPPÉE IMPARFAITE.

DÉVERSOIR или **REVERSOIR.** (Гидрав.) **ВОДОСЛИВЪ.** *Водосливами* называются каменныя плотины, служащія для скопленія проточной воды и для удержанія ея на извѣстномъ горизонтѣ.

DÉVIATION. (Мех.) **УКЛОНЕНІЕ.** *Déviation du fil à-plomb*; *уклоненіе отвѣса отъ вертикальнаго направленія*. Смот. ATTRACTION DES MONTAGNES. *Déviation ou inflexion de la lumière*; *уклоненіе свѣта*. Смот. LUMIÈRE.

DÉVIATION или **NUTATION.** (Астр.) **КОЛЕБАНІЕ.** Смот. NUTATION.

DI.

DIABÈTE или **TANTALE. ДІАБЕТЪ, ТАНТАЛЪ, ГИДРАВЛИЧЕСКАЯ РЮМКА.** Чертежъ 1 (Листъ VIII) представляетъ гидравлическую рюмку; внутри этого сосуда находится согнутая стеклянная трубка, состоящая изъ двухъ вѣтвей ab и bc съ открытыми концами. Короткая вѣтвь ab почти примыкаетъ ко дну EF, а длинная проходитъ сквозь всю длину ножки $EFCD$, и оканчивается при основаніи CD сосуда. При такомъ устроеніи, если нальемъ воды въ сосудъ $ABEF$ до нѣкотораго уровня, не достигающаго высоты LK согнутой части сифона, то вода останется въ сосудѣ; но какъ скоро уровень воды достигнетъ высоты LK, то вода начнетъ вытекать изъ сосуда чрезъ сифонъ abc, и вытечетъ вся. Изобрѣтеніе гидростатической рюмки приписываютъ *Герону Александрійскому*, который и назвалъ ее *діабетомъ*. Этотъ сосудъ называютъ также иногда *танталомъ* потому что его прежде дѣлали съ изображеніемъ тантала, нагибающагося для утоленія своей жажды: вода подымалась въ сосудѣ, и едва доходила до губъ фигурки, какъ начинала опускаться, и вся вытекала.

DIACAUSTIQUE. (Опт.) **ДІАКОСТИКА.** *Surface, courbe diacaustique* или *caustique par réfraction*; *діакостическая поверхность, линія*; *зажигательная чрезъ преломленіе*. Вотъ образованіе діакостической кривой:

Вообразимъ безконечное число лучей, исходящихъ изъ свѣтящейся точки O (черт. 2 Листъ VIII), и падающихъ въ точкахъ m, m', m'', ... на данную кривую $Lmm'm''M$. Положимъ, что эти лучи преломляются приближаясь или удаляясь отъ нормали къ кривой, и притомъ такъ, что отношеніе синуса угла паденія къ синусу угла преломленія остается постояннымъ. Напримѣръ, если допустимъ что лучъ OA, падающій въ точкѣ m на предложенную кривую, пойдетъ по направленію mn, составляя уголъ $Bmn=\varphi'$ съ нормалью mB, то синусъ угла паденія $BmA=\varphi$ долженъ относиться къ синусу угла преломленія Bmn, какъ данное число k, къ данному же h. Однимъ словомъ, для каждой точки разсматриваемой кривой должно быть $\frac{Sin\varphi}{Sin\varphi'}=\lambda$, разумѣя подъ λ величину постоянную. Кривая $Inn'n''K$, образуемая послѣдовательными пересѣченіями преломленныхъ лучей mn, $m'n'$, $m''n''$,..... называется *діакостикою* или *костическою кривою чрезъ преломленіе*.

На этомъ основаніи, и соображаясь съ тѣмъ, что сказано въ статьѣ CAUSTIQUE (Смот.), легко будетъ вывести уравненіе діакостики для какой ни есть кривой линіи.

DIACENTROS. (Астр.) Такъ назвалъ *Кеплеръ мѣньшую ось*, или, что все равно, *кратчайшій діаметръ* эллиптической планетной орбиты. Это наименованіе совсѣмъ вышло изъ употребленія.

DIACOUSTIQUE или **DIAPHONIQUE. ДІАКУСТИКА** или **ДІАФОНИКА.** Часть Акустики, имѣющая предметомъ явленія, сопровождающія переходъ звуковъ изъ рѣдчайшихъ срединъ въ плотнѣйшія, или наоборотъ; и такъ, Діакустика занимается теоріею преломленныхъ звуковъ.

DIAGONALE. (Геом.) **ДІАГОНАЛЬ, ДІАГОНАЛЬНАЯ ЛИНІЯ.** Такъ называется прямая, соединяющая вершины двухъ не смежныхъ угловъ въ какой ни есть прямолинейной фигурѣ или въ многогранникѣ. Таковы линіи $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$ (черт. 3 Листъ VIII) въ пятиугольникѣ *ABCDE* и линія $\overline{OO'}$ въ параллелопипедѣ *LM*. — Нѣкоторые авторы называли также діагональ *діаметромъ* или *діаметраломъ фигуры* (*diamètre* или *diamètral de la figure*). Эти наименованія вышли теперь изъ употребленія.

DIAGONALEMENT. ДІАГОНАЛЬНО, ПО ДІАГОНАЛИ. По направленію діагонали.

DIAGRAMME. Не упот. **ЧЕРТЕЖЪ, ФИГУРА, НАЧЕРТАНІЕ, ПОСТРОЕНІЕ.** Смот. FIGURE.

DIALYTIQUE (LUNETTE). (Опт.) **ДІАЛИТИЧЕСКАЯ ТРУБА.** Предметное стекло астрономическихъ, такъ называемыхъ *ахроматическихъ* трубъ, составлено изъ двухъ, разнородныхъ по составу своему стеколъ, извѣстныхъ подъ названіями *флинтъ-гласса* и *кроунъ-гласса*. Приготовленіе такихъ стеколъ большаго размѣра, совершенно прозрачныхъ, безъ полосъ или струй и безъ пузырьковъ, сопряжено съ большими затрудненіями, въ особенности же флинтъгласса, который, по причинѣ заключающейся въ немъ примѣси свинца, рѣдко можетъ быть полученъ въ однородной массѣ. Этотъ недостатокъ, а съ другой стороны и малое различіе упомянутыхъ стеколъ въ отношеніи къ разности преломленія лучей краснаго и фіолетоваго, — ибо найдено, что эти разности преломленія въ кроунъ-глассѣ и флинтъ-глассѣ содержатся почти какъ 1,5 къ 1,6, — побудилъ оптиковъ помыслить о составленіи другаго рода стеколъ, которыя бы удобнѣе приготовлялись, и, сверхъ того, имѣли бы бо̀льшую разность относительно преломленія крайнихъ лучей. Предположивъ стекла весьма отличными отъ прежнихъ въ разсужденіи упомянутой разности преломленія лучей краснаго и фіолетоваго, нашли, посредствомъ аналитическихъ вычисленій, что двѣ чечевицы, изъ которыхъ составляется предметное стекло, не должны находиться въ соприкосновеніи, но въ довольно значительномъ разстояніи одна отъ другой, такъ что, при благопріятныхъ обстоятельствахъ, вторая чечевица должна находиться почти въ серединѣ телескопа. По причинѣ разъединенія двухъ чечевицъ, зрительныя трубы, устроенныя по этому способу, называются *діалитическими* (отъ Греческ. *διά* и *λύω*, *разлагаю*).

Вѣнскій оптикъ *Плессель* приготовилъ много такихъ телескоповъ; они, по свидѣтельству знатоковъ, оказались весьма удовлетворительными, и превзошли *Доллондовы* ахроматическія трубы, одинаковаго съ ними размѣра.

DIAMÉTRAL D'UNE FIGURE. Смот. DIAGONALE.

DIAMÉTRAL. (Геом.) **ДІАМЕТРАЛЬНЫЙ, ПОПЕРЕЧНЫЙ.** *Section diamétrale*; *діаметральное, поперечное сѣченіе. Plan diametral*; *діаметральная плоскость.* Плоскость, проходящая чрезъ центръ кривой поверхности. — Въ болѣе тѣсномъ смыслѣ плоскость, раздѣляющая пополамъ систему параллельныхъ хордъ; когда діаметральная плоскость пересѣкаетъ свою систему параллельныхъ хордъ подъ прямымъ угломъ, то она называется *главною* (*plan diamétral principal*).

PLANS DIAMÉTRAUX CONJUGUÉS. СОПРЯЖЕННЫЯ ДІАМЕТРАЛЬНЫЯ ПЛОСКОСТИ. Три плоскости называются *сопряженными діаметральными* относительно кривой поверхности, когда каждая изъ нихъ раздѣляетъ пополамъ систему хордъ, параллельныхъ пересѣченію двухъ остальныхъ плоскостей. Сказанное въ статьѣ DIAMÈTRES CONJUGUÉS легко можетъ быть распространено и на сопряженныя діаметральныя плоскости.

SURFACE DIAMÉTRALE. ДІАМЕТРАЛЬНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ. Геометрическое мѣсто срединъ всѣхъ параллельныхъ хордъ разсматриваемой поверхности. Когда геометрическое мѣсто, о которомъ говоримъ, обращается въ *плоскость*, то сія послѣдняя принимаетъ названіе *діаметральной*.

DIAMÉTRAL (NOMBRE). (Ариѳ.) Не упот. **ДІАМЕТРАЛЬНОЕ ЧИСЛО.** Произведеніе такихъ двухъ множителей цѣлыхъ, коихъ квадраты, сложенные вмѣстѣ, даютъ также квадратное число. Напримѣръ $3 \times 4 = 12$, $5 \times 12 = 60$ суть *діаметральныя числа*, ибо $3^2 + 4^2 = 5^2$, $5^2 + 12^2 = 13^2$. Легко доказать, что такого рода чиселъ существуетъ безчисленное множество. Смот. DIOPHANTE (PROBLÊMES DE).

DIAMÉTRALEMENT. ДІАМЕТРАЛЬНО, ПОПЕРЕЧНО. *Diamétralement opposé*; *прямо-противоположно.*

DIAMÈTRE. (Геом.) Отъ Греческ. *διά*, *поперегъ* и *μετρον*, *мѣра*. **ДІАМЕТРЪ, ПОПЕРЕЧНИКЪ.** Такъ называютъ въ Начальной Геометріи прямую линію, проходящую чрезъ центръ круга, и ограниченную съ двухъ сторонъ его окружностію. *Rapport du diamètre à la circonférence*; *отношеніе діаметра къ окружности.* Смот. CIRCONFÉRENCE. — Вообще, *діаметромъ* какой ни есть кривой линіи или поверхности называется прямая, проходящая чрезъ центръ сей кривой или поверхности. Смот. CENTRE. Подъ *діаметромъ* разумѣютъ также опредѣленную длину прямой, проведенной чрезъ центръ и ограниченной съ обѣихъ сторонъ очертаніемъ кривой линіи. — Въ болѣе тѣсномъ значеніи, *діаметромъ* называютъ прямую, ограниченную съ обѣихъ сторонъ очертаніемъ кривой, и раздѣляющую пополамъ систему параллельныхъ хордъ той самой кривой. Въ этомъ смыслѣ, многія кривыя, не имѣющія центра, могутъ имѣть не только одинъ, но и безконечное число діаметровъ, какъ напримѣръ *парабола*. Когда діаметръ перпендикуляренъ къ хордамъ, которыя раздѣляетъ пополамъ, то онъ принимаетъ названіе *главной діаметральной оси*, или, просто *оси*. Смот. AXE.

DIAMÈTRE D'UNE SPHÈRE. ДІАМЕТРЪ, ПОПЕРЕЧНИКЪ ШАРА. Прямая, проходящая чрезъ центръ шара, и ограниченная съ обѣихъ сторонъ ея поверхностію.

DIAMÈTRES CONJUGUÉS. СОПРЯЖЕННЫЕ ДІАМЕТРЫ. Два діаметра плоской кривой называются *сопряженными*, когда каждый изъ нихъ раздѣляетъ пополамъ систему хордъ, параллельныхъ другому діаметру. Изъ этого опредѣленія легко усмотрѣть, что если примемъ два сопряженные діаметра за координатныя оси, и отнесемъ къ симъ осямъ разсматриваемую кривую, то ея уравненіе будетъ заключать въ себѣ только *чётныя* степени координатъ. Дѣйствительно, изъ опредѣленія сопряженныхъ діаметровъ слѣдуетъ, что каждой абсциссѣ соотвѣтствуютъ двѣ ординаты равныя, но съ противными знаками, почему уравненіе кривой и должно быть чётной степени въ отношеніи къ ординатѣ; то же самое можно сказать и объ абсциссѣ. Слѣдовательно, если изобразимъ чрезъ x' и y' перемѣнныя координаты разсматриваемой кривой, отнесенной къ системѣ двухъ сопряженныхъ діаметровъ, то ея уравненіе будетъ вида $f(x'^2 . y'^2) = 0$.

Для объясненія сказаннаго здѣсь о сопряженныхъ діаметрахъ, разсмотримъ ихъ въ *коническихъ сѣченіяхъ*.

Начнемъ съ *эллипса*. Прежде всего замѣтимъ, что всѣ діаметры этой кривой пересѣкаются въ центрѣ; слѣдовательно, для опредѣленія всѣхъ системъ сопряженныхъ діаметровъ эллипса, должно разсмотрѣть общее его уравненіе относительно косоугольныхъ осей, принимая центръ за начало координатъ.

Принявъ центръ эллипса за начало координатъ, а оси этой кривой за координатныя, получимъ уравненіе

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

въ которомъ a и b изображаютъ полу-оси эллипса, а x и y прямоугольныя его координаты. Чтобъ измѣнить направленіе координатныхъ осей, не измѣняя начала, стоитъ только положить

$$x = x' \operatorname{Cos} \alpha + y' \operatorname{Cos} \beta,$$
$$y = x' \operatorname{Sin} \alpha + y' \operatorname{Sin} \beta,$$

разумѣя подъ x' и y' новую систему координатъ, а подъ α и β углы, составляемые новыми осями x'-овъ и y'-овъ со старою осью абсциссъ; Смот. TRANSFORMATION DES COORDONNÉES. Подставляя предъидущія величины x и y въ уравн. (1), получимъ

$$(a^2 \operatorname{Sin}^2 \beta + b^2 \operatorname{Cos}^2 \beta) y'^2 + (a^2 \operatorname{Sin}^2 \alpha + b^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha) x'^2$$
$$+ 2 (a^2 \operatorname{Sin} \alpha . \operatorname{Sin} \beta + b^2 \operatorname{Cos} \alpha . \operatorname{Cos} \beta) x'y' = a^2 b^2.$$

Чтобы система координатныхъ осей совпадала съ системою сопряженныхъ діаметровъ, преобразованное уравненіе должно быть чётной степени, и слѣдовательно, оно не должно заключать въ себѣ члена $x'y'$; и такъ

(2) $a^2 Sin\alpha . Sin\beta + b^2 Cos\alpha . Cos\beta = 0$,

въ слѣдствіе чего получимъ

(3) $\frac{a^2 Sin^2\alpha + b^2 Cos^2\alpha}{a^2 b^2} x'^2 + \frac{a^2 Sin^2\beta + b^2 Cos^2\beta}{a^2 b^2} y'^2 = 1.$

Уравненіе (2), изъ котораго выводимъ

(4) $tang\alpha . tang\beta = -\frac{b^2}{a^2}$

показываетъ, что для всякаго эллипса существуетъ безчисленное множество косоугольныхъ системъ сопряженныхъ діаметровъ. И дѣйствительно, давая какое угодно направленіе одному діаметру, то есть выбравъ по произволенію уголъ α, направленіе другаго діаметра найдется уже изъ уравненія (4), которое опредѣляетъ уголъ β. Легко видѣть, что эллипсъ имѣетъ только одну систему прямоугольныхъ сопряженныхъ діаметровъ, а именно, систему своихъ осей; въ самомъ дѣлѣ, чтобы оси x'-овъ и y'-овъ пересѣкались подъ прямымъ угломъ, должно быть $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$, откуда $Sin\beta = + Cos\alpha$ и $Cos\beta = - Sin\alpha$; подставляя эти величины въ уравн. (2), получимъ

$$(a^2 - b^2) Sin\alpha . Cos\alpha = 0.$$

Чтобы удовлетворить этому уравненію, должно положить $Sin\alpha = 0$ или $Cos\alpha = 0$; первое предположеніе доставляетъ $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$, а второе $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha = -\frac{3\pi}{2}$. Въ обоихъ случаяхъ сопряженные діаметры совмѣщаются съ осями эллипса.

Уравненіе $(a^2 - b^2) Sin\alpha . Cos\alpha = 0$ удовлетворяется независимо отъ угла α, когда $b = a$, то есть, когда эллипсъ обращается въ кругъ. Слѣдовательно, кругъ допускаетъ безчисленное множество системъ прямоугольныхъ сопряженныхъ діаметровъ, что и очевидно.

Уравненіе (4) показываетъ, что два діаметра, соотвѣтственно параллельные двумъ дополнительнымъ хордамъ въ эллипсѣ, будутъ *сопряженные* между собою, и что два какіе ни есть сопряженные діаметра соотвѣтственно параллельны двумъ дополнительнымъ хордамъ. На этомъ свойствѣ основанъ способъ для проведенія касательной къ эллипсу. Смот. CORDES SUPLÉMENTAIRES.

Выведемъ изъ уравн. (3) величины сопряженныхъ діаметровъ; если положимъ въ немъ послѣдовательно $y' = 0$, $x' = 0$, то получимъ разстоянія центра эллипса отъ точекъ, въ которыхъ кривая пересѣчется направленіями сопряженныхъ діаметровъ. Изобразивъ эти разстоянія, то есть полу-діаметры, чрезъ a' и b', найдемъ формулы

(5) $a'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 Sin^2\alpha + b^2 Cos^2\alpha}$, $b'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 Sin^2\beta + b^2 Cos^2\beta}$,

въ слѣдствіе которыхъ уравн. (3) приметъ видъ

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1.$$

Параметромъ діаметра $2a'$ (*paramètre du diamètre* $2a'$) называется третья пропорціональная къ этому діаметру и его сопряженному; и такъ $\frac{2b'^2}{a'}$ и $\frac{2a'^2}{b'}$ изображаютъ соотвѣтственно параметры діаметровъ $2a'$ и $2b'$.

Если перемножимъ между собою уравненія (5), то получимъ

$$a'^2 b'^2 = \frac{a^4 b^4}{a^4 Sin^2\alpha . Sin^2\beta + a^2 b^2 (Sin^2\alpha . Cos^2\beta + Cos^2\alpha . Sin^2\beta) + b^4 Cos^2\alpha . Cos^2\beta};$$

знаменатель этой дроби можетъ быть изображенъ суммою двухъ членовъ

$$(a^2 Sin\alpha . Sin\beta + b^2 Cos\alpha . Cos\beta)^2 + a^2 b^2 Sin^2(\beta - \alpha),$$

изъ которыхъ первый, въ силу уравн. (2), равенъ нулю. Слѣдовательно

(6) $a'^2 b'^2 = \frac{a^2 b^2}{Sin^2(\beta - \alpha)}$ или $ab = a'b' Sin(\beta - \alpha)$.

Послѣдняя формула показываетъ, что *площадь параллелограмма, построеннаго на двухъ сопряженныхъ діаметрахъ эллипса, равна прямоугольнику, составленному на осяхъ этой кривой.*

Уравненія (4) и (5) могутъ быть написаны въ видѣ

$$a^2 tang\alpha . tang\beta + b^2 = 0$$

$$a'^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + tang^2\alpha)}{a^2 tang^2\alpha + b^2}$$

$$b'^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + tang^2\ )}{a^2 tang^2\beta + b^2};$$

исключая изъ сихъ уравненій $tang\alpha$ и $tang\beta$, получимъ формулу

(7) $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$,

которая показываетъ, что *сумма квадратовъ двухъ сопряженныхъ діаметровъ эллипса, равна суммѣ квадратовъ двухъ осей этой кривой.*

Уравненія (4), (6) и (7), разсматриваемыя въ совокупности, опредѣляютъ три какія ни есть изъ шести величинъ a, b, a', b', α, β, когда три остальныя извѣстны.

*

Перейдемъ теперь къ сопряженнымъ діаметрамъ *иперболы*. Если отнесемъ эту кривую къ ея осямъ принявъ центръ за начало координатъ, то получимъ уравненіе

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

гдѣ x и y изображаютъ прямоугольныя координаты, а a и b полу-оси; очевидно, что выведенныя формулы для сопряженныхъ діаметровъ эллипса, будутъ приличествовать и сопряженнымъ діаметрамъ иперболы, лишь бы только замѣнили въ нихъ b и b' мнимыми выраженіями $b\sqrt{-1}$ и $b'\sqrt{-1}$, а b^2 и b'^2, величинами $-b^2$ и $-b'^2$, ибо уравненіе иперболы различествуетъ отъ уравненія эллипса только знакомъ передъ b^2. И такъ, для иперболы, формулы (4), (6) и (7), примутъ видъ

$$tang\,\alpha . tang\,\beta=\frac{b^2}{a^2}$$

$$ab=a'b'Sin(\beta-\alpha)$$

$$a'^2-b'^2=a^2-b^2.$$

Первое изъ сихъ уравненій показываетъ, что можно провести чрезъ крайнія точки оси $2a$ двѣ дополнительныя хорды, соотвѣтственно параллельныя двумъ какимъ ни есть сопряженнымъ діаметрамъ иперболы. Смот. CORDES SUPLÉMENTAIRES.

Изъ втораго уравненія усматриваемъ, что *параллелограммъ, построенный на двухъ сопряженныхъ діаметрахъ иперболы, равенъ прямоугольнику, построенному на ея осяхъ.*

Наконецъ, третье уравненіе показываетъ, что *разность квадратовъ, построенныхъ на сопряженныхъ діаметрахъ, равна разности квадратовъ, построенныхъ на осяхъ иперболы.* Изъ той же формулы видимъ, что одна равносторонняя ипербола имѣетъ равные сопряженные діаметры, ибо положивъ $b'=a'$ найдется $b=a$, и наоборотъ.

Легко видѣть что *парабола* не имѣетъ ни одной системы сопряженныхъ діаметровъ; и въ самомъ дѣлѣ, уравненіе этой кривой ни въ какомъ случаѣ не можетъ заключать въ себѣ только квадраты координатъ съ постояннымъ членомъ, что составляетъ необходимое условіе для существованія сопряженныхъ діаметровъ въ кривыхъ втораго порядка. Но можно предложить себѣ вопросъ, найти такія системы косоугольныхъ координатныхъ осей, относительно которыхъ уравненіе параболы будетъ заключать въ себѣ только квадратъ одной изъ координатъ, напримѣръ, квадратъ ординаты. Въ такомъ предположеніи новая ось абсциссъ очевидно будетъ діаметромъ этой кривой, ибо она раздѣляетъ пополамъ систему хордъ, параллельныхъ новой оси ординатъ.

И такъ, возьмемъ уравненіе

$$(8)\qquad y^2=px,$$

принадлежащее параболѣ, отнесенной къ прямоугольнымъ осямъ, пересѣкающимся въ ея вершинѣ; здѣсь предполагается, что ось x-овъ совпадаетъ съ осью параболы, коей параметръ изображенъ чрезъ p.

Для измѣненія системы координатныхъ осей, должно положить

$$x=x'Cos\,\alpha+y'Cos\,\beta+a$$

$$y=x'Sin\,\alpha+y'Sin\,\beta+b,$$

гдѣ α, β, x', y' имѣютъ прежнія значенія, а a и b изображаютъ координаты новаго начала. Подставивъ эти величины x и y въ уравн. (8) получимъ

$$(9)\ \begin{cases} y'^2Sin^2\beta+2x'y'Sin\,\alpha.Sin\,\beta+x'^2Sin^2\alpha \\ +(2bSin\,\beta-pCos\,\beta)y'+(2bSin\,\alpha-pCos\,\alpha)x'+b^2-pa=0. \end{cases}$$

Чтобы это уравненіе не заключало въ себѣ первой степени ординаты y', надобно положить

$$(10)\qquad Sin\,\alpha.Sin\,\beta=0 \text{ и } 2bSin\,\beta-pCos\,\beta=0;$$

изъ втораго уравненія выводимъ $tang\,\beta=\frac{p}{2b}$; слѣдовательно $tang\,\beta$, а равно и $Sin\,\beta=\frac{tang\,\beta}{\sqrt{1+tang^2\beta}}$ $=\frac{p}{\sqrt{p^2+4b^2}}$, не могутъ обратиться въ нуль, ибо ордината b не должна быть безконечною. И такъ, первое изъ уравненій (10) доставитъ $Sin\,\alpha=0$, откуда $\alpha=0$ или $\alpha=\pi$, а это показываетъ, что новая ось абсциссъ параллельна старой, то есть, параллельна самой оси параболы.

На этомъ основаніи уравненіе (9) приметъ видъ

$$y'^2Sin^2\beta-px'+b^2-pa=0$$

или, по причинѣ $Sin^2\beta=\frac{p^2}{p^2+4b^2}$,

$$(11)\quad y'^2=\frac{p^2+4b^2}{p}\cdot x'-\frac{p^2+4b^2}{p^2}(b^2-pa).$$

Выведенное выше выраженіе $tang\ \varphi = \frac{p}{2b}$ опредѣляетъ направленіе новой оси ординатъ; но $\frac{p}{2b}$ изображаетъ тригонометрическій тангенсъ угла, составляемаго касательною въ точкѣ параболы, которая опредѣляется ординатою b; слѣдовательно, для опредѣленія новыхъ осей, беремъ въ плоскости параболы произвольную точку O, и проводимъ чрезъ нее линію, параллельную оси параболы; эта линія будетъ новая ось абсциссъ. Если продолжимъ новую ось абсциссъ до ея пересѣченія M съ параболою, а чрезъ точку M проведемъ касательную, то линія, проходящая чрезъ новое начало O, и параллельная касательной, изобразитъ новую ось ординатъ. По свойству сихъ новыхъ координатныхъ осей, всѣ хорды параболы, параллельныя оси ординатъ, будутъ раздѣлены пополамъ осью абсциссъ.

Уравненіе (11) приметъ весьма простой видъ, когда возьмемъ новое начало координатъ на самой параболѣ; дѣйствительно, въ этомъ предположеніи $b^2 = pa$, и слѣдовательно

$$y'^2 = p'x'$$

гдѣ для краткости положили $\frac{p^2+4b^2}{p} = p'$. Замѣтимъ, что это уравненіе одинаковаго вида съ уравн. (8). Легко доказать, что параметръ p' параболы, отнесенной къ разсматриваемой системѣ координатъ, равенъ учетверенному разстоянію фокуса отъ новаго начала. И дѣйствительно, по причинѣ $b^2 = pa$, находимъ

$$p' = p + \frac{4b^2}{p} = p + 4a = 4\left(a + \frac{p}{4}\right);$$

но $a + \frac{p}{4}$ изображаетъ разстояніе фокуса отъ точки параболы, опредѣляемой координатами a и b, ибо это разстояніе выражается радикаломъ

$$\sqrt{b^2 + \left(a - \frac{1}{4}p\right)^2},$$

который, по причинѣ $b^2 = pa$, доставляетъ

$$\sqrt{pa + \left(a - \frac{1}{4}p\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{ap}{2} + \frac{p^2}{16}} = a + \frac{1}{4}p.$$

Contre diamètre. Противо-діаметръ, противо-поперечникъ. Такъ назвалъ математикъ *Бражелонъ* (*Bragelogne*) такую ось абсциссъ, относительно которой равнымъ и противоположнымъ абсциссамъ соотвѣтствуютъ равныя и противоположныя величины ординатъ. И такъ, если бы кривая была отнесена къ такой оси x—овъ, что для $x = a$ имѣли бы $y = b$, а для $x = -a$, получили бы $y = -b$, какова бы ни была величина a, то такая ось абсциссъ была бы *противо-діаметромъ* кривой.

Diamètre curviligne. Криволинейный діаметръ. Кривая, раздѣляющая пополамъ систему параллельныхъ хордъ какой ни есть кривой линіи. Напримѣръ, если отнесемъ кривую CAB (черт. 4 Листъ VIII) къ прямоугольнымъ осямъ OX, OY, то получимъ *криволинейный ея діаметръ* ADE, который будетъ дѣлить пополамъ въ точкахъ P, P', P''..... каждую изъ хордъ MN, $M'N'$, $M''N''$.....

DIAMÈTRE. (Мех.) **ДІАМЕТРЪ, ПОПЕРЕЧНИКЪ.** *Diamètre de gravité*; *діаметръ тяжести*. Прямая, проходящая чрезъ центръ тяжести тѣла. *Diamètre de rotation*; *діаметръ вращенія*. Прямая линія, около которой обращается тѣло.

DIAMÈTRE. (Астр.). **ДІАМЕТРЪ, ПОПЕРЕЧНИКЪ.** *Diamètre des apsides*; *діаметръ апсидовъ*. Такъ называли прежніе астрономы часть линіи апсидовъ, ограниченную съ обѣихъ сторонъ окружностію эпицикла. Смот. **APSIDE, EPICYCLE.**

Diamètres des planètes. Въ Астрономіи разсматриваютъ *видимые* и *истинные діаметры планетъ*. Видимымъ діаметромъ (diamètre apparent) называется уголъ, составляемый двумя лучами зрѣнія, проведенными отъ глаза наблюдателя къ концамъ поперечника планеты, то есть къ концамъ линіи, проходящей чрезъ центръ той планеты, и ограниченной ея окружностію. Такъ какъ эти углы весьма малы для всѣхъ планетъ, то видимые діаметры можно принимать за хорды круговъ, имѣющихъ общимъ центромъ глазъ наблюдателя, а радіусами, различныя разстоянія планетъ отъ мѣста наблюденія. Но извѣстно, что эти разстоянія перемѣняются для одной и той же планеты по причинѣ ея движенія; слѣдовательно и видимый діаметръ планеты долженъ также измѣняться, не выходя впрочемъ изъ извѣстныхъ предѣловъ. Очевидно, что видимый діаметръ одной и той же планеты обратно пропорціоналенъ ея разстоянію отъ наблюдателя.

Видимые діаметры служатъ къ опредѣленію истинныхъ, когда разстоянія планетъ отъ наблюдателя извѣстны. Истиннымъ діаметромъ (diamètre réel) планеты называется истинная величина его, выраженная въ извѣстной мѣрѣ, напримѣръ въ миляхъ, верстахъ, метрахъ и проч. или еще, отношеніе діаметра планеты къ діаметру земли, полагаемаго извѣстнымъ, и принимаемаго за единицу.

Слѣдующая таблица, которую заимствуемъ изъ книги: Theoretische und practische Astronomie von Littrow, содержитъ въ себѣ 1°. Видимые діаметры древнихъ планетъ для средняго разстоянія солнца отъ земли. 2° Наибольшій и наименьшій ихъ діаметры, усматриваемые съ земли, и 3°. Истинные поперечники планетъ, выраженные въ поперечникѣ земли, который принятъ за единицу. Что касается до діаметровъ новыхъ, такъ называемыхъ *телескопическихъ* планетъ, то они еще не опредѣлены съ точностію, почему и не внесены въ таблицу. Эти планеты представляются намъ какъ звѣзды отъ 7-ой до 12-ой величины.

	Видимый поперечникъ для средняго разстоянія солнца отъ земли.	Поперечники, видимые съ земли: Наиб:	Наим:	Истинные поперечники.
Меркурій.	6″.6	11″. 3	5″. 0	0.584
Венера.	16″.5	59″. 8	9″. 6	0.959
Земля.	17″.2	—	—	1.000
Марсъ.	8″.9	17″. 1	3″. 6	0.517
Юпитеръ.	186″.8	44″. 5	30″. 1	10.860
Сатурнъ.	171″.7	20″. 1	16″. 3	9.982
Уранъ.	74″.5	4″. 1	3″. 7	4.331
Солнце.	1922″.0	32′.36″	31′.31″	111.740

Чтобы выразить діаметры планетъ въ извѣстной мѣрѣ, напримѣръ въ метрахъ или верстахъ, стоитъ только замѣтить, что діаметръ земли = 11955 верстамъ.

DIAPHANE. (Опт.) **ПРОЗРАЧНЫЙ.** *Milieux diaphanes*; *прозрачныя средины.*

DIAPHANÉITÉ. ПРОЗРАЧНОСТЬ.

DIAPHONIQUE или **DIACOUSTIQUE** (Смот).

DIAPHRAGME. ДІАФРАГМА, ПЕРЕГОРОДКА. Тонкій вычерненный кружокъ, обыкновенно металлическій, съ круглымъ отверстіемъ въ серединѣ. Діафрагмы помѣщаются въ тѣхъ мѣстахъ зрительной трубы, въ которыхъ составляются изображенія предметовъ; онѣ дѣлаются для того, чтобы лучи, слишкомъ уклоняющіеся отъ направленія оси трубы, не доходили до глаза.

DIATHERME (CORPS). (Физ.) **ТЕПЛО-ПРОПУСКАЮЩИМЪ** тѣломъ называется всякое тѣло, пропускающее сквозь себя лучистую теплоту, подобно тому, какъ средина, пропускающая свѣтъ, именуется *прозрачною* (*diaphane*). Большею частію прозрачныя тѣла одарены вмѣстѣ и способностію пропускать теплоту; однако же есть исключенія. Напримѣръ, тонкій слой воды, заключенный между двумя стеклявыми пластинками, пропускаетъ свѣтъ, а почти не пропускаетъ тёмной лучистой теплоты. Напротивъ того, тѣло называется *тепло-непропускающимъ* (*atherme*), когда оно не пропускаетъ сквозь себя лучистой теплоты. Этого свойства тѣла имѣютъ въ отношеніи къ теплу такое же значеніе, какъ тѣла *непрозрачныя* или *тёмныя* въ разсужденіи свѣта. — Наименованія *diatherme* и *atherme* введены недавно Италіанскимъ физикомъ *Меллони*.

DICHOTOME. (Астр.) *La lune est dichotome*; *луны первая или послѣдняя четверть.* Смот. ниже.

DICHOTOMIE или **DICHOTOMOS.** (Астр.) Отъ Греческ: *δὶς*, *дважды*, *τόμος*, *часть.* **ДИХОТОМІЯ, ПЕРЕКРОЙ, ПОЛУЛУНІЕ.** — Первая и послѣдняя четверть луны. — Видъ луны, когда освѣщенная ея часть представляется полукружіемъ, отдѣленнымъ прямою линіею отъ неосвѣщенной части.

DIÈDRE (ANGLE). ДВУГРАННЫЙ УГОЛЪ. Смот. ANGLE.

DIFFÉRENCE. (Ариѳ.) **РАЗНОСТЬ.** Избытокъ одной величины предъ другою, или, иначе, остатокъ получаемый отъ вычитанія одной величины изъ другой, одинаковаго рода съ первою.

И такъ, разность двухъ чиселъ 11 и 5 есть 6; $a-b$ изображаетъ разность между количествами a и b. Когда $b<a$, то разность $a-b$ положительная, а когда $b>a$, то эта разность отрицательная. Смот. SOUSTRACTION. — Иногда слово *différence* употребляется въ одномъ смыслѣ съ *différentielle*; и такъ, говорятъ: *équation aux différences* (вмѣсто *différentielles*) *partielles*; *уравненіе въ частныхъ дифференціалахъ*. Смот. DIFFÉRENTIEL (CALCUL).

Différences des racines (équation aux). (Алг.) *Уравненіе въ разностяхъ корней*. Смот. CARRÉS (ÉQUATION AUX — DES DIFFÉRENCES).

Différences finies (équation aux). Уравненіе въ конечныхъ разностяхъ. Смот. DIFFÉRENCES FINIES (CALCUL AUX). *Équation aux différences partielles*; *уравненіе въ частныхъ дифференціалахъ*. Смот. DIFFÉRENTIEL (CALCUL), INTÉGRAL (CALCUL).

Différence du logarithme. Не употр. Такъ называли *Неперъ* и *Урсенъ* (*Ursin*) *логариѳмъ тангенса*, потому что онъ равенъ *разности* логариѳмовъ синуса и косинуса. Неперъ употребилъ это наименованіе въ книгѣ *Canon mirificus Logarithmorum*, а Урсенъ въ своей *Тригонометріи*.

DIFFÉRENCE. (Астр.) **РАЗНОСТЬ**. *Différence de latitude*, *de longitude*, *différence ascensionnelle* и проч. *Разность широтъ, долготъ, восхожденій* и проч. Смот. LATITUDE, LONGITUDE, ASCENSION OBLIQUE и проч. — Дифференціалъ. Смот. DIFFÉRENTIELLE.

DIFFÉRENCES FINIES (CALCUL AUX). ИСЧИСЛЕНІЕ КОНЕЧНЫХЪ РАЗНОСТЕЙ. Совокупность правилъ, посредствомъ которыхъ опредѣляются: 1° Измѣненія, которымъ подвергаются какія ни есть функціи, когда входящія въ нихъ перемѣнныя величины получаютъ конечныя приращенія, и 2° Первообразныя состоянія функцій, когда измѣненные ихъ виды извѣстны. Рѣшеніе первой изъ сихъ двухъ задачъ составляетъ предметъ *прямаго способа разностей* (*méthode directe des différences*), а второй — *обратнаго способа* (*méthode inverse des différences*). Точно такъ же раздѣляютъ и *анализъ безконечныхъ величинъ*: въ немъ разсматриваютъ *прямой способъ дифференціаловъ*, или просто *Дифференціальное Исчисленіе*, и *обратный способъ*, называемый обыкновенно *Интегральнымъ Исчисленіемъ*. Такое тожество въ раздѣленіи *Разностнаго* и *Дифференціальнаго* Исчисленій очень естественно по тѣсной связи, существующей между этими двумя способами. Смот. DIFFÉRENTIEL (CALCUL).

Первые слѣды Исчисленія Разностей усматриваемъ въ нѣкоторыхъ способахъ *Фермата*, Каноника *Мутона* *), *Баррова* и *Лейбница*. Но первый, предложившій это Исчисленіе въ видѣ самостоятельномъ, былъ извѣстный Англійскій математикъ *Тайлоръ*, который въ 1715 году издалъ объ этомъ способѣ книгу подъ заглавіемъ: *Methodus incrementorum directa et inversa*. Послѣ Тайлора, Французскій математикъ *Николь* (*Nicole*) обогатилъ Исчисленіе Разностей многими примѣчательными изслѣдованіями: его труды по сему предмету помѣщены въ *Запискахъ Парижской Академіи* за 1717, 1723, 1724 и 1727 годы. Впослѣдствіи, *Кондорсетъ*, *Эмерсонъ*, и преимущественно *Эйлеръ*, *Лагранжъ* и *Лапласъ* усовершенствовали сію важную отрасль Чистаго Анализа, и показали многоразличныя его приложенія къ интерполированію рядовъ, къ ихъ суммованію, къ теоріи соединеній, и въ особенности къ Исчисленію Вѣроятностей.

Читатели могутъ почерпнуть обширныя свѣдѣнія объ Исчисленіи Разностей въ твореніяхъ знаменитыхъ математиковъ, о которыхъ мы сей-часъ упомянули. Ограничимся краткимъ изложеніемъ главныхъ правилъ этого Исчисленія и нѣкоторыми его приложеніями.

Прямой способъ разностей.

§ 1. Разностію функціи называется приращеніе, получаемое ею при переходѣ изъ одного состоянія въ ближайшее; и такъ, для полученія разности какой ни есть функціи, зависящей

*) Смот. изданную имъ книгу *Obs. diam. Solis et Lunae apparentium*, 1670 г.

отъ сколькихъ угодно перемѣнныхъ, стоитъ только предположить, что сіи послѣднія получили извѣстныя конечныя приращенія, положительныя или отрицательныя, и изъ новаго состоянія функціи вычесть первообразное. Напримѣръ, если данная функція $u=f(x,y,z\ldots)$, а приращенія перемѣнныхъ x, y, $z\ldots$ равняются конечнымъ величинамъ h, i, $k\ldots$, то *конечная разность* функціи u изобразится чрезъ $f(x+h,y+i,z+k,\ldots)-f(x,y,z,\ldots)$.

Конечную разность какой ни есть величины обозначаютъ Греческою буквою Δ (иногда же Латинскою D), поставленною передъ величиною, которую разсматриваемъ. И такъ, разность предыдущей функціи u изобразится формулою

$$(1)\quad \Delta u=\Delta f(x,y,z\ldots)=f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z\ldots)-f(x,y,z\ldots).$$

Разность Δu будетъ вообще новою функціею прежнихъ перемѣнныхъ; слѣдовательно она можетъ быть подвержена тѣмъ же дѣйствіямъ, какъ и функція u. Такимъ образомъ получится *вторая разность* (*différence seconde*), которую изображаютъ знакоположеніемъ Δ^2u (или D^2u); взявъ разность функціи Δ^2u, получимъ *третью разность* Δ^3u, и такъ далѣе.

§ 2. Положимъ въ частности, что разсматриваемъ функцію y, зависящую отъ одной перемѣнной x; пусть будетъ $y=f(x)$. Въ этомъ предположеніи уравненіе (1) доставитъ

$$\Delta y=\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x),$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Каждая изъ сихъ дробей называется *отношеніемъ конечныхъ разностей* (*rapport aux différences finies*). Если примемъ приращеніе Δx безконечно малымъ, то содержаніе $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ обратится въ функцію, независящую отъ приращенія Δx; въ этомъ предположеніи, разсматриваемое отношеніе называется *производною* функціи $f(x)$ или *дифференціальнымъ отношеніемъ*, и означается чрезъ $f'(x)$ или $\frac{dy}{dx}$.

§ 3. Иногда, по условію вопроса, первыя разности бываютъ постоянными; такъ напримѣръ, въ ариѳметической прогрессіи разность двухъ послѣдовательныхъ членовъ есть величина постоянная. Въ другихъ вопросахъ *вторая разность* бываетъ постоянною; напримѣръ, если бы разсматривали рядъ квадратовъ такихъ чиселъ, которыя составляютъ ариѳметическую прогрессію, то вторыя разности были бы величины постоянныя. Это замѣчаніе можно распространить на дальнѣйшія разности.

§ 4. Для опредѣленія разности какого ни есть многочленнаго выраженія, стоитъ только найти разность каждаго члена, и удержать при немъ прежній его знакъ; когда въ числѣ этихъ членовъ найдутся постоянные, то разности ихъ будутъ *нули*. Сверхъ того должно замѣтить, что если какой либо членъ имѣетъ коэффиціентомъ величину постоянную, то ее можно вынести за знакъ Δ. Всѣ эти правила обнаруживаются изъ слѣдующаго примѣра, составленнаго на основаніи формулы (1):

$$\Delta(A+Bx+Cy-Dz)=A+B(x+\Delta x)+C(y+\Delta y)-D(z+\Delta z)-(A+Bx+Cy-Dz)$$
$$=B\Delta x+C\Delta y-D\Delta z,$$

гдѣ x, y, z изображаютъ какія ни есть перемѣнныя величины, зависимыя или независимыя, а A, B, C, D постоянныя количества.

§ 5. Въ силу сказаннаго въ предыдущихъ параграфахъ, легко будетъ составить для всякой функціи разность перваго, втораго, и вообще какого ни есть порядка. Вотъ нѣсколько примѣровъ:

$$\Delta(x^m)=(x+\Delta x)^m-x^m=mx^{m-1}\Delta x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}\Delta x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}\Delta x^3+\ldots$$

$$\Delta(xy)=(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy=y\Delta x+x\Delta y+\Delta x\Delta y,$$

$$\Delta\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{x+\Delta x}{y+\Delta y}-\frac{x}{y}=\frac{y\Delta x-x\Delta y}{y(y+\Delta y)},$$

$$\Delta[x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots(x+n\Delta x)]=(n+1)(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots(x+n\Delta x).\Delta x,$$

$$\Delta\left[\frac{A}{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots(x+n\Delta x)}\right]=-\frac{(n+1)A\,\Delta x}{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots(x+\overline{n+1}.\Delta x)},$$

$$\Delta(a^x)=(a^{\Delta x}-1)a^x,\quad \Delta.\log x=\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right),$$

$$\Delta.\mathrm{Sin}x=\mathrm{Sin}(x+\Delta x)-\mathrm{Sin}x=2\mathrm{Sin}(\tfrac{1}{2}\Delta x).\mathrm{Cos}(x+\tfrac{1}{2}\Delta x).$$

Предполагая степень m цѣлою положительною, а Δx постояннымъ, найдемъ

$$\Delta^m(Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots) = 1.2.3\ldots mA.\Delta x^m.$$

Для Δx и Δy перемѣнныхъ, получимъ

$$\Delta^2(xy) = y\Delta^2 x + x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta y + 2\Delta y\Delta^2 x + 2\Delta x\Delta^2 y + \Delta^2 x\cdot\Delta^2 y;$$

если бы приняли Δx постояннымъ, то эта формула получила бы слѣдующій простѣйшій видъ:

$$\Delta^2(xy) = x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta y + 2\Delta x\Delta^2 y.$$

§ 6. Разсмотримъ теперь нѣкоторыя приложенія прямаго способа разностей къ теоріи рядовъ и къ интерполированію. Пусть будетъ $u = f(x)$, и допустимъ для простоты, что приращеніе Δx есть величина постоянная; сверхъ того, положимъ для краткости $f(x+\Delta x) = u_1$, $f(x+2\Delta x) = u_2, \ldots f(x+n\Delta x) = u_n$, и разсмотримъ рядъ

$$u,\ u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots\ldots u_n \ldots\ldots$$

Изъ самаго опредѣленія разностей различныхъ порядковъ, получаемъ формулы:

$$(2)\left\{\begin{array}{lll} \text{N}^0\ 1. & \text{N}^0\ 2. & \text{N}^0\ 3. \\ u_1 - u = \Delta u & \Delta u_1 - \Delta u = \Delta^2 u & \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u = \Delta^3 u \\ u_2 - u_1 = \Delta u_1 & \Delta u_2 - \Delta u_1 = \Delta^2 u_1 & \Delta^2 u_2 - \Delta^2 u_1 = \Delta^3 u_1 \\ u_3 - u_2 = \Delta u_2 & \Delta u_3 - \Delta u_2 = \Delta^2 u_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ u_n - u_{n-1} = \Delta u_{n-1} & & \end{array}\right.$$

На основаніи § 4, изъ уравненій столбца N° 1, выводимъ послѣдовательно слѣдующія формулы:

$$u_1 = u + \Delta u$$
$$u_2 = u_1 + \Delta u_1 = u + \Delta u + \Delta(u + \Delta u)$$
$$= u + 2\Delta u + \Delta^2 u$$
$$u_3 = u_2 + \Delta u_2 = u + 2\Delta u + \Delta^2 u + \Delta(u + 2\Delta u + \Delta^2 u)$$
$$= u + 3\Delta u + 3\Delta^2 u + \Delta^3 u,$$

и вообще, для какого ни есть указателя n найдется

$$(3)\qquad u_n = f(x+n\Delta x) =$$
$$u + n\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u + \ldots\ldots$$

Въ справедливости этой послѣдней формулы легко удостовѣриться на основаніи уравненія $u_n = u_{n-1} + \Delta u_{n-1}$, разложеніе котораго покажетъ, что если приведенный выше законъ справедливъ для указателя $n-1$, то онъ будетъ также имѣть мѣсто и для указателя n, а этого достаточно для нашей цѣли, ибо мы вывели непосредственно величину u_2, и даже u_3, и въ обоихъ случаяхъ получили разложенія, согласующіяся съ видомъ (3).

§ 7. Изъ формулы (3) предыдущаго параграфа легко вывести извѣстную *Тайлорову теорему*. Дѣйствительно, если въ уравненіи $u_n = f(x+n\Delta x)$ положимъ $n\Delta x = h$ или $n = \frac{h}{\Delta x}$, разумѣя подъ h величину конечную, то формула, о которой говоримъ, приметъ слѣдующій видъ:

$$f(x+h) =$$
$$u + h.\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{h(h-\Delta x)}{1.2}\cdot\frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2} + \frac{h(h-\Delta x)(h-2\Delta x)}{1.2.3}\cdot\frac{\Delta^3 u}{\Delta x^3} + \ldots.$$

Положимъ теперь, что Δx дѣлается безконечно малымъ, то есть обращается въ диффеpенціалъ перемѣнной x; въ такомъ предположеніи каждый изъ множителей $h-\Delta x$, $h-2\Delta x, \ldots.$ обратится въ $h-dx$, $h-2dx, \ldots$ или просто въ h, откидывая безконечно малыя количества dx, $2dx, \ldots$ предъ конечною величиною h. Въ томъ же предположеніи отношенія конечныхъ разностей $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2}$, $\frac{\Delta^3 u}{\Delta x^3}, \ldots.$ (Смот. § 2) обратятся соотвѣтственно въ диффеpенціальныя отношенія $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2 u}{dx^2}$, $\frac{d^3 u}{dx^3}, \ldots.$ И такъ, предыдущая формула приметъ видъ

$$f(x+h) = u + \frac{du}{dx}\cdot h + \frac{d^2 u}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3 u}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots\ldots,$$

гдѣ $u = f(x)$. Это доказательство Тайлоровой теоремы весьма просто, но, какъ и большая часть другихъ, не вполнѣ удовлетворительно. Оно примѣчательно въ историческомъ отношеніи тѣмъ, что было предложено Тайлоромъ почти въ томъ видѣ, въ какомъ изложено у насъ. Смот. TAYLOR (THÉORÈME DE).

§ 8. Формула (3) въ нѣкоторыхъ случаяхъ весьма удобна для интерполированія. Если положимъ въ ней $\Delta x = h$ и $n\Delta x = i$, то она приметъ видъ

$$(4)\qquad f(x+i) =$$
$$u + \frac{i}{h}\Delta u + \frac{i}{h}\cdot\frac{i-h}{2h}\Delta^2 u + \frac{i}{h}\cdot\frac{i-h}{2h}\cdot\frac{i-2h}{3h}\Delta^3 u + \ldots.$$

Положимъ напримѣръ, что желаемъ найти обыкновенный логариѳмъ числа 2,7182818284... (изображающаго основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ), посредствомъ таблицъ съ десятью десятичными цифрами, предполагая что эти таблицы простираются только до 1000. Для этого, принимаемъ $x=2{,}71$, $h=0{,}01$, $i=0{,}0082818284$, и, останавливаясь на четвертыхъ разностяхъ, составляемъ слѣдующую таблицу:

$$u=Log(2{,}71)=0{,}4329692908$$
$$u_1=Log(2{,}72)=0{,}4345689040$$
$$u_2=Log(2{,}73)=0{,}4361626470$$
$$u_3=Log(2{,}74)=0{,}4377505628$$
$$u_4=Log(2{,}75)=0{,}4393326938$$

Первыя разности:

$$u_1-u=\Delta u=0{,}0015996132$$
$$u_2=u_1=\Delta u_1=0{,}0015937430$$
$$u_3-u_2=\Delta u_2=0{,}0015879158$$
$$u_4-u_3=\Delta u_3=0{,}0015821310$$

Вторыя разности:

$$\Delta u_1-\Delta u=\Delta^2 u=-0{,}0000058702$$
$$\Delta u_2-\Delta u_1=\Delta^2 u_1=-0{,}0000058272$$
$$\Delta u_3-\Delta u_2=\Delta^2 u_2=-0{,}0000057848$$

Третьи разности:

$$\Delta^2 u_1-\Delta^2 u=\Delta^3 u=0{,}0000000430$$
$$\Delta^2 u_2-\Delta^2 u_1=\Delta^3 u_1=0{,}0000000424$$

Четвертая разность:

$$\Delta^3 u_1-\Delta^3 u=\Delta^4 u=-0{,}0000000006.$$

И такъ

$$\begin{aligned} u&=\ \ 0{,}4329692908\\ \Delta u&=\ \ 0{,}0015996132\\ \Delta^2 u&=-0{,}0000058702\\ \Delta^3 u&=\ \ 0{,}0000000430\\ \Delta^4 u&=-0{,}0000000006; \end{aligned}$$

сверхъ того найдется

$$\frac{i}{h}=0{,}82818284,\qquad \frac{i-h}{2h}=-0{,}08590858,$$
$$\frac{i-2h}{3h}=-0{,}39060572,\qquad \frac{i-3h}{4h}=-0{,}54295429.$$

Подставляя найденныя величины въ формулу (4), получимъ

$$f(x+h)=Log(2{,}7182818284)=0{,}4342944819\ldots.$$

Это число, какъ извѣстно, изображаетъ *модуль* обыкновенныхъ или *Бригговыхъ* логариѳмовъ.

Мы ограничиваемся здѣсь однимъ примѣромъ изъ теоріи интерполированія; читатели, желающіе ближе ознакомиться съ этимъ предметомъ, могутъ обратиться къ статьѣ INTERPOLATION нашего Лексикона.

§ 9. Изъ уравненій (2) параграфа 6 можно также вывести общую формулу, которая служитъ къ опредѣленію разности какого ни есть порядка предложенной функціи u посредствомъ послѣдовательныхъ ея состояній u_1, u_2, $u_3\ldots\ldots$ Дѣйствительно, получимъ

$$\begin{aligned} \Delta u&=u_1-u\\ \Delta^2 u&=\Delta u_1-\Delta u=u_2-u_1-(u_1-u)\\ &=u_2-2u_1+u\\ \Delta^3 u&=\Delta^2 u_1-\Delta^2 u=(\Delta u_2-\Delta u_1)-(u_2-2u_1+u)\\ &=(u_3-u_2)-(u_2-u_1)-(u_2-2u_1+u)\\ &=u_3-3u_2+3u_1-u, \end{aligned}$$

и вообще

$$(5)\ \Delta^n u=u_n-nu_{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}u_{n-2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u_{n-3}+\ldots$$

Положимъ напримѣръ $u=x^2$ и $\Delta x=1$; въ силу формулы (5) найдется

$$\Delta u=(x+1)^2-x^2=2x+1$$
$$\Delta^2 u=(x+2)^2-2(x+1)^2+x^2=2.$$

И такъ, вторая разность квадратныхъ чиселъ равна постоянному числу 2, а разности высшихъ порядковъ очевидно обращаются въ нуль.

Для $u=x^3$, получимъ

$$\Delta u=(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1$$
$$\Delta^2 u=(x+2)^3-2(x+1)^3+x^3=6x+6$$
$$\Delta^3 u=(x+3)^3-3(x+2)^3+3(x+1)^3-x^3=6;$$

отсюда заключаемъ, что третья разность кубичныхъ чиселъ равна постоянному числу 6, и слѣдовательно дальнѣйшія ихъ разности обращаются въ нуль. Эти слѣдствія относительно квадратныхъ и кубичныхъ чиселъ дѣлаются очевидными, когда построимъ слѣдующія двѣ таблицы:

Квадраты:	1 разн:	2 разн:	3 разн:
1			
4	3		
9	5	2	
16	7	2	0
25	9	2	0
36	11	2	0
и проч.	и проч.	и проч.	и проч.

Кубы:	1 разн:	2 разн:	3 разн:	4 разн:
1				
	7			
8		12		
	19		6	
27		18		0
	37		6	
64		24		0
	61		6	
125		30		и проч.
	91		и проч.	
216		и проч.		
	и проч.			
и проч.				

Легко распространить это свойство на какія ни есть цѣлыя положительныя степени; дѣйствительно, если положимъ $u=x^n$ и $\Delta x=1$, то получимъ $\Delta^n u=1.2.3\ldots u$ и $\Delta^{n+1}u=\Delta^{n+2}u=\ldots=0$.

§ 10. Формулы (3) и (5) могутъ быть написаны въ слѣдующихъ символическихъ видахъ:

$$u_n=(1+\Delta)^n u \quad \text{и} \quad \Delta^n u=(u-1)^n.$$

По разложеніи вторыхъ частей этихъ уравненій должно будетъ, въ первомъ изъ нихъ, принимать выраженія Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u\ldots$ не за степени и произведенія, а за разности различныхъ порядковъ функціи u, а во второмъ, перемѣнить показатели на указатели, то есть на нумера, поставленные подъ буквою u. Смот. ANALOGIE DES DIFFÉRENCES AVEC LES PUISSANCES.

Обратный способъ разностей.

§ 11. Обратный способъ конечныхъ разностей имѣетъ предметомъ опредѣленіе первообразной функціи по данной ея разности. И такъ, если бы имѣли уравненіе $\Delta u_x=\mathrm{f}(x)$, гдѣ $\mathrm{f}(x)$ изображаетъ данную, а u_x неизвѣстную функцію перемѣнной x, то для опредѣленія первообразной функціи u_x надлежало бы употребить *обратный способъ разностей*. Дѣйствіе, посредствомъ котораго опредѣляется первообразная функція, называется *интегрированіемъ* (*intégration*); въ томъ же смыслѣ говорятъ иногда: *взять сумму* (*prendre la somme*). Интегралъ въ разностяхъ обозначаютъ Греческою буквою $\sum$ (иногда же Латинскою S), поставленною передъ функціею, для которой ищутъ первообразную. И такъ, изъ уравненія $\Delta u_x=\mathrm{f}(x)$, получаемъ $\Sigma\Delta u_x=\Sigma\mathrm{f}(x)$; но, по самому опредѣленію интеграла или суммы, $\Sigma\Delta u_x=u_x$; слѣдовательно знаки Δ и Σ, какъ означающіе дѣйствія прямопротивоположныя, совершаемыя надъ однимъ и тѣмъ же количествомъ, взаимно уничтожаются. Если бы вмѣсто уравненія $\Delta u_x=\mathrm{f}(x)$, имѣли $\Delta^2 u_x=\mathrm{f}(x)$ или $\Delta^3 u_x=\mathrm{f}(x)$, или вообще $\Delta^m u_x=\mathrm{f}(x)$, то для опредѣленія первообразной функціи u_x слѣдовало бы искать двойной, тройной и вообще $m^{\text{го}}$ порядка интегралъ функціи $\mathrm{f}(x)$. Для изображенія такого рода кратныхъ интеграловъ, повторяютъ букву Σ (или S). И такъ, для означенія двойнаго интеграла употребляется одно изъ слѣдующихъ знакоположеній:

$$u_x=\Sigma\Sigma\mathrm{f}(x)=\Sigma^2\mathrm{f}(x)=SS\mathrm{f}(x)=S^2\mathrm{f}(x);$$

для тройнаго

$$u_x=\Sigma\Sigma\Sigma\mathrm{f}(x)=\Sigma^3\mathrm{f}(x)=SSS\mathrm{f}(x)=S^3\mathrm{f}(x),$$

и вообще, для интеграла $m^{\text{го}}$ порядка, будетъ

$$u_x=\Sigma\Sigma\Sigma\ldots\mathrm{f}(x)=\Sigma^m\mathrm{f}(x)=SSS\ldots\mathrm{f}(x)=S^m\mathrm{f}(x).$$

§ 12. Мы сказали что дѣйствіе, посредствомъ котораго изъ уравненія $\Delta u_x=\mathrm{f}(x)$ опредѣляется первообразная функція u_x, называется *интегрированіемъ*, а u_x *интеграломъ* или *суммою*. И дѣйствительно, u_x изображаетъ настоящую сумму; чтобы удостовѣриться въ этомъ, стоитъ только сложить всѣ равенства, составляющія столбецъ № 1 въ формулахъ (2); [Смот. § 6]. Такимъ образомъ получимъ

$$u_n=u+\Delta u+\Delta u_1+\Delta u_2+\ldots+\Delta u_{n-1}.$$

Положимъ, какъ и въ § 6, что приращеніе Δx перемѣнной x есть величина постоянная, которую изобразимъ чрезъ h; сверхъ того, означимъ чрезъ u значеніе функціи u_x для $x=a$. Въ слѣдствіе уравненій $\Delta u_x=\mathrm{f}(x)$ и $u_x=\Sigma\mathrm{f}(x)$, для значенія $x=a+nh$, получимъ

$$(6)\quad \Sigma\mathrm{f}(x)=u+\mathrm{f}(a)+\mathrm{f}(a+h)+\mathrm{f}(a+2h)+\ldots +\mathrm{f}(a+\overline{n-1}.h).$$

Очевидно, что вторая часть этого уравненія увеличилась бы количествомъ $\mathrm{f}(a+nh)=\mathrm{f}(x)$ еслибъ приписали приращеніе h послѣднему значенію $a+(n-1)h$ величины x. Слѣдовательно, $\mathrm{f}(x)$ есть *разность* второй части формулы (6), а поэтому и первой, то есть интеграла $\Sigma\mathrm{f}(x)$, что дѣйствительно и должно быть. И такъ, $\Sigma\mathrm{f}(x)$ состоитъ изъ суммы всѣхъ значеній, получаемыхъ функціею $\mathrm{f}(x)$ отъ $x=a$ до $x=a+(n-1)h$ при постоянномъ приращеніи h сей перемѣнной, и еще одного члена u, неопредѣленнаго, замѣняющаго произвольную постоянную

*

величину, которая могла уничтожиться при переходѣ отъ u_x къ Δu_x. Величина u должна быть такого свойства, чтобы при переходѣ отъ x къ $x+h$ она не измѣнялась. Очевидно, что постоянное количество удовлетворяетъ такому условію. Но, по замѣчанію *Эйлера*, есть и функціи перемѣнной x, которыя выполняютъ это требованіе: таковы, напримѣръ, $Sin\frac{2\pi x}{h}$, $Cos\frac{2\pi x}{h}$; и дѣйствительно

$$Sin\frac{2\pi(x+h)}{h}=Sin\left(\frac{2\pi x}{h}+2\pi\right)=Sin\frac{2\pi x}{h}$$

$$Cos\frac{2\pi(x+h)}{h}=Cos\left(\frac{2\pi x}{h}+2\pi\right)=Cos\frac{2\pi x}{h}.$$

Слѣдовательно, можно положить вообще

$$u=\varphi\left(Sin\frac{2\pi x}{h},\ Cos\frac{2\pi x}{h}\right),$$

разумѣя подъ φ функцію какого угодно вида.

Если бы имѣли уравненіе $\Sigma^m u_x = \mathrm{f}(x)$, то для опредѣленія u_x надлежало бы произвести m интегрированій. Каждое дѣйствіе ввело бы одну величину, подобную u, и слѣдовательно, полный интегралъ $u_x=\Sigma^m\mathrm{f}(x)$ заключалъ бы въ себѣ m величинъ, одинаковаго свойства съ количествомъ u.

Интегралъ $\Sigma\mathrm{f}(x)$, опредѣляемый формулою (6), изображаютъ обыкновенно знакоположеніемъ $\sum\limits_{a}^{a+nh}\mathrm{f}(x)$. Когда же подъ знакомъ f, сверхъ перемѣнной x, имѣемъ другое количество, напримѣръ y, между тѣмъ какъ интегральный знакъ долженъ относиться къ x, то для избѣжанія недоразумѣнія пишутъ

$$\sum_{x=a}^{x=a+nh}\mathrm{f}(x,y) \quad \text{вмѣсто} \quad \sum_{a}^{a+nh}\mathrm{f}(x,y).$$

Это знакоположеніе распространяютъ и на кратные интегралы; и такъ, въ слѣдствіе сказаннаго выше, легко понять смыслъ выраженія

$$\sum_{z=c}^{z=n}\sum_{y=b}^{y=m}\sum_{x=a}^{x=l}\mathrm{f}(x,y,z).$$

§ 13. Опредѣленіе интеграла въ разностяхъ многочленнаго выраженія приводится къ интегрированію одночленныхъ количествъ. Дѣйствительно, если возьмемъ интегралъ формулы

$$B\Delta x+C\Delta y-D\Delta z=\Delta(Bx+Cy-Dz)$$

(Смот. § 4), то получимъ

$$\Sigma(B\Delta x+C\Delta y-D\Delta z)=Bx+Cy-Dz;$$

но $Bx=B\Sigma\Delta x$, $Cy=C\Sigma\Delta y$, $Dz=D\Sigma\Delta z$, почему и будетъ

$$\Sigma(B\Delta x+C\Delta y-D\Delta z)=B\Sigma\Delta x+C\Sigma\Delta y-D\Sigma\Delta z.$$

Это уравненіе показываетъ, что интегралъ суммы равенъ суммѣ интеграловъ, а интегралъ разности двухъ количествъ — разности ихъ интеграловъ; изъ этой же формулы усматриваемъ, что постоянные множители могутъ быть выносимы при интегрированіи за интегральный знакъ.

Перейдемъ теперь къ самымъ пріёмамъ интегрированія: займемся сперва функціями алгебрическими.

§ 14. Интегрированіе цѣлой алгебрической функціи $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots\ldots$, въ силу предыдущаго параграфа, приводится къ опредѣленію интеграла Σx^n, гдѣ n, изображаетъ какое ни есть цѣлое положительное число. Для опредѣленія Σx^n, составляемъ разность функціи x^{n+1}; если положимъ $\Delta x=h$, то получимъ

$$\Delta.x^{n+1}=(x+h)^{n+1}-x^{n+1}=(n+1)x^nh$$
$$+\frac{(n+1)n}{1.2}x^{n-1}h^2+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}x^{n-2}h^3$$
$$+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}x^{n-3}h^4+\ldots.$$

Взявъ интегралъ обѣихъ частей этого уравненія, и опустивъ для краткости постоянную величину или функцію u, о которой говорено въ § 12, найдется

$$x^{n+1}=(n+1)h\Sigma x^n+\frac{(n+1)n}{1.2}h^2\Sigma x^{n-1}$$
$$+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}h^3\Sigma x^{n-2}$$
$$+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}h^4\Sigma x^{n-3}+\ldots.$$

Полагая послѣдовательно въ этой формулѣ $n=0$, $n=1$, $n=2$,.... получимъ

$$x = h\Sigma x^0$$
$$x^2=2h\Sigma x+h^2\Sigma x^0$$
$$x^3=3h\Sigma x^2+3h^2\Sigma x+h^3\Sigma x^0$$
$$x^4=4h\Sigma x^3+6h^2\Sigma x^2+4h^3\Sigma x+h^4\Sigma x^0$$
$$x^5=5h\Sigma x^4+10h^2\Sigma x^3+10h^3\Sigma x^2+5h^4\Sigma x+h^5\Sigma x^0$$
....

Интегралъ $\Sigma x^0=\Sigma 1$ опредѣляется изъ первой формулы; если подставимъ эту величину во вторую формулу, то найдемъ Σx; подставивъ въ третье уравненіе найденныя величины для Σx^0 и Σx, выведемъ интегралъ Σx^2, и такъ далѣе. Произведя означенныя подстановленія, получимъ:

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
\Sigma x^0 &= \frac{x}{h}\\
\Sigma x &= \frac{x^2}{2h} - \frac{x}{2}\\
\Sigma x^2 &= \frac{x^3}{3h} - \frac{x^2}{2} + \frac{xh}{6}\\
\Sigma x^3 &= \frac{x^4}{4h} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2h}{4}\\
\Sigma x^4 &= \frac{x^5}{5h} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3h}{3} - \frac{xh^3}{30}\\
\Sigma x^5 &= \frac{x^6}{6h} - \frac{x^5}{2} + \frac{5x^4h}{12} - \frac{x^2h^3}{12}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\right.
$$

Здѣсь, какъ и выше, опущено дополнительное количество, уничтожающееся при переходѣ отъ интеграла къ разности. Въ послѣдующихъ интегральныхъ формулахъ, для краткости, мы будемъ также опускать это количество; но не должно забывать, что оно вездѣ подразумѣвается.

Приложимъ формулы (7) къ опредѣленію интеграла выраженія $5x^3-6x^2+7x+3$, предполагая что приращеніе $\Delta x = h = 1$. Найдется:

$$
\begin{aligned}
\Sigma(5x^3-6x^2+7x+3) &= 5\Sigma x^3 - 6\Sigma x^2 + 7\Sigma x + 3\Sigma x^0\\
&= 5\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{4}\right) - 6\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}\right)\\
&\quad + 7\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right) + 3x\\
&= \frac{5x^4}{4} - \frac{9x^3}{2} + \frac{31x^2}{4} - \frac{3x}{2}.
\end{aligned}
$$

§ 15. Хотя по предыдущему параграфу легко найти интегралъ факторіальной функціи

$$x(x+h)(x+2h)(x+3h)\ldots\ldots(x+[m-1]h)$$

разложивъ ее предварительно по степенямъ количества x, но полезно показать и другой пріёмъ, доставляющій этотъ интегралъ въ весьма простомъ видѣ. Взявъ разность разсматриваемой функціи, найдемъ послѣдовательно

$$
\begin{aligned}
&\Delta\{x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+mh)\} =\\
&(x+h)(x+2h)(x+3h)\ldots\ldots(x+mh)(x+[m+1]h)\\
&\quad - x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+mh)\\
&= (x+[m+1]h-x)(x+h)(x+2h)(x+3h)\ldots\ldots(x+mh)\\
&= (m+1)h(x+h)(x+2h)(x+3h)\ldots\ldots(x+mh).
\end{aligned}
$$

Переходя къ интегралу, получимъ

$$
\begin{aligned}
&x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+mh) =\\
&(m+1)h\Sigma\{(x+h)(x+2h)(x+3h)\ldots\ldots(x+mh)\};
\end{aligned}
$$

если замѣнимъ теперь x разностію $x-h$, и раздѣлимъ полученную формулу на $(m+1)h$, то найдемъ окончательно

$$
(8)\quad \Sigma\{x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+[m-1]h)\} = \frac{(x-h)x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+[m-1]h)}{(m+1)h}.
$$

Напримѣръ, если бы данная факторіальная функція была $x(x+1)(x+2)(x+3)$, то положивъ $h=1$ и $m=4$, получили бы

$$\Sigma\{x(x+1)(x+2)(x+3)\} = \frac{(x-1)x(x+1)(x+2)(x+3)}{5}.$$

§ 16. Изслѣдованіе общаго случая, въ которомъ раціональная дробь имѣетъ интегралъ алгебрическій, завлекло бы насъ слишкомъ далеко; отсылаемъ по сему предмету къ нашему Разсужденію подъ заглавіемъ: *Объ алгебрическихъ интегралахъ въ разностяхъ раціональныхъ дробей* *). Ограничимся здѣсь изложеніемъ того случая, когда знаменатель предложенной раціональной дроби будетъ функція факторіальная. Во первыхъ замѣтимъ, что по причинѣ

$$
\begin{aligned}
&\Delta\left[\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+[m-1]h)}\right] =\\
&\frac{1}{(x+h)(x+2h)(x+3h)\ldots(x+mh)}\\
&- \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+[m-1]h)}\\
&= -\frac{mh}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+mh)},
\end{aligned}
$$

найдемъ чрезъ интегрированіе

$$
\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+[m-1]h)} = -mh\Sigma\left[\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+mh)}\right],
$$

или, написавъ $m-1$ вмѣсто m,

$$
(9)\quad \Sigma\left[\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+[m-1]h)}\right] = -\frac{1}{(m-1)hx(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+[m-2]h)}.
$$

И такъ, въ силу этой формулы, найдется

$$\Sigma\left[\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)}\right] = -\frac{1}{3x(x+1)(x+2)}.$$

Если бы желали употребить формулу (9) для опредѣленія интеграла дроби $\frac{1}{x}$, то слѣдовало бы положить $m=1$; въ такомъ предположеніи вторая часть упомянутой формулы доставила бы выводъ несообразный, а это происходитъ отъ того, что интегралъ $\Sigma\frac{1}{x}$ не можетъ быть

*) Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg; VI Série. *Sciences Math. Phys. et Natur.* T. III. стр. 205.

выраженъ въ алгебрическомъ видѣ, и составляетъ особаго рода трансцендентную функцію.

На основаніи формулы (9) не трудно найти интегралъ всякой раціональной дроби $\frac{P}{Q}$, когда знаменатель Q будетъ факторіальная функція, а числитель, цѣлая алгебрическая функція, коей степень двумя или большимъ числомъ единицъ ниже степени знаменателя Q. Дѣйствительно, пусть данная дробь будетъ

$$\frac{P}{Q}=\frac{ax^{m-2}+bx^{m-3}+cx^{m-4}+\ldots+kx+l}{x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots\ldots(x+[m-1]h)};$$

разлагаемъ ее на слѣдующія частныя дроби:

$$\frac{P}{Q}=\frac{A}{x(x+h)}+\frac{B}{x(x+h)(x+2h)}+\frac{C}{x(x+h)(x+2h)(x+3h)}$$
$$+\ldots\ldots+\frac{M}{x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots(x+[m-1]h)},$$

опредѣляя числители A, B, $C\ldots.M$ по извѣстному способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ. Когда дробь $\frac{P}{Q}$ будетъ разложена такимъ образомъ, то получимъ

$$\Sigma\frac{P}{Q}=A\Sigma\frac{1}{x(x+h)}+B\Sigma\frac{1}{x(x+h)(x+2h)}+\ldots\ldots;$$

но такъ какъ вторая часть этой формулы состоитъ изъ интеграловъ вида (9), то очевидно что $\Sigma\frac{P}{Q}$ опредѣлится во всякомъ случаѣ. Для примѣра найдемъ интегралъ раціональной дроби

$$\frac{ax^2+bx+c}{x(x+1)(x+2)(x+3)};$$

въ слѣдствіе сказаннаго выше, полагаемъ

$$\frac{ax^2+bx+c}{x(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x(x+1)}+\frac{B}{x(x+1)(x+2)}$$
$$+\frac{C}{x(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

Если приведемъ эти три частныя дроби къ одному знаменателю $x(x+1)(x+2)(x+3)$, то получимъ уравненіе

$$ax^2+bx+c=A(x+2)(x+3)+B(x+3)+C,$$

откуда, чрезъ сравненіе коэффиціентовъ при одинаковыхъ степеняхъ x,

$$a=A,\ b=5A+B,\ c=6A+3B+C.$$

Рѣшая эти уравненія, найдемъ

$$A=a,\ B=b-5a,\ C=c-3b+9a.$$

Слѣдовательно

$$\Sigma\left[\frac{ax^2+bx+c}{x(x+1)(x+2)(x+3)}\right]=a\Sigma\frac{1}{x(x+1)}$$
$$+(b-5a)\Sigma\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$$
$$+(c-3b+9a)\Sigma\frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

Опредѣляя по формулѣ (9) каждый изъ интеграловъ, составляющихъ вторую часть послѣдняго уравненія, найдемъ окончательно

$$\Sigma\left[\frac{ax^2+bx+c}{x(x+1)(x+2)(x+3)}\right]=-\frac{a}{x}-\frac{b-5a}{2x(x+1)}$$
$$-\frac{c-3b+9a}{3x(x+1)(x+2)}=-\frac{6ax^2+3(a+b)x+2c}{6x(x+1)(x+2)}.$$

§ 17. Мы не будемъ говорить объ интегрированіи ирраціональныхъ алгебрическихъ функцій, потому что случаи, въ которыхъ интегралы ихъ бываютъ алгебрическіе, весьма рѣдки. Переходимъ теперь къ функціямъ трансцендентнымъ. Взявъ интегралъ уравненія

$$\Delta.a^x=a^{x+h}-a^x=(a^h-1)a^x$$

получимъ

$$a^x=(a^h-1)\Sigma a^x\quad\text{или}\quad\Sigma a^x=\frac{a^x}{a^h-1}.$$

Можно также найти интегралъ произведенія $x^m a^x$, когда m изображаетъ число цѣлое положительное; для этого стоитъ только положить

(10) $$\Sigma[x^m a^x]=a^x(Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots\ldots),$$

гдѣ A, B, $C\ldots.$ изображаютъ неопредѣленные коэффиціенты, которые опредѣлятся когда возьмемъ разность послѣдняго уравненія, и предположимъ что двѣ части его тожественны. Напримѣръ, если бы искали интегралъ $\Sigma(x^3a^x)$, то допустивъ

$$\Sigma(x^3a^x)=a^x(Ax^3+Bx^2+Cx+D),$$

и взявъ разность, нашли бы

$$x^3a^x=a^{x+h}[A(x+h)^3+B(x+h)^2+C(x+h)+D]$$
$$-a^x[Ax^3+Bx^2+Cx+D].$$

Раздѣливъ все уравненіе на a^x, и расположивъ вторую его часть по нисходящимъ степенямъ количества x, получимъ

$$x^3=A(a^h-1)x^3+(3Aha^h+Ba^h-B)x^2+(3Ah^2a^h$$
$$+2Bha^h+Ca^h-C)x+Ah^3a^h+Bh^2a^h+Cha^h+Da^h-D.$$

Чтобы это уравненіе было тожественно, должно быть

$$1=A(a^h-1)$$
$$0=3Aha^h+Ba^h-B$$
$$0=3Ah^2a^h+2Bha^h+Ca^h-C$$
$$0=Ah^3a^h+Bh^2a^h+Cha^h+Da^h-D;$$

выводя изъ сихъ формулъ величины A, B, C, D, и подставляя ихъ во вторую часть уравненія (10), найдемъ интегралъ $\Sigma(x^3a^x)$.

Точно такимъ образомъ получится интегралъ выраженія $(ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+\ldots)a^x$, для котораго очевидно должно положить

$$\Sigma[(ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+\ldots)a^x]$$
$$=(Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots)a^x.$$

Логариѳмическія формулы допускаютъ интегрированіе только въ самыхъ частныхъ случаяхъ. Простѣйшая изъ нихъ по виду, именно $log x$, не можетъ быть интегрирована. Если возьмемъ разность функціи $log x$, то получимъ

$$\Delta.\,log\,x=log(x+h)-log\,x=log\left(1+\frac{h}{x}\right),$$

откуда

$$\Sigma log\left(1+\frac{h}{x}\right)=log\,x.$$

§ 18. На основаніи предыдущаго параграфа можно интегрировать нѣкоторыя тригонометрическія функціи, приводя ихъ къ показательнымъ помощію формулъ

$$Sin\,x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$Cos\,x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

Но удобнѣе искать интегралы $\Sigma Sin x$, $\Sigma Cos x$ и проч. посредствомъ слѣдующихъ пріёмовъ:

Изобразивъ чрезъ h постоянное приращеніе дуги x, найдется

$$\Delta.\,Cos\,x=Cos(x+h)-Cos\,x=-2\,Sin\tfrac{1}{2}h.Sin(x+\tfrac{1}{2}h)$$
$$\Delta.\,Sin\,x=Sin(x+h)-Sin\,x=\ \ 2\,Sin\tfrac{1}{2}h.Cos(x+\tfrac{1}{2}h);$$

интегрируя эти выраженія, получимъ

$$Cos\,x=-2\,Sin\tfrac{1}{2}h\,\Sigma\,Sin(x+\tfrac{1}{2}h)$$
$$Sin\,x=\ \ 2\,Sin\tfrac{1}{2}h\,\Sigma\,Cos(x+\tfrac{1}{2}h).$$

Если напишемъ въ этихъ формулахъ $x-\frac{1}{2}h$ вмѣсто x, то онѣ доставятъ

$$(11)\quad \begin{cases} \Sigma Sin x=-\dfrac{Cos(x-\frac{1}{2}h)}{2\,Sin\frac{1}{2}h} \\ \Sigma Cos x=\ \ \dfrac{Sin(x-\frac{1}{2}h)}{2Sin\frac{1}{2}h}. \end{cases}$$

Отъ интеграловъ $\Sigma Sin x$, $\Sigma Cos x$ легко перейти къ $\Sigma Sin(a+bx)$ и $\Sigma Cos(a+bx)$. Очевидно, что для этого стоитъ только въ предыдущихъ формулахъ замѣнить x суммою $a+bx$, а приращеніе h, произведеніемъ bh, ибо $a+b(x+h)=a+bx+bh$. Такимъ образомъ получимъ

$$(12)\quad \begin{cases} \Sigma Sin(a+bx)=-\dfrac{Cos(a+bx-\frac{1}{2}bh)}{2\,Sin\frac{1}{2}bh} \\ \Sigma Cos(a+bx)=\ \ \dfrac{Sin(a+bx-\frac{1}{2}bh)}{2Sin\frac{1}{2}bh}. \end{cases}$$

Такъ какъ тригонометрическія функціи $Sin^m x$, $Cos^n x$, $Sin^m x.Cos^n x$, въ случаѣ m и n цѣлыхъ положительныхъ, всегда могутъ быть выражены посредствомъ синусовъ или косинусовъ кратныхъ дугъ, то ясно, что на основаніи формулъ (12), можно будетъ найти и интегралы

$$\Sigma Sin^m x,\quad \Sigma Cos^n x,\quad \Sigma Sin^m x.Cos^n x.$$

Вотъ три примѣра для поясненія:

a.) *Найти интегралъ* $\Sigma Sin^2 x$.

$$Sin^2 x=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}Cos\,2x,$$
$$\Sigma Sin^2 x=\tfrac{1}{2}\Sigma 1-\tfrac{1}{2}\Sigma Cos\,2x=\tfrac{1}{2}\Sigma x^0-\tfrac{1}{2}\Sigma Cos\,2x.$$

Но Σx^0, въ силу первой изъ формулъ (7) [§ 14], равенъ $\frac{x}{h}$, а $\Sigma Cos\,2x$, въ слѣдствіе втораго изъ уравненій (12), и предположивъ въ немъ $a=0$, $b=2$, равняется $\frac{Sin(2x-h)}{2Sin h}$; слѣдовательно

$$\Sigma Sin^2 x=\tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{h}-\frac{Sin(2x-h)}{2Sin h}\right).$$

b.) *Найти интегралъ* $\Sigma Cos^3 x$.

$$Cos^3 x=\tfrac{1}{4}Cos\,3x+\tfrac{3}{4}Cos\,x,$$
$$\Sigma Cos^3 x=\tfrac{1}{4}\Sigma Cos\,3x+\tfrac{3}{4}\Sigma Cos\,x$$
$$\Sigma Cos^3 x=\tfrac{1}{4}\left(\frac{Sin(3x-\frac{3}{2}h)}{2Sin\frac{3}{2}h}+\frac{3Sin(x-\frac{1}{2}h)}{2Sin\frac{1}{2}h}\right).$$

c.) *Найти интегралъ* $\Sigma Sin\,x.Cos\,x$.

$$Sin\,x.Cos\,x=\tfrac{1}{2}Sin\,2x$$
$$\Sigma Sin\,x.Cos\,x=\tfrac{1}{2}\Sigma Sin\,2x.$$

Въ слѣдствіе первой изъ формулъ (12), и предположивъ въ ней $a=0$, $b=2$, найдемъ

$$\Sigma Sin x.Cos x=-\frac{Cos(2x-h)}{4Sin h}.$$

Легко увѣриться, что и слѣдующая, болѣе общая функція

$$(Ax^\alpha+Bx^\beta+Cx^\gamma+\ldots)Sin^m x.Cos^n x.$$

можетъ быть интегрирована, когда показатели α, β, $\gamma\ldots$ m и n суть цѣлыя положительныя числа. Дѣйствительно, замѣнивъ $Sin x$ и $Cos x$ ихъ мнимыми выраженіями, разложивъ потомъ $Sin^m x$ и $Cos^n x$, и перемноживъ между собою найденныя разложенія, получимъ конечное число членовъ, изъ которыхъ каждый будетъ вида $Ke^{kx\sqrt{-1}}$, разумѣя подъ K и k постоянныя величины. Помноживъ эти члены на сумму $Ax^\alpha+Bx^\beta+\ldots$, найдемъ рядъ выраженій, изъ которыхъ каждое будетъ вида $Lx^\mu.e^{kx\sqrt{-1}}$, или, положивъ $e^{k\sqrt{-1}}=a$, вида $Lx^\mu a^x$. Но интегралъ $\Sigma x^\mu a^x$, когда μ есть цѣлое положительное число, можетъ быть найденъ по способу, изложенному въ § 17; слѣдовательно интегралъ

$$\Sigma(Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+\ldots)Sin^m x.Cos^n x,$$

при α, β, $\gamma\ldots$ m и n цѣлыхъ, также можетъ быть опредѣленъ.

§ 19. Одно изъ примѣчательнѣйшихъ приложеній обратнаго способа разностей состоитъ въ *суммованіи рядовъ*. Положимъ, что имѣемъ рядъ

(13) $$S_n=f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+f(a+3h)+\ldots\ldots+f(a+[n-1]h),$$

состоящій изъ n членовъ. Для нахожденія суммы S_n можно употребить формулу (6) [§ 12], въ слѣдствіе которой получимъ

$$\Sigma f(x)=u+S_n,$$

откуда

$$S_n=\Sigma f(x)-u.$$

Но если изобразимъ $\Sigma f(x)$ чрезъ $F(x)$, и вспомнимъ сказанное въ § 12 объ интегралѣ $\Sigma f(x)$ и объ количествѣ u, то получимъ

$$S_n=F(a+nh)-F(a).$$

Изъ этого уравненія извлекаемъ слѣдующее правило для суммованія рядовъ:

Пусть будетъ рядъ (13), *а* $f(x)$ *общій его членъ. Чтобы получить сумму* S_n *n первыхъ его членовъ, должно взять интегралъ общаго члена* $f(x)$, *и положивъ* $\Sigma f(x)=F(x)$, *подставить въ* $F(x)$ *сперва величину* $x=a+nh$, *а потомъ* $x=a$. *Разность* $F(a+nh)-F(a)$ *изобразитъ искомую сумму* S_n.

Это правило можетъ быть предложено и въ слѣдующемъ видѣ: имѣя рядъ

$$S_n=u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots+u_{n-1}$$

тожественный съ (13), получаемъ сумму S_n взявъ интегралъ члена u_n, непосредственно слѣдующаго за послѣднимъ u_{n-1}, и придавъ къ этому интегралу постоянное количество, которое опредѣляется предположеніемъ $n=1$. И такъ

(14) $$S_n=\Sigma u_n+C,$$

разумѣя подъ C постоянную величину. Мы прибавили къ интегралу Σu_n постоянное количество C, а не функцію $\varphi\left(Sin\frac{2\pi x}{h},\ Cos\frac{2\pi x}{h}\right)$, о которой говорено въ § 12; дѣйствительно, такъ какъ перемѣнная величина въ настоящемъ случаѣ есть цѣлое число n, а $h=1$, то предыдущая функція обратится въ $\varphi(Sin 2\pi n,\ Cos 2\pi n)=\varphi(0,1)$, то есть, въ величину постоянную.

Предлагаемъ нѣсколько примѣровъ суммованія рядовъ.

a.) Пусть будетъ рядъ кубовъ натуральныхъ чиселъ

$$s=1^3+2^3+3^3+\ldots.+(x-1)^3;$$

членъ, непосредственно слѣдующій за послѣднимъ $(x-1)^3$ будетъ x^3; слѣдовательно, по формулѣ (14),

$$s=\Sigma x^3+C.$$

И такъ, замѣтивъ что въ настоящемъ случаѣ $\Delta x=h=1$, получимъ въ слѣдствіе четвертой изъ формулъ (7) параграфа 14-го

$$s=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{4}+C.$$

Для опредѣленія постояннаго количества C, положимъ въ данномъ ряду $x=1$; получимъ $s=0$, и слѣдовательно

$$0=\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+C,\text{ откуда } C=0.$$

И такъ

$$s=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{4}=\frac{x^2(x^2-2x+1)}{4}=\left[\frac{x(x-1)}{2}\right]^2.$$

Но $\frac{x(x-1)}{2}$ изображаетъ сумму ариѳметической прогрессіи

$$1+2+3+\ldots.+(x-1);$$

слѣдовательно

$$[1+2+3+(x-1)]^2=1^3+2^3+3^3+\ldots.+(x-1)^3.$$

Эта формула выражаетъ довольно любопытное предложеніе изъ Теоріи Чиселъ.

b.) Положимъ, что имѣемъ рядъ

$$s=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots.+\frac{1}{(x-1)x}.$$

По формулѣ (14) найдется

$$s=\Sigma\frac{1}{x(x+1)}+C.$$

Но $\Sigma\frac{1}{x(x+1)}=-\frac{1}{x}$ [Смот. формулу (9) параграфа 16]; слѣдовательно

$$s=C-\frac{1}{x}.$$

Для опредѣленія постояннаго количества C, положимъ, что данный рядъ приводится къ первому своему члену $\frac{1}{1.2}$; въ такомъ предположеніи $x-1=1$ или $x=2$, и въ то же время $s=\frac{1}{1.2}$; и такъ

$$\frac{1}{1.2}=C-\tfrac{1}{2},\text{ откуда } C=1,$$

въ слѣдствіе чего

$$s=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}.$$

Очевидно, что положивъ рядъ $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots$ продолженнымъ до безконечности, то есть принявъ $x=\infty$, найдемъ изъ уравненія $s=C-\frac{1}{x}$, $s=C$, и какъ $C=1$, то и получимъ

$$1=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+ \text{ и проч.}$$

Сдѣланное здѣсь замѣчаніе о постоянномъ количествѣ C, изображающемъ сумму ряда, продолженнаго въ безконечность, относится и ко многимъ другимъ рядамъ.

c.) Вотъ примѣръ суммованія ряда, который приводитъ къ интегрированію показательной функціи: пусть будетъ строка

$$s=2.2^0+5.2^1+8.2^2+11.2^3+\ldots+[2+3(x-1)]2^{x-1}.$$

По общему правилу найдется

$$s=\Sigma(2+3x)2^x+C.$$

Въ слѣдствіе § 17 должно положить

$$\Sigma(2+3x)2^x=2^x(Ax+B);$$

взявъ разность обѣихъ частей этого уравненія въ предположеніи $\Delta x=h=1$, и раздѣливъ потомъ на 2^x, получимъ

$$2+3x=Ax+2A+B;$$

слѣдовательно

$$A=3,\ 2A+B=2, \text{ откуда } B=-4.$$

И такъ

$$s=C+2^x(3x-4);$$

если въ данномъ ряду положимъ $x=1$, то получимъ $s=2$; поэтому

$$2=C+2(3-4), \text{ откуда } C=4,$$

и наконецъ

$$s=4+2^x(3x-4).$$

Напримѣръ, если бы положили $x=6$, то получили бы $s=900$; и дѣйствительно

$$2.2^0+5.2^1+8.2^2+11.2^3+14.2^4+17.2^5=900.$$

d.) Для послѣдняго примѣра возьмемъ рядъ

$$s=\tfrac{1}{2}+Cos(x-a)+Cos\,2(x-a)+Cos\,3(x-a)+\ldots+Cos\,n(x-a),$$

объ которомъ говорено въ статьѣ CONVERGENCE D'UNE SÉRIE. Въ этомъ ряду перемѣнная величина есть n, а приращеніе ея равно единицѣ. И такъ

$$s=\tfrac{1}{2}+\Sigma\,Cos(n+1)(x-a)+C.$$

Для опредѣленія интеграла

$$\Sigma\,Cos(n+1)(x-a)=\Sigma\,Cos[(x-a)+(x-a)n],$$

обращаемся ко второй изъ формулъ (12) параграфа 18. Очевидно, что въ ней должно замѣнить величины a, b, x, h соотвѣтственно количествами $x-a$, $x-a$, n, 1. Такимъ образомъ получимъ

$$\Sigma\,Cos(n+1)(x-a)=\frac{Sin[(n+\frac{1}{2})(x-a)]}{2Sin\frac{1}{2}(x-a)},$$

въ слѣдствіе чего найдется

$$s=\tfrac{1}{2}+\frac{Sin[(n+\frac{1}{2})(x-a)]}{2Sin\frac{1}{2}(x-a)}+C.$$

Для опредѣленія постояннаго количества C замѣчаемъ, что сумма предложеннаго ряда, для $n=0$, приводится къ $\frac{1}{2}$, ибо, въ такомъ предположеніи, рядъ не будетъ заключать въ себѣ ни одного косинуса, а останется только первый членъ $\frac{1}{2}$. И такъ, для $n=0$, имѣемъ $s=\frac{1}{2}$; слѣдовательно предыдущее уравненіе доставитъ

$$\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+C, \text{ откуда } C=-\tfrac{1}{2},$$

и наконецъ, искомая сумма

$$s=\frac{Sin[(n+\frac{1}{2})(x-a)]}{2Sin\frac{1}{2}(x-a)}.$$

Мы ограничимся приведенными здѣсь приложеніями способа разностей: читатели найдутъ въ нѣкоторыхъ статьяхъ нашего Лексикона другія приложенія. Но, для полноты этой статьи, должно представить хотя краткое изложеніе теоріи уравненій въ разностяхъ, что и составитъ предметъ слѣдующихъ двухъ параграфовъ.

§ 20. Уравненіемъ въ разностяхъ называется всякое уравненіе, заключающее въ себѣ перемѣнныя величины и ихъ разности. Если изобразимъ чрезъ y искомую функцію, зависящую отъ одной перемѣнной x, приращеніе которой положимъ постояннымъ, то общій видъ разностнаго уравненія будетъ

$$F(x,\ y,\ \Delta y,\ \Delta^2 y,\ldots)=0.$$

Вмѣсто разностей Δy, $\Delta^2 y,\ldots$ можно подставить равныя имъ величины y_1-y, $y_2-2y_1+y,\ldots$ [Смот. § 9], и тогда предыдущее уравненіе обратится въ $f(x,\ y,\ y_1,\ y_2,\ldots)=0$. Въ этомъ видѣ обыкновенно разсматриваются уравненія въ разностяхъ.

Положимъ напримѣръ, что предложенное уравненіе будетъ втораго порядка, то есть вида

$$f(x,\ y,\ y_1,\ y_2)=0;$$

выведемъ изъ него

$$y_2=\mathrm{f}(x,\ y,\ y_1),$$

и слѣдовательно

$$y_3=\mathrm{f}(x+\Delta x,\ y_1,\ y_2)=\varphi(x,\ y,\ y_1)$$

$$y_4=\mathrm{f}(x+2\Delta x, y_2, y_3)=\varphi(x+\Delta x, y_1, y_2)=\varphi_1(x,y,y_1)$$

и проч. и проч.

И такъ заключаемъ, что изъ разностнаго уравненія втораго порядка выводимъ послѣдовательные члены ряда

$$y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5 \ldots$$

посредствомъ величинъ y и y_1. И вообще легко видѣть, что рядъ

$$y_m,\ y_{m+1},\ y_{m+2},\ldots\ldots$$

выведенный изъ разностнаго уравненія m-го порядка, будетъ заключать въ себѣ m членовъ $y,\ y_1,\ y_2,\ldots y_{m-1}$ произвольныхъ.

Интегрированіе уравненій въ разностяхъ представляетъ вообще большія затрудненія; чтобы дать хотя поверхностное понятіе объ этой теоріи, мы предложимъ здѣсь интегрированіе линейнаго уравненія перваго порядка, а потомъ одну задачу изъ Исчисленія Вѣроятностей, приводящую къ уравненію въ разностяхъ. Для дальнѣйшихъ же подробностей, отсылаемъ читателей къ статьѣ: GÉNÉRATRICES (FONCTIONS).

Пусть будетъ линейное разностное уравненіе

$$\Delta y + y f(x) = F(x),$$

подобное дифференціальному, извѣстному подъ названіемъ *Бернулліева*; Смот. BERNOULLI (ÉQUATION DE). Положимъ $\Delta x = 1$ и $y = Xz$, разумѣя подъ X неопредѣленную функцію перемѣнной x, а подъ z новую перемѣнную. Получимъ

$$X\Delta z + z\Delta X + \Delta X.\Delta z + f(x).Xz = F(x).$$

По причинѣ неопредѣленности X, можемъ положить

$$z\Delta X + f(x)Xz = 0 \text{ или } \Delta X + f(x)X = 0,$$

и слѣдовательно

$$X\Delta z + \Delta X.\Delta z = F(x).$$

И такъ, имѣемъ два уравненія

$$X\Delta z + \Delta X.\Delta z = F(x) \text{ и } \Delta X + f(x)X = 0;$$

изъ перваго выводимъ

$$\Delta z = \frac{F(x)}{X+\Delta X}, \text{ откуда } z = \Sigma\frac{F(x)}{X+\Delta X},$$

а изъ втораго

$$\frac{\Delta X}{X} = -f(x).$$

Чтобы найти интегралъ послѣдняго уравненія, положимъ $X = e^u$; получимъ $\Delta X = e^{u+\Delta u} - e^u$; слѣдовательно

$$e^u - 1 = -f(x),$$

откуда

$$e^{\Delta u} = 1 - f(x) \text{ или } \Delta u = log(1-f(x)),$$

и наконецъ

$$u = \Sigma log(1-f(x)).$$

Но такъ какъ интегралъ изображаетъ сумму всѣхъ значеній, допускаемыхъ подъинтегральною функціею между предѣлами интегрированія [Смот. § 11], то очевидно, что принявъ *нуль* за нижній предѣлъ, а x за верхній, и предположивъ какъ сказано выше $\Delta x = 1$, получимъ

$$u = log(1-f(0)) + log(1-f(1)) + log(1-f(2)) + \ldots\ldots + log(1-f(x-1)) =$$
$$log\{(1-f(0))(1-f(1))(1-f(2))\ldots\ldots(1-f(x-1))\};$$

но $X = e^u$, почему $u = log X$; слѣдовательно

$$X = (1-f(0))(1-f(1))(1-f(2))\cdot\ldots\ldots(1-f(x-1)).$$

Для простоты изобразимъ факторіальную функцію, выражающую величину X, знакоположеніемъ $\overset{x}{[1-f(x-1)]}$; и такъ

$$X = \overset{x}{[1-f(x-1)]},$$

откуда

$$X + \Delta X = \overset{x+1}{[1-f(x)]},$$

и слѣдовательно

$$\Delta z = \frac{F(x)}{X+\Delta X} = \frac{F(x)}{\overset{x+1}{[1-f(x)]}}.$$

Интегрируя эту формулу, и подставивъ на мѣсто z и X выведенныя для нихъ величины, найдемъ окончательно

$$(15)\qquad y = \overset{x}{[1-f(x-1)]}\left\{C + \Sigma\frac{F(x)}{\overset{x+1}{[1-f(x)]}}\right\},$$

гдѣ C изображаетъ постоянную величину. Приложивъ формулу (15) къ уравненію

$$\Delta y + \frac{y}{x} = \frac{3x+1}{x},$$

получимъ

$$f(x) = \frac{1}{x},\quad F(x) = \frac{3x+1}{x},\quad 1-f(x-1) = 1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1},$$

и слѣдовательно

$$\overset{x}{[1-f(x-1)]} = \frac{x-2}{x-1}\cdot\frac{x-3}{x-2}\cdot\frac{x-4}{x-3}\cdot\ldots\cdot = \frac{1}{x-1}$$

$$\overset{x+1}{[1-f(x)]} = \frac{x-1}{x}\cdot\frac{x-2}{x-1}\cdot\frac{x-3}{x-2}\cdot\ldots\cdot = \frac{1}{x}.$$

Подставивъ эти величины въ уравненіе (15), получимъ

$$y = \frac{1}{x-1}\left\{C + \Sigma(3x+1)\right\},$$

и наконецъ, въ силу § 14,

$$y=\frac{1}{x-1}\left\{C+\tfrac{1}{2}(3x^2-x)\right\}.$$

Легко удостовѣриться, что этотъ интегралъ удовлетворяетъ предложенному уравненію въ конечныхъ разностяхъ; дѣйствительно, если въ упомянутомъ интегралѣ замѣнимъ C величиною $\frac{c}{2}$, и представимъ его въ видѣ

$$2y(x-1)-3x^2+x=c,$$

то измѣнивъ x въ $x+1$, а y въ $y+\Delta y$, получимъ

$$2x(y+\Delta y)-3(x+1)^2+x+1=c;$$

вычтя изъ этого уравненія предыдущую формулу, найдемъ по сокращеніи

$$\Delta y+\frac{y}{x}=\frac{3x+1}{x},$$

то есть, предложенное разностное уравненіе.

Приводимъ теперь одну задачу изъ Исчисленія Вѣроятностей, рѣшеніе которой зависитъ отъ интегрированія весьма простаго разностнаго уравненія.

Изъ опредѣленнаго числа т жетоновъ, выдергиваемъ нѣсколько на удачу. Спрашивается, какъ велика вѣроятность, что число вынутыхъ жетоновъ будетъ чётное или нечётное?

Для удобности, называемъ жетоны буквами $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \mu$; положимъ что число ихъ равно m. Очевидно, что жетоны соединяются между собою въ нечётномъ числѣ или по *одиначкѣ*, или по *три*, или по *пяти*, и проч., а въ чётномъ числѣ, по *два*, по *четыре*, по *шести* и проч. Слѣдовательно нечётныя соединенія будутъ

(16) $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \alpha\beta\gamma, \alpha\beta\delta, \alpha\gamma\delta, \beta\gamma\delta, \ldots$

а чётныя

(17) $\alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta, \beta\gamma, \beta\delta, \gamma\delta, \ldots \alpha\beta\gamma\delta, \ldots$

Изобразимъ число нечётныхъ соединеній, соотвѣтствующихъ m жетонамъ или m буквамъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \mu$ чрезъ y_m, а чрезъ z_m число чётныхъ соединеній. Изъ самаго опредѣленія вѣроятности, дроби

(18) $$\frac{y_m}{y_m+z_m} \quad \text{и} \quad \frac{z_m}{y_m+z_m}$$

соотвѣтственно изобразятъ вѣроятности выхода нечётнаго и чётнаго числа жетоновъ. Если теперь, къ разсматриваемымъ m жетонамъ присовокупимъ еще одинъ, который означимъ буквою ν, то величины y_m и z_m обратятся въ y_{m+1} и z_{m+1}. Но, съ другой стороны, если прибавимъ новый жетонъ, или, что всё равно, введемъ лишнюю букву ν въ соединенія чётныя, т. е. въ рядъ (17), то всѣ члены этого ряда доставятъ нечётныя соединенія; сверхъ того получается еще одинъ новый случай; именно когда жетонъ ν выдернется одинъ. И такъ, при $m+1$ жетонѣ, кромѣ нечётныхъ соединеній (16), имѣемъ еще z_m+1 новыхъ, именно:

$\nu, \alpha\beta\nu, \alpha\gamma\nu, \alpha\delta\nu, \beta\gamma\nu, \beta\delta\nu, \gamma\delta\nu, \ldots \alpha\beta\gamma\delta\nu, \ldots$

Слѣдовательно

(19) $$y_{m+1}=y_m+z_m+1.$$

Что касается до новыхъ чётныхъ соединеній, происходящихъ отъ присовокупленія новаго жетона, то ихъ очевидно будетъ y_m, ибо они получатся чрезъ введеніе буквы ν въ рядъ (16), который въ этомъ предположеніи доставитъ слѣдующія соединенія:

$\alpha\nu, \beta\nu, \gamma\nu, \delta\nu, \ldots \alpha\beta\gamma\nu, \alpha\beta\delta\nu, \alpha\gamma\delta\nu, \beta\gamma\delta\nu, \ldots$

И такъ

(20) $$z_{m+1}=z_m+y_m.$$

Изъ уравненій (19) и (20) выводимъ

$$y_{m+1}=z_{m+1}+1,$$

и если уменьшимъ единицею указателей подъ y и z, то получимъ формулу

$$y_m=z_m+1,$$

въ силу которой уравненіе (19) приметъ слѣдующій весьма простой видъ:

(21) $$y_{m+1}=2y_m.$$

Вотъ разностное уравненіе перваго порядка; отъ его интегрированія зависитъ рѣшеніе занимающаго насъ вопроса. Если замѣнимъ въ немъ перемѣнную y_m просто буквою y, и слѣдовательно y_{m+1} суммою $y+\Delta y$, то найденное уравненіе приметъ видъ

$$\Delta y=y,$$

и будетъ весьма частнымъ случаемъ разсмотрѣннаго выше уравненія $\Delta y+yf(x)=F(x)$. Покажемъ непосредственное интегрированіе уравненія (21). Для этого измѣняемъ въ немъ послѣдовательно m въ $m-1$, $m-2$, $m-3, \ldots$, и находимъ рядъ равенствъ

$$y_m=2y_{m-1}$$
$$y_{m-1}=2y_{m-2}$$
$$y_{m-2}=2y_{m-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$y_3=2y_2$$
$$y_2=2y_1.$$

Перемноживъ между собою всѣ эти уравненія, и сокративъ на произведеніе .... $y_{m-1} \cdot y_{m-2} \cdot y_{m-3} \cdots y_2$, получимъ

$$y_m = 2^{m-1} \cdot y_1\,;$$

очевидно что $y_1 = 1$, ибо въ этомъ случаѣ $m = 1$, т. е. имѣемъ только одинъ жетонъ. И такъ

$$y^m = 2^{m-1}, \quad z^m = 2^{m-1} - 1.$$

Подставивъ эти величины въ формулы (18), найдемъ для искомыхъ вѣроятностей слѣдующія выраженія:

$$\frac{y_m}{y_m + z_m} = \frac{2^{m-1}}{2^m - 1}, \quad \frac{z_m}{y_m + z_m} = \frac{2^{m-1} - 1}{2^m - 1}.$$

Напримѣръ, для $m = 5$, найдемъ что вѣроятность вынуть *нечётное* число жетоновъ равна $\frac{2^4}{2^5 - 1} = \frac{16}{31}$, а *чётное* число, $\frac{15}{31}$. Замѣтимъ мимоходомъ, что при какомъ ни есть числѣ жетоновъ, вѣроятность вынуть нечётное число жетоновъ всегда превосходитъ вѣроятность появленія чётнаго числа, ибо число соединеній, соотвѣтствующихъ первому случаю, превышаетъ единицею совокупность соединеній, относящихся ко второму.

§ 21. Сверхъ чисто разностныхъ уравненій разсматриваются еще *уравненія въ частныхъ разностяхъ* (*équations aux différences finies et partielles*) и *дифференціально-разностныя уравненія* (*équations aux différences mêlées*).

Чтобы объяснить что̀ должно разумѣть подъ наименованіемъ уравненія въ частныхъ разностяхъ, условимся изображать чрезъ $z_{x,y}$ какую ни есть функцію перемѣнныхъ x и y; $z_{x+1,y}$ будетъ означать ту же функцію z, въ которой перемѣнная x, получила приращеніе, равное единицѣ, между тѣмъ какъ величина y не измѣнилась, а $z_{x,y+1}$ изобразитъ величину, въ которую обратится функція z, когда y получитъ приращеніе, равное также единицѣ, между тѣмъ какъ x останется постояннымъ. Выраженія $z_{x+1,y} - z_{x,y} = \Delta_x z_{x,y}$ и $z_{x,y+1} - z_{x,y} = \Delta_y z_{x,y}$ соотвѣтственно изображаютъ *частныя разности* (*différences partielles*), функціи $z_{x,y}$, взятыя относительно перемѣнныхъ x и y. Всякое уравненіе, заключающее въ себѣ выраженія $z_{x,y}$, $z_{x+1,y}$, $z_{x,y+1}$, $z_{x+1,y+1}$ и проч. называется уравненіемъ въ частныхъ разностяхъ. Вотъ примѣръ:

$$z_{x+1,y+1} = a z_{x,y} + (1-a) z_{x,y+1}.$$

Дифференціально — разностнымъ уравненіемъ называется всякое уравненіе, въ которое входятъ дифференціалы и разности перемѣнныхъ величинъ. Напримѣръ

$$\frac{d\Delta y}{dx} + x\Delta y + \frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + x = 0.$$

Кондорсетъ и *Лапласъ* первые занимались интегрированіемъ этого рода уравненій. Труды *Лагранжа* и *Лапласа* по сему предмету помѣщены въ разныхъ Мемуарахъ (*Mémoires de Berlin*, 1775 г., *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, Томы VI и VII, *Théorie analytique des Probabilités*).

Для руководства по части Исчисленія Разностей, указываемъ преимущественно на слѣдующія сочиненія:

Эйлера: *Institutiones Calculi differentialis*, 1755 г.

Боссю и Кузеня (Cousin): *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral.*

Прони: *Méthode directe et inverse des différences.*

Швейнса (Schweins): Theorie der Differenzen und Differentiale, Heidelberg, 1825.

Эттингера (Oettinger): Differenzial und Differenzen-Calcul, Mainz, 1831.

На Русскомъ языкѣ: Курсъ Математики *Осиповскаго* и нѣкоторые переводные курсы, какъ то: *Кузена*, *Лакроа* и проч.

DIFFERENTIATIO DE CURVA IN CURVAM. Смот. CURVA IN CURVAM.

DIFFÉRENTIATION. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНІЕ. Нахожденіе дифференціала; Смот. DIFFÉRENTIEL (CALCUL).

DIFFÉRENTIEL. ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЙ. *Quantité différentielle* или просто *différentielle*; *дифференціальное количество*, *дифференціалъ*. Смот. DIFFÉRENTIEL (CALCUL). *Triangle différentiel*; *дифференціальный треугольникъ*. Смот. CARACTERISTIQUE (TRIANGLE).

MÉTHODE DIFFÉRENTIELLE. ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЙ СПОСОБЪ. Такъ назвалъ *Нютонъ* способъ для построенія нѣкоторой кривой, изъ рода параболъ, проходящей чрезъ нѣсколько данныхъ точекъ. Этотъ способъ, объясненный Нютономъ въ небольшемъ сочиненіи *Methodus differentialis*, основанъ на разсматриваніи разностей вторыхъ, третьихъ и проч. ординатъ данныхъ точекъ. — Подъ Дифференціальнымъ способомъ разумѣютъ также опредѣленіе интеграловъ нѣкоторыхъ дифференціальныхъ выраженій объ одной или нѣсколькихъ перемѣнныхъ. — Дифференціальное Исчисленіе.

DIFFÉRENTIEL (CALCUL). ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНІЕ. Открытіе Дифференціальнаго Исчисленія составляетъ безъ сомнѣнія самую блистательную эпоху въ лѣтописяхъ точныхъ наукъ, даже, можно сказать, въ исторіи успѣховъ ума человѣческаго. Отъ временъ Архимеда и Аполлонія, величайшихъ геометровъ древности, до самаго Декарта, не встрѣчаемъ ни одного открытія, которое бы значительно расширило предѣлы знаній математическихъ. Въ началѣ XVII вѣка знаменитый Французскій философъ произвелъ счастливый переворотъ въ Геометріи, введя въ нее формулы аналитическія; Смот. COURBE. Но множество важныхъ вопросовъ, относящихся къ чистому Анализу, къ Геометріи, и въ особенности къ Естественной Философіи, оставались нерѣшенными: ихъ рѣшеніе превышало силы Декартова анализа. Недостаточность новаго способа обнаруживалась преимущественно въ изысканіяхъ, въ которыхъ надлежало уловить отношенія измѣняющихся по извѣстному закону величинъ въ то самое мгновеніе, когда эти величины изчезаютъ. Многія попытки для рѣшенія такого разряда задачъ изъ Геометріи кривыхъ, были предложены математиками XVII столѣтія; удовлетворительнѣйшій опытъ въ этомъ родѣ былъ способъ для проведенія касательныхъ къ кривымъ, придуманный Англійскимъ математикомъ *Барровымъ* (*Barrow*), наставникомъ *Нютона*. Мы упоминаемъ о способѣ проведенія касательныхъ потому что этотъ вопросъ, по всей вѣроятности, привелъ къ изобрѣтенію Дифференціальнаго Исчисленія. Связь этого вопроса съ основною идеею Дифференціальнаго анализа будетъ показана ниже (Смот. Изложеніе правилъ Дифференціальнаго Исчисленія, §1.).

Древніе геометры умѣли проводить касательныя къ коническимъ сѣченіямъ и къ нѣкоторымъ другимъ алгебрическимъ кривымъ; *Архимедъ* рѣшилъ эту задачу даже для спирали, трансцендентной кривой. Но способы древнихъ были всѣ односторонни: для каждой кривой они употребляли особенный пріёмъ, ей одной свойственный. Первые единообразные способы для проведенія касательныхъ были предложены не прежде XVII столѣтія. Примѣчательнѣйшіе изъ нихъ принадлежали *Декарту*, *Фермату* и *Баррову*, о которомъ мы уже упомянули. Хотя всѣ эти способы и имѣли большое преимущество предъ пріёмами древнихъ со стороны общности, но далеко еще не удовлетворяли всѣмъ требованіямъ. Они нетолько не распространялись на трансцендентныя кривыя, но даже требовали, чтобы уравненіе и алгебрической кривой было освобождено отъ радикаловъ; удовлетвореніе послѣднему условію, въ бо́льшей части случаевъ, приводило къ выкладкамъ весьма сложнымъ.

Въ такомъ состояніи находилась задача о касательныхъ до 1684 года, незабвеннаго въ лѣтописяхъ Математики. Въ этомъ году *Лейбницъ* напечаталъ въ *Лейпцигскихъ Актахъ* (за Октябрь мѣсяцъ) Разсужденіе подъ заглавіемъ: *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* *) Въ немъ заключались первыя начала Дифференціальнаго Исчисленія, а въ 1686 году онъ же, въ Разсужденіи своемъ: De Geometriâ reconditâ et Analysi indivisibilium atque infinitorum **), положилъ основанія *Интегральному Исчисленію*. Съ этого времени начинается для наукъ математическихъ новая эпоха: множество изъ важнѣйшихъ вопросовъ чистаго анализа, Геометріи и Естественной Философіи, рѣшеніе которыхъ было предметомъ тщетныхъ усилій первостепенныхъ геометровъ прежняго времени, были подвергнуты новому анализу: попытки бо́льшею частію увѣнчались успѣхомъ. Тогда поняли могущество новаго орудія, и всѣ старанія обратились на его усовершеніе.

Въ началѣ 1687 года, слѣдовательно спустя два года послѣ того, какъ Лейбницъ обнародовалъ свое открытіе, Нютонъ издалъ свои *Математическія начала Естественной Философіи* (*Philosophiae naturalis principia mathematica*). Въ этомъ

*) *Новый способъ для наибольшихъ и для наименьшихъ, а также для касательныхъ, приличествующій какъ дробнымъ, такъ и ирраціональнымъ количествамъ, и объ особенномъ для сего родѣ исчисленія.*

**) *Объ возстановленной Геометріи и объ Анализѣ недѣлимыхъ и безконечныхъ.*

безсмертномъ творенiи онъ объяснилъ посредствомъ наблюденiй и вычисленiй главныя явленiя природы, и преимущественно движенiя небесныхъ тѣлъ. При рѣшенiи труднѣйшихъ вопросовъ Нютонъ руководствовался такъ названнымъ имъ *способомъ флюкцiй* (*méthode des fluxions*). Этотъ способъ, по сущности своей, былъ одно и то же что Лейбницево Дифференцiальное Исчисленiе, отъ котораго отличался только знакоположенiемъ и метафизическимъ воззрѣнiемъ на основныя начала.

Вотъ первые труды, положившiе основанiе Дифференцiальному и Интегральному Анализу. Теперь возникаетъ вопросъ, кому изъ двухъ великихъ геометровъ принадлежитъ слава открытiя? Этотъ вопросъ подалъ поводъ къ жаркому пренiю между Лейбницемъ и Нютономъ, или, лучше, между Германiею и Англiей. Первостепенные математики того и другаго Государства, соединяя съ первенствомъ этого важнаго открытiя понятiе о народной славѣ, защищали права роднаго имъ геометра. Такое пренiе не могло быть безпристрастнымъ; и дѣйствительно, при жизни двухъ знаменитыхъ совмѣстниковъ, спорная статья осталась нерѣшенною. Если бы время обнародованiя Новаго Анализа могло рѣшить вопросъ, то первенство неотъемлемо осталось бы за Лейбницемъ, потому что Разсужденiе Германскаго геометра, какъ сказано выше, напечатано въ 1684 году, а книга Нютона издана только въ началѣ 1687 года. Но, не говоря уже о томъ, что знаменитое творенiе Нютона, по многотрудности изложенныхъ въ ней теорiй, не могло быть написано въ короткiй промежутокъ времени, протекшiй со дня обнародованiя Лейбницемъ своего открытiя, — чѣмъ Англiйскiй геометръ ограждается отъ всякаго подозрѣнiя въ заимствованiи своего способа у Лейбница, — нѣкоторыя письма Нютона доказываютъ, что онъ обладалъ уже способомъ флюкцiй гораздо прежде 1684 года. Это обстоятельство послужило предлогомъ къ обвиненiю Лейбница въ присвоенiи чужаго открытiя. Войдемъ въ нѣкоторыя подробности по этому спорному вопросу.

Женевскiй математикъ *Николай Фацiо Дюилье* (*Fatio de Duillier*), поселившiйся въ Лондонѣ, былъ первымъ зачинщикомъ пренiя между Лейбницемъ и Нютономъ. Подстрекаемый съ одной стороны Англичанами, а съ другой можетъ быть личнымъ неудовольствiемъ на Лейбница, будто бы не оказавшимъ должнаго уваженiя его знанiямъ въ Математикѣ, онъ, въ письмѣ къ *Гугенсу* отъ $\frac{18}{28}$ Декабря 1691 года, нетолько назвалъ Нютона первымъ изобрѣтателемъ Дифференцiальнаго Исчисленiя, но даже намекнулъ, что Лейбницъ заимствовалъ свой способъ изъ переписки, которую велъ съ Нютономъ *). Фацiо повторилъ содержанiе письма въ напечатанномъ имъ сочиненiи объ *кривой наискорѣйшаго ската и объ тѣлѣ наименьшаго сопротивленiя.* На это явное оскорбленiе Лейбницъ отвѣчалъ съ умѣренностiю, что отнюдь не желаетъ вступать въ пренiе о первенствѣ съ Нютономъ, къ которому исполненъ глубокаго уваженiя, и увѣренъ, что Нютонъ не одобритъ поступка Фацiо. Потомъ Лейбницъ привелъ нѣкоторые факты въ опроверженiе навѣта Фацiо, и окончательно объявилъ, что во всемъ полагается на свидѣтельство и добросовѣстность самаго Нютона. Нападки Женевца, не основанные ни на какихъ доказательствахъ, были забыты на нѣсколько лѣтъ

Новый случай подалъ поводъ къ возобновленiю прежняго спора. Въ 1704 году изданы въ свѣтъ два сочиненiя Нютона: *De quadratura curvarum* и *Enumeratio linearum tertii ordinis.* Разборъ этихъ сочиненiй, помѣщенный въ Лейпцигскихъ Актахъ, и, какъ думаютъ, съ согласiя Лейбница, былъ несовсѣмъ благопрiятенъ для Нютона. Англiйскiе математики оскорбились этимъ отзывомъ. Одинъ изъ нихъ, по имени Кейлъ, въ *Philosophical Transactions*, за 1708 годъ, помѣстилъ статью, въ которой назвалъ Нютона первымъ изобрѣтателемъ способа флюкцiй, и присовокупилъ, что Лейбницъ, въ изданномъ имъ Разсужденiи въ 1684 г перемѣнилъ только названiе способа и его знакоположенiе. Лейбницъ видя, что Кейлъ явно обвиняетъ его въ присвоенiи чужаго открытiя, отнесся письмомъ къ *Гансъ Слоану* (*Hans Sloane*), Секретарю Лондонскаго Королевскаго Общества, требуя чтобы авторъ этой статьи гласно отрекся отъ словъ своихъ. На это Кейлъ, въ письмѣ къ Гансъ

*) Смот. вторую часть (стр. 126) любопытной книги *Уйленброка*, о которой упомянуто въ статьѣ CONGRUENCE нашего Лексикона. Въ этой же книгѣ читатели найдутъ и другiя историческiя подробности объ открытiи Дифференцiальнаго Исчисленiя въ перепискѣ Лейбница съ Гугенсомъ

Слоану, отвѣчалъ, что не можетъ отложиться отъ прежняго своего мнѣнія, въ подтвержденіе котораго привелъ разные доводы; къ этому Кейлъ прибавилъ, что Нютонъ сообщилъ о своемъ новомъ способѣ столько намековъ Лейбницу, что даже умъ посредственный могъ бы разгадать тайну. Это письмо было сообщено Лейбницу. Оскорбленный такимъ поступкомъ, онъ обратился къ Королевскому Обществу съ настоятельною просьбою прекратить необдуманные толки человѣка, который пытается очернить его доброе имя. Въ слѣдствіе этого, Королевское Общество нарядило Коммисію для разсмотрѣнія спорнаго дѣла. Коммисары представили свое мнѣніе, основанное на разныхъ документахъ, которые и были напечатаны въ первый разъ 1712 года подъ заглавіемъ: *Commercium epistolicum de analysi promotâ*, и потомъ, со многими дополненіями, въ 1722 году. Предлагаемъ нашимъ читателямъ это мнѣніе въ переводѣ.

Донесеніе членовъ Королевскаго Общества, наряженныхъ для разсмотрѣнія жалобы Лейбница на Кейля.

„Между всѣми письмами и сборниками (*recueils*), находящимися въ Архивѣ Общества, также между бумагами *Г. Коллинса*, мы разсмотрѣли все, что было писано съ 1669 по 1677 годъ включительно; мы показывали эти бумаги людямъ, которые знали почеркъ Гг. *Баррова*, *Коллинса*, *Ольденбурга и Лейбница*; они признали подлинность писемъ; письма же Г. *Грегори*, мы сравнили между собою, и свѣрили нѣкоторыя изъ нихъ съ копіями, списанными Г. *Коллинсомъ*. Мы сняли копіи съ тѣхъ изъ упомянутыхъ бумагъ, которыя имѣли какую либо связь съ возложеннымъ на насъ дѣломъ; свидѣтельствуемъ въ вѣрности всѣхъ сихъ выписокъ, и представляемъ ихъ вмѣстѣ съ подлинными.

Изъ сихъ писемъ и бумагъ мы заключили слѣдующее:

1⁰. Г. *Лейбницъ* былъ въ Лондонѣ въ началѣ 1673 года, а оттуда отправился въ Парижъ въ началѣ Марта того же года. Въ бытность свою въ Парижѣ онъ велъ переписку съ Г. *Коллинсомъ* до Сентября 1676 года; посредникомъ переписки былъ Г. *Ольденбургъ*. Потомъ Г. *Лейбницъ* возвратился въ Гановеръ, и на возвратномъ пути былъ опять въ Лондонѣ и въ Амстердамѣ. Впрочемъ, изъ писемъ видно, что Г. *Коллинсъ* сообщалъ искуснымъ математикамъ всё, что узнавалъ самъ отъ Гг. *Нютона* и *Грегори*.

2⁰. Г. *Лейбницъ*, во время перваго своего пребыванія въ Лондонѣ, говорилъ что изобрѣлъ способъ исчисленія, который назвалъ Диффёренціальнымъ; хотя Докторъ *Пелль* и показывалъ ему, что это исчисленіе не иное что, какъ способъ *Мутона**); но *Лейбницъ* настаивалъ, что открытіе принадлежитъ ему: во первыхъ, потому что до изобрѣтенія своего исчисленія онъ ничего не зналъ о способѣ *Мутона*, а во вторыхъ, что онъ развилъ свое открытіе гораздо болѣе, нежели *Мутонъ*. Мы не могли замѣтить, чтобы Г. *Лейбницъ* зналъ иной Диффёренціальный способъ, кромѣ *Мутонова*, прежде письма, которое онъ писалъ къ *Ольденбургу* 21 Іюня 1677 года, слѣдовательно спустя годъ послѣ того, какъ письмо *Нютона* къ *Коллинсу* отъ 10 Декабря 1672 года было послано въ Парижъ для сообщенія *Лейбницу*, и по прошествіи слишкомъ четырехъ лѣтъ съ того времени, какъ *Коллинсъ* началъ сообщать это самое письмо многимъ ученымъ, съ которыми былъ въ сношеніяхъ. Должно замѣтить, что въ упоминаемомъ письмѣ Г. *Нютона*, изложеніе способа флюкцій покажется удовлетворительнымъ для ума смѣтливаго.

3⁰. Изъ письма Г. *Нютона* отъ 13 Іюня 1676 года очевидно слѣдуетъ, что онъ обладалъ способомъ флюкцій за пять лѣтъ передъ тѣмъ временемъ, какъ писалъ это письмо, а трактатъ его: *Analysis per Æquationes numero terminorum infinitas*, посланный въ 1669 году Г. *Коллинсу* Докторомъ *Барровымъ*, доказываетъ, что *Нютонъ* открылъ свой способъ еще прежде.

4⁰. Диффёренціальный способъ одинаковъ со способомъ флюкцій; они различаются между собою

*) Способъ, о которомъ упоминается здѣсь, состоялъ въ *суммованіи рядовъ* посредствомъ конечныхъ разностей ихъ членовъ. Докторъ *Пелль* показалъ *Лейбницу*, что способъ, который онъ считалъ новымъ, напечатанъ уже въ 1670 году въ книгѣ *объ видимыхъ діаметрахъ солнца и луны*, изданной Ліонскимъ каноникомъ *Мутономъ*. Это обстоятельство приводитъ самъ Лейбницъ въ письмѣ своемъ къ Ольденбургу, присовокупляя къ тому, что онъ изобрѣлъ уже другой, совершеннѣйшій способъ. Впрочемъ должно замѣтить, что способъ, о которомъ идетъ рѣчь, не есть собственно Диффёренціальный, ибо въ немъ разсматриваются *конечныя*, а не *безконечно малыя* разности.

Примѣч. соч. Лексикона.

только названіемъ и знакоположеніемъ. Г. *Лейбницъ* называетъ *дифференціалами* то, что Г. *Нютонъ* именуетъ *моментами* или *флюкціями* (*moments* или *fluxions*); сверхъ того, Г. *Нютонъ* не употребляетъ знака *d*, которымъ Г. *Лейбницъ* означаетъ диффренціалы. По сей-то причинѣ мы и думаемъ, что вопросъ вовсе не состоитъ въ томъ, чтобы знать, кто открылъ тотъ или другой изъ этихъ двухъ способовъ; но надобно рѣшить, кто былъ первымъ изобрѣтателемъ способа, который, по сущности своей, одинъ и тотъ же. Въ этомъ отношеніи мы думаемъ, что тѣ, которые приписывали Г. *Лейбницу* первенство сего открытія, не имѣли достаточныхъ свѣдѣній, а можетъ быть и никакихъ, о перепискѣ, которую Г. *Лейбницъ* велъ гораздо прежде съ Гг. *Коллинсомъ* и *Ольденбургомъ*, и что имъ также было неизвѣстно, что Г. *Нютонъ* обладалъ способомъ флюкцій еще за 15 лѣтъ передъ тѣмъ, какъ Г. *Лейбницъ* напечаталъ въ *Лейпцигскихъ Актахъ* свое Разсужденіе объ этомъ предметѣ.

По всѣмъ симъ причинамъ намъ кажется, что Г. *Нютонъ* есть первый изобрѣтатель исчисленія, о которомъ говоримъ, и мы думаемъ, что Г. *Кейлъ*, во всемъ сказанномъ имъ, не оскорбилъ Г. *Лейбница*. Предоставляемъ Обществу разсудить, не признаетъ ли онъ нужнымъ напечатать выписки изъ писемъ и бумагъ, которыя мы нынѣ представляемъ, и присовокупить къ нимъ всё, что находится по сему предмету въ третьемъ томѣ сочиненій *Вальиса*."

Это донесеніе раздражило Лейбница, и споръ не прекратился. Разныя безъименныя сочиненія, въ которыхъ скорѣе нападали на способъ Нютона, чѣмъ защищали права Лейбница на первенство открытія, были изданы на твердой землѣ. Англійскіе математики отвѣчали на нихъ. Въ продолженіи этой полемики, Лейбницъ желая, какъ онъ выразился, *пощупать пульсъ у Англичанъ*, предложилъ имъ чрезъ другихъ математиковъ задачу объ *траэкторіяхъ*. Вопросъ состоялъ въ опредѣленіи кривой линіи, пересѣкающей рядъ данныхъ кривыхъ одного и того же рода подъ угломъ, или постояннымъ, или измѣняющимся по извѣстному закону. Нютонъ, къ которому собственно относился вызовъ, немедленно предложилъ способъ для приведенія этого вопроса къ дифференціальному уравненію. Въ это время умеръ Лейбницъ (1716 г.); *Иванъ Бернулли*, вступаясь за дѣло знаменитаго Германскаго геометра, прочиталъ рѣшеніе Нютона, и объявилъ, что оно вовсе не удовлетворительно, потому что главное затрудненіе состоитъ въ интегрированіи дифференціальнаго уравненія, чего не сдѣлалъ Нютонъ; Смот. TRAJECTOIRES (PROBLÊME DES). Съ этого времени, сколько извѣстно, Нютонъ, съ одной стороны обезпеченный своею громкою славою, а съ другой, по преклонности лѣтъ, не принималъ уже никакого участія въ распрѣ; но нѣкоторые приверженцы и ученики его не покинули поприща пренія. Наиболѣе отличившійся на немъ былъ извѣстный *Тайлоръ*.

Изъ всѣхъ приведенныхъ здѣсь обстоятельствъ можно заключить съ достовѣрностію, что способъ флюкцій, или, что всё равно, Дифференціальное Исчисленіе есть открытіе Нютона. Этотъ фактъ не подлежитъ никакому сомнѣнію. Остается рѣшить вопросъ: открылъ ли Лейбницъ съ своей стороны это исчисленіе, или заимствовалъ его изъ писемъ Нютона и разговоровъ съ Англійскими математиками во время своего пребыванія въ Англіи, что̀ было, какъ мы видѣли, въ началѣ 1673 года?

Нынѣ математики почти единогласно рѣшаютъ этотъ вопросъ въ пользу Лейбница. Представляемъ въ короткихъ словахъ обстоятельства, на которыхъ можно основать оправданіе его противъ обвиненія Англійскихъ математиковъ. И замѣтимъ во первыхъ, что донесеніе членовъ Лондонскаго Королевскаго Общества было написано подъ вліяніемъ обстоятельствъ, неблагопріятныхъ для Лейбница. Дѣйствительно, коммисары могли быть увлечены невольнымъ образомъ за предѣлы справедливости съ одной стороны чувствомъ народной славы, а съ другой глубокимъ уваженіемъ къ Нютону, бывшему тогда Президентомъ Королевскаго Общества, изъ среды котораго они были назначены. Во вторыхъ, при внимательномъ чтеніи писемъ, напечатанныхъ въ *Commercium epistolicum*, усматриваемъ, что Лейбницъ не могъ извлечь изъ нихъ никакого свѣдѣнія о способѣ флюкцій; и въ самомъ дѣлѣ, въ этихъ письмахъ упоминается только о выгодахъ и о пользѣ способа Нютона; что же касается до началъ, на которыхъ основано его исчисленіе, то объ этомъ ничего въ нихъ не ходимъ. Въ одномъ только письмѣ къ Ольденбургу, отъ 24 Октября 1676 года, Нютонъ приводитъ безъ доказательствъ нѣсколько предложеній, основанныхъ на способѣ флюкцій, и прибавляетъ, что вывелъ эти теоремы изъ рѣшенія одного общаго вопроса, который и приводитъ въ письмѣ своемъ, но въ загадочномъ видѣ, переставляя буквы. Если бы даже Лейбницъ и разобралъ этотъ логогрифъ, то прочелъ бы только слѣдующее: *Дано уравненіе, заключающее въ себѣ количества текущія* (*quantités fluentes*), *найти теченія* (*fluxions*), *и наоборотъ*. Могъ ли Лейбницъ узнать изъ этого хотя что либо о способѣ флюкцій? Это письмо было сообщено Лейбницу въ 1677 году, и онъ, въ отвѣтѣ своемъ отъ 21 Іюня 1677, писанномъ къ Ольденбургу въ слѣдствіе этого письма, объяснилъ открыто начала своего Дифференціальнаго Исчисленія, присовокупляя, что давно уже употребляетъ этотъ способъ для проведенія касательныхъ къ кривымъ.

Наконецъ, сильнѣйшій доводъ въ пользу Лейбница есть свидѣтельство самого Нютона. Мы говоримъ о *Примѣчаніи* на VII *Предложеніе* второй книги: *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Вотъ переводъ этого примѣчанія: „*Десять лѣтъ тому назадъ, когда я велъ переписку съ весьма ученымъ геометромъ Г. Лейбницемъ, я писалъ къ нему, что имѣю способъ для опредѣленія* наибольшихъ *и* наименьшихъ *величинъ, для проведенія касательныхъ и для рѣшенія другихъ подобныхъ вопросовъ, и что способъ мой съ такою же удобностію можетъ быть употребленъ для уравненій, заключающихъ въ себѣ радикалы, какъ и для раціональныхъ. Я скрылъ тогда свой способъ подъ переставленными буквами, которыхъ значеніе было слѣдующее*: Дано уравненіе, заключающее въ себѣ сколько угодно количествъ текущихъ, найти теченія, и наоборотъ. *На это знаменитый Лейбницъ отвѣчалъ, что съ своей стороны онъ нашелъ подобный способъ, который и сообщилъ мнѣ въ томъ же письмѣ; его способъ разнился отъ моего только названіемъ и знакоположеніемъ.*“ Это примѣчаніе находится еще въ изданіяхъ 1713 и 1714 годовъ, напечатанныхъ, какъ полагаютъ, безъ вѣдома Нютона, а выпущено изъ изданія 1726 года.

Представивъ краткое обозрѣніе обстоятельствъ, относящихся къ пренію, которому подало поводъ открытіе Дифференціальнаго Исчисленія, должно упомянуть также и о нападеніяхъ на новый анализъ. Ньёвентітъ (*Nieuwentiit*), весьма посредственный математикъ, первый вооружился противъ новаго способа; на его возраженія, напечатанныя въ 1694 и 1695 годахъ, отвѣчалъ самъ Лейбницъ (*Act. Lips.* 1694), а впослѣдствіи *Бернулли* и *Германъ*, которые съ очевидностію доказали, что противникъ Дифференціальнаго Исчисленія рѣшительно не понималъ его.

Въ 1701 году искусный алгебристъ *Ролль*, изобрѣтатель *способа каскадъ*, возсталъ противъ новаго анализа, и съ необыкновеннымъ жаромъ и самоувѣренностію преслѣдовалъ его до 1705 года. Онъ нетолько нападалъ на основныя начала Дифференціальнаго Исчисленія, но старался даже доказать удачно выбранными примѣрами, что оно часто приводитъ къ заключеніямъ ошибочнымъ. *Соренъ* (*Saurin*) и *Вариньонъ*, ревностный защитникъ Дифференціальнаго Исчисленія, отвѣчали на эти возраженія, и объяснили кажущіяся противорѣчія, которыми Ролль старался вселить сомнѣнія на счётъ непогрѣшительности результатовъ, доставляемыхъ новымъ анализомъ.

Въ 1734 году Англійскій Эпископъ, Докторъ *Берклей*, возобновилъ гоненіе на способъ флюкцій, и присовокупилъ къ тому еще безразсудное обвиненіе математиковъ въ невѣріи. *Миддлетонъ* и *Смитъ*, имѣя въ виду преимущественно странность второй обвинительной статьи, въ отвѣтѣ своемъ осмѣяли Берклея. *Вильсонъ* и *Робинсъ* издали также въ 1735 году небольшія отвѣтныя сочиненія на возраженія Берклея противъ Нютонова способа флюкцій.

Послѣ сего краткаго очерка исторіи открытія Дифференціальнаго Исчисленія, надлежало бы представить читателямъ обозрѣніе его успѣховъ. Но, въ этомъ отношеніи, *Дифференціальное Исчисленіе*, собственно говоря, заключаетъ въ себѣ мало любопытнаго. Почти всѣ примѣчательныя теоріи и усовершенствованія Анализа Безконечныхъ принадлежатъ къ исторіи Интегральнаго Исчисленія, къ которой и отсылаемъ читателей. Историческія же подробности, собственно относящіяся къ Дифференціальному Исчисленію, помѣщены въ своемъ мѣстѣ въ отдѣльныхъ статьяхъ нашего Лексикона. Смот. преимущественно: TAYLOR (THÉORÊME DE), MACLAURIN (THÉORÊME DE), FRACTION, MAXIMA ET MINIMA (THÉORIE

DES), SÉRIE, COURBE, DÉVELOPPÉE, CAUSTIQUE, CRÉPUSCULE (PROBLÊME DU PLUS COURT) и проч. и проч. Скажемъ только, что изъ современниковъ Нютона и Лейбница преимущественно содѣйствовали успѣхамъ Дифференціальнаго Исчисленія братья *Яковъ* и *Иванъ Бернулли*, *Маркизъ де Л'Опиталь*, извѣстный сочиненіемъ своимъ: *Analyse des infiniment petits*, *Паранъ* (*Parent*), *Вариньонъ*, *Соренъ* и нѣкоторые другіе математики, менѣе извѣстные.

Предлагаемъ теперь сжатое, но вмѣстѣ съ тѣмъ полное изложеніе правилъ Дифференціальнаго Исчисленія. Въ нѣкоторыхъ мѣстахъ мы воспользовались воззрѣніемъ Г. *Коши* на этотъ предметъ; въ другихъ, предложили правила въ иномъ видѣ. Во всѣхъ случаяхъ старались по возможности сократить доказательства, не нарушая ихъ строгости. Что касается до приложеній этой отрасли анализа къ различнымъ теоріямъ, то читатели найдутъ ихъ въ отдѣльныхъ статьяхъ нашего Лексикона.

Изложеніе правилъ Дифференціальнаго Исчисленія.

Прежде нежели приступимъ къ изложенію правилъ Дифференціальнаго Исчисленія, покажемъ какимъ образомъ задача о проведеніи касательныхъ къ кривымъ могла привести къ изобрѣтенію этого способа.

§ 1. Пусть будетъ $BOMA$ (черт. 5 Листъ VIII) какая ни есть кривая линія, отнесенная къ прямоугольнымъ координатнымъ осямъ $X'OX$, $Y'OY$, и положимъ, что требуется провести къ ней касательную TMt въ точкѣ M. Опустимъ изъ точки M перпендикуляръ MP на ось x-овъ, и сдѣлаемъ $OP=x$, $PM=y$; уравненіе данной кривой можно будетъ представить въ видѣ $y=f(x)$, разумѣя подъ $f(x)$ извѣстную функцію абсциссы x. Ясно, что направленіе искомой касательной было бы опредѣлено, еслибъ, сверхъ данной уже на кривой точки M, могли найти другую точку, напримѣръ T, принадлежащую этой касательной. Но, для опредѣленія точки T, надлежало бы имѣть сторону PT треугольника MPT, который неопредѣленъ, ибо въ немъ извѣстны только двѣ части, именно, сторона $PM=y$ и уголъ TPM, по предположенію прямой. И такъ, на этомъ основаніи, мы не можемъ рѣшить занимающей насъ задачи. Посмотримъ же теперь, нельзя-ли основать рѣшеніе вопроса на другой ипотезѣ, отъ которой бы легко было перейти къ истинной. Такъ напримѣръ, вмѣсто того чтобы непосредственно искать направленіе касательной TMt, мы можемъ сперва искать положеніе сѣкущей SMs, проходящей чрезъ точки M и M' данной кривой, а потомъ уже перейти отъ этой ложной ипотезы къ истинной. Для этого стоитъ только предположить, что точка M' приближается неопредѣленно къ точкѣ M, и наконецъ совпадаетъ съ нею. Объяснимъ это самымъ вычисленіемъ.

Изъ точки M' опускаемъ на ось x-овъ перпендикуляръ $M'P'$, а изъ M проводимъ линію MQ, параллельную этой оси. Пусть будетъ приращеніе абсциссы $PP'=MQ=\alpha$, приращеніе ординаты $QM'=\beta$. Изъ подобныхъ треугольниковъ $M'MQ$, MSP выводимъ пропорцію

$$\beta:\alpha=y:SP,$$

откуда

$$SP=y\frac{\alpha}{\beta}.$$

Чтобы перейти отъ вспомогательной длины SP къ настоящей TP, должно, какъ сказано выше, совмѣстить точку M' съ точкою M; при такомъ совмѣщеніи получаемъ условія $\alpha=0$ и $\beta=0$, ибо, въ этомъ предположеніи, абсцисса и ордината не получаютъ никакого приращенія. И такъ, найдется $TP=y.\frac{0}{0}$. Очевидно, что вторая часть этого равенства, представляющаяся въ неопредѣленномъ видѣ $\frac{0}{0}$, будетъ дѣйствительно величиною неопредѣленною, пока не назначимъ какой либо зависимости между α и β, то есть, пока кривая не будетъ дана по своему уравненію.

Положимъ напримѣръ, что данная кривая есть эллипсъ, отнесенный къ прямоугольнымъ координатнымъ осямъ, пересѣкающимся въ его вершинѣ. Уравненіе этой кривой будетъ

$$(1)\qquad y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2),$$

гдѣ a и b соотвѣтственно изображаютъ большую и малую полу-оси. Чтобы ввести въ это уравненіе вспомогательныя величины α и β, положимъ $OP = x$, $PM = y$ (черт. 5 Листъ VIII); найдется $OP' = x + \alpha$, $P'M' = y + \beta$, и слѣдовательно

$$(y+\beta)^2 = \frac{b^2}{a^2}[2a(x+\alpha) - (x+\alpha)^2],$$

или, по разложеніи,

$$y^2 + 2\beta y + \beta^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2) + \frac{b^2}{a^2}(2a\alpha - 2\alpha x - \alpha^2).$$

Это уравненіе, въ силу формулы (1), приметъ видъ

$$(2) \qquad 2\beta y + \beta^2 = \frac{b^2}{a^2}(2a\alpha - 2\alpha x - \alpha^2),$$

откуда

$$(3) \qquad y \cdot \frac{\alpha}{\beta} = SP = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{2y^2 + \beta y}{2(a-x) - \alpha}.$$

Вотъ выраженіе для длины SP, опредѣляющей положеніе сѣкущей SMM'. Чтобы перейти отъ сѣкущей SMM' къ касательной TMt, должно совмѣстить точку M' съ M, а для этого слѣдуетъ положить $\alpha = 0$ и $\beta = 0$; въ такомъ предположеніи SP обратится въ TP, и получимъ

$$(4) \qquad TP = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y^2}{a-x};$$

это выраженіе, какъ извѣстно, дѣйствительно принадлежитъ подкасательной эллипса.

Посмотримъ теперь, нѣтъ ли возможности изъ даннаго уравненія эллипса вывести непосредственно найденную сей-часъ величину TP. Прежде всего замѣтимъ, что мы не достигли бы сей цѣли, если бы съ самаго начала положили $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, ибо этимъ предположеніемъ уничтожили бы треугольникъ $MM'Q$, на которомъ основано всё вычисленіе. И такъ, надлежитъ разсмотрѣть, какіе члены въ уравн. (2) должны быть отброшены для того, чтобы формула (3) не заключала въ себѣ ни α ни β, или, что всё равно, чтобы отъ вспомогательной ипотезы прямо перейти къ истинной, и, вмѣсто *подсѣкущей* SP, получить *подкасательную* TP.

Уничтоженіе членовъ βy и $-\alpha$ въ уравн. (3) приводитъ насъ къ истинной ипотезѣ. Посмотримъ же какіе члены должны быть откинуты въ уравн. (2), чтобы формула (3) не заключала въ себѣ количествъ βy и $-\alpha$. Легко видѣть, что лишніе въ ней члены будутъ β^2 и $-\alpha^2$ подъ скобками; откинувъ ихъ, получимъ просто

$$(5) \qquad 2y\beta = \frac{b^2}{a^2}(2a\alpha - 2x\alpha).$$

Нѣтъ никакого сомнѣнія, что уничтоженіе членовъ β^2 и $-\alpha^2$ въ уравн. (2) было бы непозволительно, еслибъ имѣли въ виду опредѣлить подсѣкущую SP; но такъ какъ наша цѣль состояла въ опредѣленіи подкасательной, то чрезъ опущеніе количествъ β^2 и $-\alpha^2$ мы не дѣлаемъ никакой погрѣшности. Однимъ словомъ, откидывая β^2 и $-\alpha^2$, мы только исправляемъ ошибочность принятой нами вспомогательной ипотезы, и возвращаемся къ истинной.

Уравненіе (5) есть не иное что, какъ первоначальное уравненіе эллипса, въ которомъ поставили на мѣсто x и y соотвѣтственно $x+\alpha$ и $y+\beta$, и, по разложеніи, удержали только члены, заключающіе въ себѣ первую степень приращеній α и β. Можно замѣтить, что члены y^2, $2ax$, $-x^2$ уравненія (1) произвели соотвѣтственно выраженія $2y\beta$, $2a\alpha$, $-2x\alpha$ въ уравненіи (5). Эти выраженія называются *дифференціалами* количествъ y^2, $2ax$, $-x^2$.

Весьма простая задача, которую мы сей-часъ рѣшили, привела насъ къ слѣдствію, что для перехода отъ вспомогательной ипотезы къ истинной, надобно, съ самаго начала вычисленія, удержать только первыя степени приращеній α и β. Рѣшеніе другихъ, сложнѣйшихъ вопросовъ, привело бы насъ тѣмъ же путемъ къ этому самому заключенію. И вообще, истина, о которой идетъ рѣчь, всегда можетъ быть доказана *a posteriori*.

Распространимъ сказанное здѣсь на общій случай задачи о касательныхъ. Пусть будетъ $f(x,y) = 0$ уравненіе какой ни есть кривой $BOMA$ (черт. 5 Листъ VIII). Изобразивъ какъ и выше чрезъ α и β приращенія PP' и QM' абсциссы $OP = x$ и ординаты $PM = y$, получимъ

$$f(x+\alpha,\ y+\beta) = 0.$$

Допустимъ, что $f(x+\alpha,\ y+\beta) = 0$ доставляетъ разложеніе вида

$$A\alpha + B\beta + C\alpha^2 + D\alpha\beta + E\beta^2 + \ldots = 0;$$

это предложеніе всегда можетъ быть доказано a posteriori; Смот. TAYLOR (THÉORÊME DE). Изъ предыдущаго уравненія, написаннаго въ видѣ

$$(A + C\alpha + D\beta + \ldots)\alpha + (B + E\beta + \ldots)\beta = 0,$$

выводимъ

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{B + E\beta + \ldots}{A + C\alpha + D\beta + \ldots}.$$

И такъ, подсѣкущая SP опредѣлится формулою

$$SP = y\cdot\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{y(B+E\beta+\ldots.)}{A+C\alpha+D\beta+\ldots}.$$

Но мы видѣли выше, что для перехода отъ подсѣкущей SP къ подкасательной TP слѣдуетъ положить $\alpha=0$ и $\beta=0$; слѣдовательно

$$TP = y\cdot\frac{0}{0} = -y\cdot\frac{B}{A}.$$

Чтобы изъ уравненія $f(x+\alpha,\ y+\beta)=0$ получить непосредственно величину $\frac{\alpha}{\beta}=-\frac{B}{A}$, стоитъ только откинуть члены $E\beta,\ldots.C\alpha$, $D\beta,\ldots.$ въ выраженіи

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{B+E\beta+\ldots.}{A+C\alpha+D\beta+\ldots},$$

или, что всё равно, уничтожить величины $C\alpha^2$, $D\alpha\beta$, $E\beta^2\ldots\ldots$ въ формулѣ

$$f(x+\alpha,\ y+\beta) = A\alpha+B\beta+C\alpha^2+D\alpha\beta+E\beta^2+\ldots=0.$$

И такъ, откидывая въ уравненіи $f(x+\alpha, y+\beta)=0$ степени количествъ α и β, превышающія первыя, мы исправляемъ только ошибочность вспомогательнаго предположенія, и возвращаемся въ строгомъ смыслѣ къ истинному. Прибавимъ къ этому, что величина α совершенно произвольная: дѣйствительно, она изображаетъ приращеніе абсциссы кривой линіи, или касательной TM, отнесенной къ первоначальнымъ координатнымъ осямъ OX и OY, а это приращеніе очевидно можетъ быть взято какимъ угодно. Что касается до величины β, то она выражаетъ соотвѣтственное приращеніе ординаты той же самой касательной.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что удержавъ въ разложенномъ уравненіи $f(x+\alpha,\ y+\beta)=0$ однѣ первыя степени количествъ α и β, мы тѣмъ самымъ выражаемъ, что α есть произвольное приращеніе абсциссы кривой линіи или касательной, а β приращеніе ординаты касательной, а не ординаты кривой; и такъ, если бы отнесли касательную tMT къ двумъ координатнымъ осямъ MX'', MY'', параллельнымъ старымъ, то отношеніе $\frac{\alpha}{\beta}$ изобразило бы отношеніе какой ни есть абсциссы $\overline{Mp}$ касательной къ соотвѣтствующей ей ординатѣ $\overline{pm}$.

Намъ кажется, что на основаніи этого замѣчанія, весьма простаго, можно во всякомъ случаѣ устранить всѣ недоразумѣнія, которыя представляются при объясненіи началъ Диффеpенціальнаго Исчисленія.

§ 2. Въ математическомъ анализѣ разсматриваются величины двухъ родовъ: *постоянныя* и *перемѣнныя*. Постояннымъ называется такое количество, которое сохраняетъ одну и ту же величину въ продолженіи всего вычисленія. Напротивъ того, перемѣнное или измѣняемое количество переходитъ послѣдовательно чрезъ многія величины, различныя между собою. И такъ, въ уравненіи эллипса предыдущаго параграфа, количества a и b, то есть полу-оси кривой, изображаютъ величины *постоянныя*, а количества x и y, именно координаты кривой, — величины *перемѣнныя*. И дѣйствительно, значенія x и y измѣняются вмѣстѣ съ положеніемъ точки, которую разсматриваемъ на эллипсѣ, между тѣмъ какъ полу-оси a и b, въ одномъ и томъ же эллипсѣ, остаются неизмѣнными.

Когда значенія, послѣдовательно принимаемыя перемѣнною величиною, приближаются болѣе и болѣе къ величинѣ опредѣленной, такъ что наконецъ разнствуютъ отъ нея какъ угодно мало, то эта опредѣленная величина называется *предѣломъ* разсматриваемой перемѣнной. И такъ, площадь круга есть предѣлъ, къ которому послѣдовательно приближаются площади вписанныхъ правильныхъ многоугольниковъ по мѣрѣ того, какъ увеличиваемъ число ихъ сторонъ. Здѣсь необходимо сдѣлать одно замѣчаніе: подъ наименованіемъ *предѣла*, согласно съ понятіями древнихъ геометровъ, разумѣютъ вообще величину, къ которой неопредѣленно приближается перемѣнное количество, не достигающее впрочемъ никогда своего предѣла. Въ этомъ смыслѣ, площадь круга есть настоящій предѣлъ площадей вписанныхъ въ немъ многоугольниковъ. Но мы условимся принимать слово *предѣлъ* и въ другомъ, нѣсколько отличномъ значеніи, отъ чего не произойдетъ никакого двусмыслія. Пусть будетъ $f(x)$ какая ни есть функція перемѣнной x, и положимъ, что разсматривается отношеніе приращенія функціи $f(x)$ къ приращенію i самой перемѣнной x, то есть дробь

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}.$$

Условимся называть *предѣломъ* этой дроби, величину, къ которой она стремится по мѣрѣ того, какъ приращеніе i приближается къ нулю.

И такъ, выраженіе

$$пред.\left\{\frac{f(x+i)-f(x)}{i}\right\}$$

будетъ означать частную величину дроби

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

для $i=0$. Напримѣръ, если бы имѣли $f(x)=x^2$, то нашли бы

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}=\frac{(x+i)^2-x^2}{i}=\frac{2xi+i^2}{i}=2x+i,$$

и слѣдовательно

$$пред.\left\{\frac{f(x+i)-f(x)}{i}\right\}=пред.\left\{\frac{(x+i)^2-x^2}{i}\right\}=2x.$$

Хотя предѣлы нѣкоторыхъ перемѣнныхъ выраженій и представляются въ неопредѣленныхъ видахъ, но, посредствомъ особенныхъ пріёмовъ, можно опредѣлить истинныя ихъ значенія. Напримѣръ, три выраженія

$$\frac{(1+\varepsilon)^p-1}{\varepsilon},\quad (1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}},\quad \frac{Sin\,\varepsilon}{\varepsilon},$$

для $\varepsilon=0$, обращаются соотвѣтственно въ $\frac{0}{0}$, $1^{\pm\infty}$, $\frac{0}{0}$. Такъ какъ при изложеніи правилъ дифференцированія мы будемъ имѣть надобность въ предѣлахъ сихъ трехъ выраженій, то займемся теперь ихъ опредѣленіемъ. Начнемъ съ перваго, и положимъ сперва, что показатель p есть цѣлое положительное число, которое изобразимъ чрезъ m. Получится

$$\frac{(1+\varepsilon)^m-1}{\varepsilon}=\frac{m\varepsilon+\frac{m(m-1)}{1.2}\varepsilon^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\varepsilon^3+\ldots+\varepsilon^m}{\varepsilon}$$

$$=m+\frac{m(m-1)}{1.2}\varepsilon+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^{m-1}.$$

Такъ какъ число членовъ этого ряда конечное, то, полагая $\varepsilon=0$, найдемъ

$$пред.\left\{\frac{(1+\varepsilon)^m-1}{\varepsilon}\right\}=m.$$

Легко распространить слѣдствіе, выражаемое этою формулою, на какой ни есть показатель, дробный или отрицательный. Дѣйствительно, положимъ сперва, что показатель есть дробное число $\frac{m}{n}$; принявъ

$(1+\varepsilon)^{\frac{m}{n}}-1=\omega$, найдется $(1+\varepsilon)^m=(1+\omega)^n$, или, по разложеніи,

$$m\varepsilon+\frac{m(m-1)}{1.2}\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^m=n\omega+\frac{n(n-1)}{1.2}\omega^2+\ldots+\omega^n,$$

откуда

$$\frac{\omega}{\varepsilon}=\frac{m+\frac{m(m-1)}{1.2}\varepsilon+\ldots+\varepsilon^{m-1}}{n+\frac{n(n-1)}{1.2}\omega+\ldots+\omega^{n-1}}.$$

Но $\frac{\omega}{\varepsilon}=\frac{(1+\varepsilon)^{\frac{m}{n}}-1}{\varepsilon}$; сверхъ того, принявъ въ соображеніе равенство $(1+\varepsilon)^m=(1+\omega)^n$, изъ котораго слѣдуетъ, что при $\varepsilon=0$, будетъ также $\omega=0$, найдемъ

$$пред.\left\{\frac{\omega}{\varepsilon}\right\}=пред.\left\{\frac{(1+\varepsilon)^{\frac{m}{n}}-1}{\varepsilon}\right\}=\frac{m}{n}.$$

Для отрицательнаго показателя, получимъ последовательно

$$\frac{(1+\varepsilon)^{-q}-1}{\varepsilon}=\frac{1-(1+\varepsilon)^q}{\varepsilon(1+\varepsilon)^q}=-\frac{(1+\varepsilon)^q-1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{(1+\varepsilon)^q}.$$

Но предѣлъ выраженія $\frac{(1+\varepsilon)^q-1}{\varepsilon}$, какъ доказано выше, есть q, а предѣлъ дроби $\frac{1}{(1+\varepsilon)^q}$ очевидно будетъ 1. Слѣдовательно

$$пред.\left\{\frac{(1+\varepsilon)^{-q}-1}{\varepsilon}\right\}=-q.$$

И такъ, каковъ бы ни былъ показатель p, получимъ формулу

$$(6)\qquad пред.\left\{\frac{(1+\varepsilon)^p-1}{\varepsilon}\right\}=p.$$

Разсмотримъ теперь, во что обращается выраженіе $(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$, когда $\varepsilon=0$. Допустимъ сперва, что ε есть количество положительное вида $\frac{1}{m}$, разумѣя подъ m цѣлое число, которое увеличивается постепенно, и дѣлается наконецъ безконечнымъ. Получимъ

$$(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}=\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right)$$

$$+\frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)+\ldots$$

$$+\frac{1}{1.2.3\ldots m}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{m}\right).$$

Замѣтимъ, что въ этомъ ряду всѣ члены положительные, и что число ихъ, а также и величина каждаго, начиная съ третьяго, возрастаетъ вмѣстѣ съ увеличеніемъ количества m; сверхъ того очевидно, что каждый изъ коэффиціентовъ $\left(1-\frac{1}{m}\right)$, $\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)$, и проч.

менѣе единицы. Изъ этого заключаемъ, что выраженіе $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ возрастаетъ вмѣстѣ съ m; легко показать, что оно стремится къ нѣкоторому предѣлу, содержащемуся между 2 и 3. Дѣйствительно, изъ сказаннаго выше слѣдуетъ, что рядъ

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)$$
$$+\frac{1}{1.2.3.4}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)+\ldots\ldots$$

будетъ постоянно >2, но менѣе суммы слѣдующей строки:

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots\ldots;$$

но какъ сія послѣдняя очевидно менѣе суммы

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{2.2.2}+\ldots\ldots=1+1+1=3,$$

то и заключаемъ, что предѣлъ выраженія...... $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<3$. Этотъ предѣлъ, опредѣляющійся безконечнымъ рядомъ

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\text{ и проч.}$$

есть трансцендентное число, которое весьма часто встрѣчается въ математическомъ анализѣ, и означается обыкновенно буквою e. Приближенная величина его есть слѣдующая:

$$e=2,7182818284\ldots.$$

Число e, принятое *Непероль* за основаніе логариѳмической системы, называется поэтому основаніемъ *Неперовой системы*. Смот. LOGARITHME.

Положимъ теперь, что въ выраженіи $(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ количество ε положительное какъ и прежде, но не можетъ быть выражено дробью вида $\frac{1}{m}$. Пусть будутъ m и $n=m+1$ два цѣлыя числа, между которыми заключается дробь $\frac{1}{\varepsilon}$; получимъ

$$\frac{1}{\varepsilon}=m+\mu=n-\nu,$$

гдѣ μ и ν изображаютъ числа положительныя, мѐньшія единицы. Очевидно, что въ силу условій $\frac{1}{m}>\varepsilon$ и $\frac{1}{n}<\varepsilon$, найдутся слѣдующія неравенства:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}>(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}};$$

но

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}=\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{1+\frac{\mu}{m}}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{1-\frac{\nu}{n}}.$$

Если замѣтимъ теперь, что для $\varepsilon=0$, m и n обратятся въ величины безконечныя, а каждое изъ выраженій

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m,\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

въ силу доказаннаго выше, въ число e, и примемъ сверхъ того въ соображеніе, что $\frac{\mu}{m}$ и $\frac{\nu}{n}$ уничтожаются въ томъ же предположеніи, то найдемъ формулы

$$пред.\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}=e,\quad пред.\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}=e.$$

Слѣдовательно, и для промежуточнаго выраженія будетъ

$$пред.\,(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}=e.$$

То же самое можно доказать и для того случая, когда перемѣнное количество ε изъ отрицательнаго состоянія будетъ стремиться къ нулю. Дѣйствительно, если положимъ

$$1+\varepsilon=\frac{1}{1+\omega}\text{ или }\varepsilon=-\frac{\omega}{1+\omega},$$

то очевидно, что дробнымъ отрицательнымъ значеніямъ ε будутъ соотвѣтствовать положительныя величины количества ω; сверхъ того, для $\varepsilon=0$, будетъ также $\omega=0$. И такъ

$$(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}=\left(\frac{1}{1+\omega}\right)^{-\frac{1+\omega}{\omega}}=(1+\omega)^{1+\frac{1}{\omega}}$$
$$=(1+\omega)(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}};$$

переходя къ предѣламъ, получимъ

$$пред.\,(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}=пред.\,\{(1+\omega)(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}\}$$
$$=пред.\,(1+\omega)\cdot пред.\,(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}=e.$$

И такъ, мы въ правѣ заключить теперь, что каково бы ни было перемѣнное количество ε, стремящееся къ нулю, во всякомъ случаѣ будетъ

$$(7)\qquad пред.\,\{(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}\}=e=2,7182818284\ldots$$

Предѣлъ выраженія $\frac{Sin\,\varepsilon}{\varepsilon}$ опредѣляется весьма простымъ образомъ замѣтивъ, что по причинѣ $Sin\,\varepsilon < \varepsilon$ и $\varepsilon < tang\,\varepsilon$, имѣемъ

$$\frac{Sin\,\varepsilon}{Sin\,\varepsilon} > \frac{Sin\,\varepsilon}{\varepsilon} > \frac{Sin\,\varepsilon}{tang\,\varepsilon},$$

или, что всё равно,

$$1 > \frac{Sin\,\varepsilon}{\varepsilon} > Cos\,\varepsilon.$$

Но предѣлъ $Cos\,\varepsilon$ есть единица; слѣдовательно и промежуточное выраженіе, то есть $\frac{Sin\,\varepsilon}{\varepsilon}$ будетъ также имѣть предѣломъ единицу. И такъ

$$(8)\qquad пред.\left\{\frac{Sin\,\varepsilon}{\varepsilon}\right\} = 1.$$

Точно также найдемъ

$$пред.\left\{\frac{tang\,\varepsilon}{\varepsilon}\right\} = пред.\left\{\frac{Sin\,\varepsilon}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{Cos\,\varepsilon}\right\} = 1.$$

Величины такого свойства какъ ε и ω, употребленныя нами въ предыдущихъ выраженіяхъ, и разсматриваемыя въ то̀ мгновеніе, когда онѣ обращаются въ нуль, называются *безконечно малыми*. Числа же m и n, которыя мы употребили въ доказательствѣ формулы (7), и соотвѣтствующія предположенію $\varepsilon = 0$, называются величинами *безконечными* или *безконечно большими*. Для дальнѣйшихъ подробностей объ этомъ предметѣ отсылаемъ къ статьямъ: LIMITE, INFINIMENT PETIT.

§ 3. Пусть будетъ $y = f(x)$ функція перемѣнной x, непрерывная между двумя данными предѣлами; Смот. CONTINUE (FONCTION). Въ такомъ предположеніи, безконечно малому приращенію количества x будетъ соотвѣтствовать и безконечно малое приращеніе измѣняемой y. И такъ, изобразивъ чрезъ $\Delta x = i$ приращеніе перемѣнной x, а чрезъ Δy соотвѣтственное приращеніе функціи y, получимъ $y + \Delta y = f(x+i)$, или

$$(9)\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}.$$

Если примемъ количество i безконечно малымъ, то числитель и знаменатель выраженія (9), называемаго *отношеніемъ разностей*, будутъ также количества безконечно малыя. Но, по мѣрѣ уменьшенія двухъ членовъ этого отношенія, оно будетъ стремиться къ нѣкоторому извѣстному предѣлу, зависящему отъ вида функціи f и отъ частнаго значенія, приписываемаго перемѣнной x*). Чтобы означить эту зависимость предѣла отъ первообразной функціи f, называютъ его *производною функціею*, и изображаютъ знакоположеніями

$$y' \text{ и } f'(x);$$

и такъ, положивъ какъ и выше $y = f(x)$, будетъ

$$(10)\qquad y' = f'(x) = пред.\left\{\frac{f(x+i) - f(x)}{i}\right\}.$$

Такъ какъ отъ производныхъ функцій можно непосредственно перейти къ дифференціаламъ, что̀ будетъ показано ниже, то и займемся опредѣленіемъ производныхъ для *простыхъ функцій* (*fonctions simples*), то есть для такихъ, которыя получаются посредствомъ одного дѣйствія надъ перемѣнною величиною. Простыя функціи, обыкновенно разсматриваемыя въ Анализѣ, суть слѣдующія:

$$a+x,\ a-x,\ ax,\ \frac{a}{x},\ x^p,\ A^x,\ Log\,x,$$

$$Sin\,x,\quad arc\,sin\,x,$$

гдѣ a, p и A означаютъ постоянныя величины; къ этимъ функціямъ можно присовокупить еще и тригонометрическія количества

$$Cos\,x,\ Tang\,x,\ Cotang\,x,\ Sec\,x,\ Cosec\,x,\ Sinvers\,x,$$
$$Cosvers\,x,\ arc\,cos\,x,\ arc\,tang\,x,\ arc\,cotang\,x,\ arc\,sec\,x,$$
$$arc\,cosec\,x,\ arc\,sinvers\,x,\ arc\,cosvers\,x,$$

когда каждое изъ нихъ будемъ разсматривать независимо отъ его выраженія въ $Sin\,x$ или $arc\,sin\,x$.

И такъ, на основаніи формулы (10), получимъ

Для $y = a + x$, $y' = пред.\left\{\frac{(a+x+i)-(a+x)}{i}\right\} = 1$

Для $y = a - x$, $y' = пред.\left\{\frac{(a-x-i)-(a-x)}{i}\right\} = -1$

Для $y = ax$, $y' = пред.\left\{\frac{a(x+i)-ax}{i}\right\} = a$

Для $y = \frac{a}{x}$, $y' = пред.\left\{\frac{\frac{a}{x+i} - \frac{a}{x}}{i}\right\}$

$$= пред.\left\{-\frac{a}{x(x+i)}\right\} = -\frac{a}{x^2}.$$

*) *Г. Амперъ* доказалъ это предложеніе въ XIII тетради *Журнала Политехническаго Училища*. Впрочемъ, если замѣтимъ, что $пред.\left\{\frac{f(x+i)-f(x)}{i}\right\}$ изображаетъ тригонометрическій тангенсъ угла, составляемаго касательною къ кривой съ осью x-овъ, то непосредственно заключимъ о справедливости этого предложенія.

Если положимъ $\frac{i}{x} = \varepsilon$, то въ силу формулы (6) параграфа 2, и для какого ни есть показателя p, найдется при $y = x^p$

$$y' = \text{пред.}\left\{\frac{(x+i)^p - x^p}{i}\right\} = \text{пред.}\left\{x^{p-1}\frac{\left(1+\frac{i}{x}\right)^p - 1}{\frac{i}{x}}\right\}$$

$$= x^{p-1}.\text{пред.}\left\{\frac{(1+\varepsilon)^p - 1}{\varepsilon}\right\} = px^{p-1}.$$

Найдемъ теперь производную выраженія $y = A^x$. По формулѣ (10) получимъ

$$y' = \text{пред.}\left\{\frac{A^{x+i} - A^x}{i}\right\} = A.^x\text{пред.}\left\{\frac{A^i - 1}{i}\right\}.$$

Чтобы найти предѣлъ отношенія $\frac{A^i - 1}{i}$, пусть $A^i - 1 = \varepsilon$; очевидно, что ε будетъ стремиться къ нулю въ одно время съ i. Опредѣливъ величину i изъ предыдущаго выраженія, получимъ

$$i = \frac{Log(1+\varepsilon)}{Log\,A},$$

разумѣя подъ Log. логариѳмъ, взятый по какой угодно системѣ. И такъ

$$\frac{A^i - 1}{i} = \frac{\varepsilon}{i} = \frac{\varepsilon\,Log\,A}{Log(1+\varepsilon)} = \frac{Log\,A}{\frac{1}{\varepsilon}\,Log\,(1+\varepsilon)}$$

$$= \frac{Log\,A}{Log\,(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}}.$$

Слѣдовательно, въ силу формулы (7) получимъ

$$\text{пред.}\left\{\frac{A^i - 1}{i}\right\} = \frac{Log\,A}{Log\,e},$$

почему и найдется

$$y' = (A^x)' = \frac{Log\,A}{Log\,e}.A^x.$$

Если положимъ, что въ этой послѣдней формулѣ употреблены *Неперовы* логариѳмы, то по причинѣ $log\,e = 1$, будетъ

$$(A^x)' = log\,A.A^x.$$

Принявъ $A = e$, получимъ

$$(e^x)' = e^x.$$

Для $y = Log\,x$, найдемъ

$$y' = (Log\,x)' = \text{пред.}\left\{\frac{Log(x+i) - Log\,x}{i}\right\}$$

$$= \text{пред.}\left\{\frac{Log\,(+\frac{i}{x})}{i}\right\} = \frac{1}{x}\cdot\text{пред.}\left\{\frac{Log\,(1+\frac{i}{x})}{\frac{i}{x}}\right\};$$

положивъ $\frac{i}{x} = \varepsilon$, получимъ

$$(Log\,x)' = \frac{1}{x}\cdot\text{пред.}\left\{\frac{Log\,(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\right\} = \frac{1}{x}\cdot\text{пред.}\left\{Log(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right\},$$

и наконецъ, въ силу формулы (7),

$$(Log\,x)' = \frac{Log\,e}{x}.$$

Постоянная величина $Log\,e$ называется, какъ извѣстно, *модулемъ* логариѳмической системы, означенной чрезъ Log. Когда разсматривается логариѳмъ по *Неперовой* системѣ, то по причинѣ $log\,e = 1$, найдемъ

$$(log\,x)' = \frac{1}{x}.$$

Въ слѣдствіе формулы (8) и равнозначущей съ ней $\text{пред.}\left\{\frac{tang\,i}{i}\right\} = 1$, получимъ

$$(Sin\,x)' = \text{пред.}\left\{\frac{Sin\,(x+i) - Sin\,x}{i}\right\}$$

$$= \text{пред.}\left\{\frac{Sin\,\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i}\cdot Cos\,(x+\tfrac{1}{2}i)\right\} = Cos\,x;$$

$$(Cos\,x)' = \text{пред.}\left\{\frac{Cos\,(x+i) - Cos\,x}{i}\right\}$$

$$= \text{пред.}\left\{-\frac{Sin\,\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i}\cdot Sin\,(x+\tfrac{1}{2}i)\right\} = -Sin\,x;$$

$$(Tang\,x)' = \text{пред.}\left\{\frac{tang(x+i) - tang\,x}{i}\right\}$$

$$= \text{пред.}\left\{\frac{tang\,i}{i}\left(1 + tang\,x\,.\,tang(x+i)\right)\right\}$$

$$= 1 + tang^2 x = \frac{1}{Cos^2 x};$$

$$(Cotang\,x)' = \text{пред.}\left\{\frac{Cotang(x+i) - Cotang\,x}{i}\right\}$$

$$= \text{пред.}\left\{-\frac{tang\,i}{i}\left(1 + Cotang\,x\,.\,Cotang(x+i)\right)\right\}$$

$$= -(1 + Cotang^2 x) = -\frac{1}{Sin^2 x};$$

Опредѣлимъ теперь производную одной изъ круговыхъ функцій, напримѣръ $arctang\,x$. Найдемъ

$$(arctang\,x)' = \text{пред.}\left\{\frac{arctang(x+i) - arctang\,x}{i}\right\};$$

если изобразимъ разность $arctang(x+i) - arctang\,x$ чрезъ ε, и замѣтимъ что $tang\,\varepsilon = \frac{i}{1+x(x+i)}$, то получимъ

$$(arctang\,x)' = \text{пред.}\left\{\frac{\varepsilon}{i}\right\} = \text{пред.}\left\{\frac{\varepsilon}{tang\,\varepsilon}\cdot\frac{1}{1+x(x+i)}\right\}.$$

Но $\text{пред.}\left\{\frac{tang\,\varepsilon}{\varepsilon}\right\}$, а слѣдовательно и $\text{пред.}\left\{\frac{\varepsilon}{tang\,\varepsilon}\right\}$ равенъ единицѣ, почему и найдется окончательно

$$(arctang\,x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Подобнымъ образомъ можно найти производныя для другихъ изъ приведенныхъ выше тригонометрическихъ и круговыхъ функцій; мы не будемъ останавливаться на этомъ разысканіи, а приступимъ къ изложенію нѣкоторыхъ правилъ, облегчающихъ это опредѣленіе.

§ 4. Положимъ, что имѣемъ два уравненія

$$z=\varphi(y) \quad \text{и} \quad y=f(x);$$

такъ какъ изъ нихъ слѣдуетъ, что $z=\varphi(f(x))$, то z и называется *функціею отъ функціи* (*fonction de fonction*) перемѣнной x. Пусть будетъ Δx приращеніе независимой перемѣнной x, а Δy и Δz соотвѣтственныя приращенія количествъ y и z. Принимая z за функцію x, получимъ

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta x}=\frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x};$$

но

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x};$$

слѣдовательно

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y}\cdot\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

и, переходя къ предѣламъ,

$$(11)\quad z'=[\varphi(f(x))]'=\varphi'(y)\cdot y'=\varphi'(f(x))\cdot f'(x).$$

Напримѣръ, полагая

$$z=\frac{1}{y} \quad \text{и} \quad y=Cos\,x \quad \text{или} \quad z=\frac{1}{Cos\,x}=Sec\,x,$$

получимъ

$$z'=(Sec\,x)'=-\frac{1}{y^2}(-Sin\,x)=\frac{Sin\,x}{Cos^2 x}.$$

Подобнымъ образомъ найдется:

Для $z=\frac{1}{y}$ а $y=Sin\,x$ или $z=Cosec\,x$,

$$z'=(Cosec\,x)'=-\frac{1}{y^2}\cdot Cos\,x=-\frac{Cos\,x}{Sin^2 x}.$$

Для $z=Sin\,vers\,x=1-Cos\,x$,

$$z'=(Sin\,vers\,x)'=Sin\,x.$$

Для $z=Cos\,vers\,x=1-Sin\,x$,

$$z'=(Cos\,vers\,x)'=-Cos\,x.$$

Если въ формулѣ (11) положимъ $z=x$, то получимъ уравненіе

$$(12)\qquad 1=\varphi'(y)\cdot y' \quad \text{или} \quad y'=\frac{1}{\varphi'(y)},$$

въ силу котораго по данной производной одной изъ функцій $y=f(x)$, $x=\varphi(y)$, опредѣляемъ другую производную. И такъ, имѣя два уравненія $y=arcsin\,x$ и $x=Sin\,y$, находимъ

$$y'=(arcsin\,x)'=\frac{1}{(Sin\,y)'};$$

но $(Sin\,y)'=Cos\,y=\sqrt{1-x^2}$, почему

$$(arc\,sin\,x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Дѣйствуя точно такимъ образомъ, найдемъ производныя:

$$(arccos\,x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(arccotang\,x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

$$(arcsec\,x)'=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$(arccosec\,x)'=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$(arc\,sinvers\,x)'=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$(arccosvers\,x)'=-\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

§ 5. Въ § 1 мы видѣли, что задача о проведеніи касательной къ какой ни есть кривой приводитъ къ разсматриванію членовъ, заключающихъ въ себѣ первыя степени приращеній абсциссы и ординаты сей кривой. Эти члены мы назвали *дифференціалами*. Множество другихъ общихъ вопросовъ приводитъ къ разысканію подобныхъ же членовъ въ разложеніи какой ни есть функціи по степенямъ приращенія перемѣннаго количества, отъ котораго она зависитъ. Пусть будетъ $y=f(x)$ какая ни есть функція перемѣнной независимой x, а $\Delta x=h$ произвольное приращеніе сей послѣдней. Приращеніе самой функціи будетъ

$$\Delta y=f(x+h)-f(x).$$

Членъ, заключающій въ себѣ только первую степень приращенія h въ этой разности, называется *дифференціаломъ* функціи $f(x)$, потому что онъ изображаетъ не полную *разность* (*différence*), а только извѣстную часть ея.

Чтобы выразить аналитически, что мы удерживаемъ только первую степень приращенія h въ разности $f(x+h)-f(x)$, надобно измѣнить h въ εh, разумѣя подъ ε безконечно малое количество, и раздѣливъ на ε разность $f(x+\varepsilon h)-f(x)$, взять предѣлъ сего отношенія. Этотъ предѣлъ изобразитъ искомый дифференціалъ. И такъ

$$\text{дифференціалъ } y \text{ или } f(x)=\text{пред.}\left\{\frac{f(x+\varepsilon h)-f(x)}{\varepsilon}\right\}.$$

Дѣйствительно, членъ, заключающій въ себѣ первую степень εh, по раздѣленіи на ε, останется, а члены, сопровождаемые высшими степенями $\varepsilon^2 h^2$, $\varepsilon^3 h^3$ и проч. по раздѣленіи на ε, доставятъ εh^2, $\varepsilon^2 h^3$ и проч. и уничтожатся при переходѣ къ предѣлу, то есть при $\varepsilon = 0$.

Сообразуясь съ знакоположеніемъ Лейбница, условились изображать дифференціалъ какого ни есть количества буквою d, поставленною передъ этимъ количествомъ. И такъ

$$(13) \qquad dy = df(x) = \text{пред.}\left\{\frac{f(x+\varepsilon h)-f(x)}{\varepsilon}\right\}.$$

Если положимъ $\varepsilon h = i$, то i будетъ безконечно малымъ количествомъ, и вторая часть уравн. (13) приметъ видъ

$$\text{пред.}\left\{\frac{f(x+\varepsilon h)-f(x)}{\varepsilon h}\right\}.h \quad \text{или} \quad \text{пред.}\left\{\frac{f(x+i)-f(x)}{i}\right\}.h.$$

Но, въ силу формулы (10) [§ 3], послѣднее выраженіе равно $f'(x).h$; слѣдовательно

$$dy = df(x) = f'(x).h.$$

И такъ, *дифференціалъ какой ни есть функціи* $f(x)$ *равняется производной* $f'(x)$, *помноженной на приращеніе* h *перемѣнной* x.

При $f(x) = x$, будетъ $f'(x) = \text{пред.}\left\{\frac{x+i-x}{i}\right\} = 1$, откуда $df(x) = dx = h$. Слѣдовательно, дифференціалъ перемѣнной независимой x равенъ постоянному количеству h, которое можетъ быть что угодно. И такъ, уравненіе $dy = f'(x).h$ можно замѣнить однимъ изъ слѣдующихъ:

$$(14) \qquad df(x) = f'(x)dx \quad \text{или} \quad dy = y'dx.$$

Изъ равенства $dy = y'dx$ выводимъ $\frac{dy}{dx} = y'$; слѣдовательно, производная $y' = f'(x)$ равняется отношенію дифференціала функціи къ дифференціалу перемѣннаго количества. Величину $\frac{dy}{dx}$, или, что всё равно, производную функцію, называютъ также *дифференціальнымъ коэффиціентомъ* или *дифференціальнымъ отношеніемъ*, (*coëfficient différentiel*).

По найденнымъ производнымъ въ §§ 3 и 4, и на основаніи уравн. (14), найдемъ непосредственно слѣдующіе дифференціалы простыхъ функцій:

$$d(a+x) = dx, \quad d(a-x) = -dx, \quad d(ax) = adx,$$

$$d\left(\frac{a}{x}\right) = -\frac{adx}{x^2}, \quad d(x^p) = px^{p-1}dx, \quad d(A^x) = \log A.A^x dx,$$

$$d(e^x) = e^x dx, \quad d(\text{Log}\, x) = \frac{\text{Log}\, e.dx}{x}, \quad d(\log x) = \frac{dx}{x},$$

$$d.\text{Sin}\, x = \text{Cos}\, x.dx, \quad d.\text{Cos}\, x = -\text{Sin}\, x.dx,$$

$$d.\text{Tang}\, x = \frac{dx}{\text{Cos}^2 x}, \quad d.\text{Cotang}\, x = -\frac{dx}{\text{Sin}^2 x},$$

$$d.\text{Sec}\, x = \frac{\text{Sin}\, x.dx}{\text{Cos}^2 x}, \quad d.\text{Cosec}\, x = -\frac{\text{Cos}\, x.dx}{\text{Sin}^2 x},$$

$$d.\text{Sinvers}\, x = \text{Sin}\, x.dx, \quad d.\text{Cosvers}\, x = -\text{Cos}\, x.dx,$$

$$d.\text{arcsin}\, x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad d.\text{arccos}\, x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$d.\text{arctang}\, x = \frac{dx}{1+x^2}, \quad d.\text{arccotang}\, x = -\frac{dx}{1+x^2},$$

$$d.\text{arcsec}\, x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad d.\text{arccosec}\, x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}},$$

$$d.\text{arcsinvers}\, x = \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}, \quad d.\text{arccosvers}\, x = -\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

Во всѣхъ этихъ формулахъ, въ силу уравн. (11), мы можемъ замѣнить перемѣнную x какою ни есть функціею этой самой измѣняемой. Такъ напримѣръ

$$d(f(x) \pm a) = f'(x)dx, \quad d(af(x)) = ad.f(x) = af'(x)dx;$$

первое изъ сихъ уравненій показываетъ, что присовокупленіе постояннаго количества a, положительнаго или отрицательнаго, къ какой ни есть функціи $f(x)$, не измѣняетъ ея дифференціала. Второе показываетъ, что при дифференцированіи постоянный множитель, сопровождающій данную функцію, можетъ быть выведенъ изъ подъ знака d. Вотъ еще нѣкоторые примѣры:

$$d(\sqrt{f(x)}) = d.[f(x)]^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}[f(x)]^{-\frac{1}{2}}d.f(x) = \frac{df(x)}{2\sqrt{f(x)}},$$

$$d(A^{x^n}) = \log A.A^{x^n} d(x^n) = n\log A.A^{x^n} x^{n-1}dx,$$

$$d(e^{e^x}) = e^{e^x} d(e^x) = e^{e^x}.e^x dx,$$

$$d.\text{Log}(a+x^n) = \frac{\text{Log}\, e}{a+x^n} d(a+x^n) = \frac{n\text{Log}\, e.x^{n-1}dx}{a+x^n},$$

$$d.\text{tang}(A^x) = \frac{d(A^x)}{\text{Cos}^2(A^x)} = \frac{\text{Log}\, A.A^x dx}{\text{Cos}^2(A^x)},$$

$$d.\text{arcsin}\sqrt[3]{x} = \frac{d.\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}} = \frac{d(x^{\frac{1}{3}})}{\sqrt{1-x^{\frac{2}{3}}}} = \frac{1}{3}.\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-x^{\frac{2}{3}}}}.$$

§ 6. Перейдемъ теперь къ дифференцированію сложныхъ функцій, то есть такихъ, которыя сами составлены какимъ ни есть образомъ изъ простыхъ функцій. Если изобразимъ чрезъ $u, v, w, \ldots$ какія угодно простыя функціи перемѣнной независимой x, то $s = f(u, v, w \ldots)$ изобразитъ самую общую явную функцію количества x. Займемся опредѣленіемъ ея диФФеренціала.

Чтобы получить $df(u, v, w\ldots)$, надобно въ каждую изъ простыхъ Функцій $u, v, w, \ldots\ldots$ подставить $x+\varepsilon h$ на мѣсто x, изъ вывода подстановленія вычесть первообразную Функцію, и, раздѣливъ разность на ε, положить $\varepsilon=0$. Пусть будетъ напримѣръ $u=F(x)$; отъ подстановленія $x+\varepsilon h$ на мѣсто x, Функція u получитъ приращеніе $\varepsilon\Delta u$, разумѣя подъ Δu количество, обращающееся въ du при переходѣ къ предѣлу, то есть, при положеніи $\varepsilon=0$. Дѣйствительно, пока не приписываемъ количеству ε частной величины нуль, отношеніе

$$\frac{F(x+\varepsilon h)-F(x)}{\varepsilon}$$

будетъ отлично отъ $dF(x)=du$, а обратится въ du для $\varepsilon=0$; изобразивъ предыдущую дробь чрезъ Δu, найдемъ

$$\frac{F(x+\varepsilon h)-F(x)}{\varepsilon}=\Delta u,$$

откуда, по причинѣ $F(x)=u$,

$$u+\varepsilon\Delta u=F(x+\varepsilon h).$$

Точно также докажемъ, что подстановленіе $x+\varepsilon h$ на мѣсто x въ Функціи $v, w, \ldots.$ обратитъ ихъ въ $v+\varepsilon\Delta v$, $w+\varepsilon\Delta w, \ldots.$ И такъ, въ слѣдствіе сказаннаго выше, получимъ

$$ds=d.f(u, v, w\ldots.)=$$
$$\text{пред.}\left\{\frac{f(u+\varepsilon\Delta u, v+\varepsilon\Delta v, w+\varepsilon\Delta w,\ldots)-f(u, v, w,\ldots)}{\varepsilon}\right\}.$$

Замѣтимъ, теперь, что числитель этого отношенія можетъ быть написанъ въ видѣ:

$$f(u+\varepsilon\Delta u, v+\varepsilon\Delta v, w+\varepsilon\Delta w,\ldots)-f(u, v+\varepsilon\Delta v, w+\varepsilon\Delta w,\ldots)$$
$$+f(u, v+\varepsilon\Delta v, w+\varepsilon\Delta w,\ldots)-f(u, v, w+\varepsilon\Delta w,\ldots)$$
$$+f(u, v, w+\varepsilon\Delta w,\ldots)-f(u, v, w,\ldots),$$

и какъ сверхъ того, предѣлъ отъ суммы равняется суммѣ предѣловъ, то получимъ

$$(15)\qquad ds=d.f(u, v, w\ldots)=$$
$$\text{пред.}\left\{\frac{f(u+\varepsilon\Delta u,v+\varepsilon\Delta v,w+\varepsilon\Delta w,..)-f(u,v+\varepsilon\Delta v,w+\varepsilon\Delta w,..)}{\varepsilon}\right\}$$
$$+\text{пред.}\left\{\frac{f(u,v+\varepsilon\Delta v,w+\varepsilon\Delta w,\ldots)-f(u,v,w+\varepsilon\Delta w,\ldots)}{\varepsilon}\right\}$$
$$+\text{пред.}\left\{\frac{f(u,v,w+\varepsilon\Delta w,\ldots)-f(u,v,w,\ldots)}{\varepsilon}\right\}+\ldots..$$

Очевидно, что въ силу уравненія (13), выраженіе

$$\text{пред.}\left\{\frac{f(u+\varepsilon\Delta u,v+\varepsilon\Delta v,w+\varepsilon\Delta w,..)-f(u,v+\varepsilon\Delta v,w+\varepsilon\Delta w,..)}{\varepsilon}\right\}$$

изобразитъ диФФеренціалъ Функціи $f(u, v, w,\ldots)$, принимая въ ней только величину u за перемѣнную, ибо остальныя количества, какъ то $v+\varepsilon\Delta v$, $w+\varepsilon\Delta w, \ldots..$, обращающіяся въ $v, w\ldots$ для $\varepsilon=0$, не измѣняются при переходѣ отъ первообразной Функціи $f(u, v+\varepsilon\Delta v, w+\varepsilon\Delta w,\ldots)$ къ измѣненной $f(u+\varepsilon\Delta u, v+\varepsilon\Delta v, w+\varepsilon\Delta w,\ldots)$. Этотъ диФФеренціалъ, который называютъ *частнымъ* (*différentielle partielle*), можетъ быть изображенъ знакоположеніемъ $d_u s$; слѣдовательно производная Функціи $f(u, v, w\ldots)$ по измѣняемости количества u, называемая *частною производною* (*dérivée partielle*), представится въ видѣ $\frac{d_u s}{du}$. Для сокращенія, въ производной не ставятъ буквы подъ знакомъ d; и такъ, вмѣсто $\frac{d_u s}{du}$, пишутъ просто $\frac{ds}{du}$. Въ такомъ случаѣ знаменатель du этой дроби, сверхъ обыкновеннаго своего значенія, имѣетъ еще другое, ибо онъ указываетъ на перемѣнную, относительно которой берется производная. Поэтому, выраженіе $\frac{ds}{du}du$ не можетъ быть сокращено. И такъ, первый членъ второй части Формулы (15) изобразится чрезъ $d_u s$ или $\frac{ds}{du}du$. Сказанное здѣсь о первомъ членѣ можно повторить и въ отношеніи втораго, третьяго...... члена той же Формулы (15); второй ея членъ изображаетъ частный диФФеренціалъ Функціи $s=f(u, v, w,\ldots)$ по измѣняемости количества v, третій, по измѣняемости w, и проч. Слѣдовательно получимъ Формулу

$$(16)\quad ds=d.f(u, v, w,\ldots)=d_u s+d_v s+d_w s+\ldots..$$

или, что всё равно,

$$(17)\quad ds=d.f(u,v,w,\ldots)=\frac{ds}{du}du+\frac{ds}{dv}dv+\frac{ds}{dw}dw+\ldots.$$

Формула (16) или (17) выражаетъ самое общее правило для диФФеренцированія сложныхъ Функцій. Въ слѣдствіе этого правила, *полный дифференціалъ сложной функціи равняется суммѣ частныхъ ея дифференціаловъ, то есть, дифференціаловъ, взятыхъ послѣдовательно въ разсужденіи каждой изъ простыхъ функцій, входящихъ въ составъ предложенной.*

Если раздѣлимъ уравн. (17) на dx, то получимъ производную сложной Функціи $f(u,v,w,\ldots)$; она будетъ

$$s'=\frac{ds}{dx}=\frac{ds}{du}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{ds}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{ds}{dw}\cdot\frac{dw}{dx}+\cdots$$
$$=\frac{ds}{du}u'+\frac{ds}{dv}v'+\frac{ds}{dw}w'+\ldots.$$

Принимая послѣдовательно $f(u,v,w,\ldots)$ равною $u+v+w$, $u-v$, uv и проч., получимъ:

$$d(u+v+w)=du+dv+dw,\ d(u-v)=du-dv,$$
$$d(uv)=vdu+udv=uv\left(\frac{du}{u}+\frac{dv}{v}\right),$$
$$d(uvw\ldots)=uvw\ldots\left(\frac{du}{u}+\frac{dv}{v}+\frac{dw}{w}+\ldots\right),$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right)=d(u.v^{-1})=v^{-1}.du-uv^{-2}dv=\frac{vdu-udv}{v^2},$$
$$d(u^v)=vu^{v-1}du+logu.u^vdv=u^v(v\frac{du}{u}+logu.dv),$$
$$d(u^{v^w})=u^{v^w}v^w\left[\frac{du}{u}+\frac{w}{v}logu.dv+logu.logv.dw\right],$$

и проч. и проч.

Изъ сихъ формулъ выводимъ правила, которыми должно руководствоваться при дифференцированіи сложныхъ функцій: наиупотребительнѣйшія изъ нихъ суть слѣдующія:

1°. *Дифференціалъ суммы или разности сколькихъ угодно функцій равняется суммѣ или разности дифференціаловъ сихъ самыхъ функцій.*

2°. *Дифференціалъ произведенія двухъ функцій равенъ второму множителю, помноженному на дифференціалъ перваго, плюсъ первый множитель, умноженный на дифференціалъ втораго.*

3°. *Дифференціалъ дроби равенъ знаменателю, помноженному на дифференціалъ числителя, безъ числителя, умноженнаго на дифференціалъ знаменателя, и всё раздѣленное на квадратъ знаменателя.*

Предлагаемъ нѣсколько примѣровъ для упражненія.

$$d(ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+\ldots+gx+h)=$$
$$(max^{m-1}+(m-1)bx^{m-2}+(m-2)cx^{m-3}+\ldots+g)dx,$$
$$d(Sin^2x-tang^3x)=2Sinx\,Cosx.dx-\frac{3tang^2x}{Cos^2x}.dx,$$
$$d(x^pe^{-x})=x^pe^{-x}\left(\frac{p}{x}-1\right)dx,$$
$$d\left(\frac{A^x}{x}\right)=\frac{A^x}{x}\left(log A-\frac{1}{x}\right)dx,$$
$$d(x^x)=x^x(1+logx)dx,\ d(x^{\frac{1}{x}})=x^{\frac{1}{x}}.\frac{1-logx}{x^2}.dx.$$

Опредѣленіе, предложенное для дифференціаловъ вещественныхъ функцій, распространяютъ и на дифференціалы мнимыхъ. И такъ, имѣя мнимое выраженіе

$$u+v\sqrt{-1},$$

въ которомъ u и v означаютъ вещественныя функціи перемѣнной независимой x, найдется

$$d(u+v\sqrt{-1})=du+dv\sqrt{-1},$$

и слѣдовательно, раздѣляя на dx,

$$(u+v\sqrt{-1})'=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\sqrt{-1}=u'+v'\sqrt{-1}.$$

Напримѣръ, если бы имѣли

$$s=Cos x+Sin x.\sqrt{-1},$$

то нашли бы

$$ds=-Sin x.dx+Cos x.\sqrt{-1}.dx=$$
$$(Cos x+Sin x.\sqrt{-1})dx\sqrt{-1}$$

и

$$s'=-Sin x+Cos x.\sqrt{-1}=(Cos x+Sin x.\sqrt{-1})\sqrt{-1}$$
$$=s\sqrt{-1}.$$

§ 7. Переходимъ теперь къ дифференцированію функцій съ нѣсколькими перемѣнными независимыми. Пусть будетъ $u=f(x,y,z\ldots)$ такого рода функція. Если изобразимъ чрезъ Δx, Δy, $\Delta z,\ldots$ произвольныя приращенія измѣняемыхъ $x,y,z,\ldots$ а чрезъ Δu соотвѣтственное приращеніе зависимой перемѣнной u, то получимъ

$$\Delta u=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z,\ldots)-f(x,\ y,\ z,\ldots).$$

Положимъ теперь $\Delta x=\varepsilon h$, $\Delta y=\varepsilon k$, $\Delta z=\varepsilon l,\ldots$; послѣднее уравненіе по раздѣленіи на ε приметъ видъ

$$(18)\quad \frac{\Delta u}{\varepsilon}=\frac{f(x+\varepsilon h,\ y+\varepsilon k,\ z+\varepsilon l,\ldots)-f(x,\ y,\ z,\ldots)}{\varepsilon}.$$

Если предположимъ теперь, что количество ε стремится къ нулю, то вторая часть формулы (18) будетъ приближаться къ нѣкоторому предѣлу, зависящему отъ $x, y, z,\ldots h, k, l,\ldots$ Этотъ предѣлъ, соотвѣтствующій предположенію $\varepsilon=0$, называется *полнымъ дифференціаломъ* или просто *дифференціаломъ* функціи $f(x,\ y,\ z,\ldots)$, который означаютъ знакоположеніемъ du или $d.f(x,\ y,\ z,\ldots)$. Сдѣланное нами опредѣленіе дифференціала функціи съ нѣсколькими перемѣнными, совершенно согласуется съ опредѣленіемъ дифференціала функціи объ одной измѣняемой [Смот. § 5 уравн. (13)]. И такъ, на этомъ основаніи, получимъ

$$(19)\qquad du=пред.\left\{\frac{\Delta u}{\varepsilon}\right\}.$$

Допуская послѣдовательно $u=x$, $u=y$, $u=z,\ldots$ найдемъ по формулѣ (19)

$$dx = \text{пред.}\left\{\frac{\varepsilon h}{\varepsilon}\right\} = h,\ dy = k,\ dz = l, \text{ и проч.},$$

откуда заключаемъ, что дифференціалы dx, dy, dz,.... перемѣнныхъ независимыхъ x, y, z,... соотвѣтственно равны постояннымъ величинамъ h, k, l,....

На основаніи тѣхъ сужденій, посредствомъ которыхъ вывели формулу (15) въ 6 параграфѣ, получимъ въ настоящемъ случаѣ

$$df(x, y, z,\ldots) =$$
$$\text{пред.}\left\{\frac{f(x+\varepsilon h, y+\varepsilon k, z+\varepsilon l,\ldots) - f(x, y+\varepsilon k, z+\varepsilon l,\ldots)}{\varepsilon}\right\}$$
$$+\ \text{пред.}\left\{\frac{f(x, y+\varepsilon k, z+\varepsilon l,\ldots) - f(x, y, z+\varepsilon l,\ldots)}{\varepsilon}\right\}$$
$$+\ \text{пред.}\left\{\frac{f(x, y, z+\varepsilon l,\ldots) - f(x, y, z,\ldots)}{\varepsilon}\right\} + \ldots.$$

Первый членъ второй части этой формулы называется *частнымъ дифференціаломъ* функціи u по измѣняемости перемѣнной x, второй — по измѣняемости y, третій — по измѣняемости z, и такъ далѣе. Эти дифференціалы обозначаются чрезъ $d_x u$, $d_y u$, $d_z u$...... И такъ, предыдущая формула доставитъ

$$du = df(x, y, z,\ldots) = d_x u + d_y u + d_z u + \ldots..$$

Частныя производныя функціи u въ разсужденіи x, y, z..... означаются соотвѣтственно чрезъ $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$,...., въ слѣдствіе чего du можетъ также быть представленъ въ видѣ

$$du = \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l + \ldots = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \ldots$$

Здѣсь, какъ уже объяснено въ § 6, выраженія $\frac{du}{dx}dx$, $\frac{du}{dy}dy$,..... не сокращаются, потому что знаменатели dx, dy,.... сверхъ обыкновеннаго своего значенія, служатъ для указанія на перемѣнную, въ отношеніи которой берется производная.

Мы не будемъ приводить примѣровъ дифференцированія функцій со многими перемѣнными независимыми. Изъ сказаннаго въ этомъ параграфѣ легко усмотрѣть, что всѣ правила и формулы, доказанныя въ § 6 для какихъ ни есть функцій u, v, w... одной перемѣнной независимой x, равно относятся и къ функціямъ объ нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ x, y, z... Стоитъ только въ примѣрахъ, приведенныхъ въ § 6, замѣнить величины u, v, w.... соотвѣтственно количествами x, y, z....

Сдѣлаемъ одно замѣчаніе, на основаніи котораго можно будетъ приводить дифференцированіе функціи съ нѣсколькими перемѣнными къ дифференцированію функціи объ одной измѣняемой. Дѣйствительно, разсматривая выраженіе

$$f(x+\varepsilon h,\ y+\varepsilon k,\ z+\varepsilon l,\ldots.)$$

какъ функцію одного количества ε, принимаемаго за перемѣнное, получимъ

$$f(x+\varepsilon h,\ y+\varepsilon k,\ z+\varepsilon l,\ldots) = F(\varepsilon),$$

откуда, по причинѣ $u = f(x, y, z\ldots) = F(0)$,

$$\frac{\Delta u}{\varepsilon} = \frac{F(\varepsilon) - F(0)}{\varepsilon},$$

и наконецъ, на основаніи формулы (19),

$$du = \text{пред.}\left\{\frac{F(\varepsilon) - F(0)}{\varepsilon}\right\} = F'(0).$$

И такъ, полный дифференціалъ функціи..... $f(x,y,z\ldots)$ будетъ равняться производной выраженія $f(x+\varepsilon h,\ y+\varepsilon k,\ z+\varepsilon l,\ldots)$ относительно ε для частной величины $\varepsilon = 0$. Вотъ примѣръ: $d(xyz) = [(x+\varepsilon h)(y+\varepsilon k)(z+\varepsilon l)]'$ для $\varepsilon = 0$; но

$$(x+\varepsilon h)(y+\varepsilon k)(z+\varepsilon l) =$$
$$xyz + (yzh + xzk + xyl)\varepsilon + (xkl + yhl + zhk)\varepsilon^2 + \varepsilon^3.$$

Производная этого выраженія по измѣняемости ε будетъ

$$yzh + xzk + xyl + 2(xkl + yhl + zhk)\varepsilon + 3\varepsilon^2;$$

полагая $\varepsilon = 0$, останется только $yzh + xzk + xyl$; слѣдовательно

$$d(xyz) = yzh + xzk + xyl = yzdx + xzdy + xydz.$$

§ 8. Теперь разсмотримъ общій случай дифференцированія явной функціи. Пусть будетъ

$$s = f(u, v, w,\ldots)$$

функція сколькихъ угодно количествъ u, v, w,..., которыя сами изображаютъ произвольныя функціи независимыхъ перемѣнныхъ x, y, z,....... И такъ, вообще $u = \varphi(x,y,z\ldots)$, $v = \chi(x,y,z\ldots)$, $w = \psi(x,y,z\ldots)$ и проч. Если положимъ теперь, что перемѣнныя x, y, z..... получили приращенія Δx, Δy, Δz....., то количества u, v, w,.., получатъ соотвѣтственныя приращенія Δu, Δv, Δw,...., а функція s обратится въ $s + \Delta s$. И такъ

$$\Delta s = f(u+\Delta u,\ v+\Delta v,\ w+\Delta w,\ldots) - f(u, v, w,\ldots).$$

Положимъ какъ выше

$$\Delta x = \varepsilon h,\ \Delta y = \varepsilon k,\ \Delta z = \varepsilon l,\ldots.;$$

приращенія функцій u, v, w,... будутъ вида

$$\Delta u = \varepsilon p,\ \Delta v = \varepsilon q,\ \Delta w = \varepsilon r,\ldots.,$$

откуда заключаемъ

$$p = \text{пред.}\left\{\frac{\Delta u}{\varepsilon}\right\} = du,\ q = dv,\ r = dw,\ldots.$$

Слѣдовательно $\frac{\Delta s}{\varepsilon}$ представится въ видѣ

$$\frac{\Delta s}{\varepsilon} = \frac{f(u+\varepsilon p,\ v+\varepsilon q,\ w+\varepsilon r,\ldots)-f(u,\ v,\ w,\ldots)}{\varepsilon}.$$

Если перейдемъ къ предѣлу этого выраженія положивъ $\varepsilon=0$, то, на основаніи сказаннаго въ § 6, найдемъ

$$ds=d_us+d_vs+d_ws+\ldots .=\frac{ds}{du}p+\frac{ds}{dv}q+\frac{ds}{dw}r+\cdots,$$

или

$$ds=\frac{ds}{du}du+\frac{ds}{dv}dv+\frac{ds}{dw}dw+\ldots..$$

Но, по предположенію, $u, v, w\ldots.$ суть нѣкоторыя функціи перемѣнныхъ, $x, y, z\ldots.$; слѣдовательно

$$du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}dz+\cdots$$
$$dv=\frac{dv}{dx}dx+\frac{dv}{dy}dy+\frac{dv}{dz}dz+\cdots$$
$$dw=\frac{dw}{dx}dx+\frac{dw}{dy}dy+\frac{dw}{dz}dz+\cdots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Подставляя эти величины въ предыдущее уравненіе, найдемъ окончательно

$$(20)\quad ds=\left(\frac{ds}{du}\frac{du}{dx}+\frac{ds}{dv}\frac{dv}{dx}+\frac{ds}{dw}\frac{dw}{dx}+\cdots\right)dx$$
$$+\left(\frac{ds}{du}\frac{du}{dy}+\frac{ds}{dv}\frac{dv}{dy}+\frac{ds}{dw}\frac{dw}{dy}+\cdots\right)dy$$
$$+\left(\frac{ds}{du}\frac{du}{dz}+\frac{ds}{dv}\frac{dv}{dz}+\frac{ds}{dw}\frac{dw}{dz}+\cdots\right)dz$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Пусть будетъ напримѣръ $s=\frac{u^v}{w}$, $u=x+y^2$, $v=xz$, $w=x+y-z$; найдется:

$$\frac{ds}{du}=\frac{vu^{v-1}}{w}, \quad \frac{ds}{dv}=\frac{\log u.u^v}{w}, \quad \frac{ds}{dw}=-\frac{u^v}{w^2},$$
$$\frac{du}{dx}=1, \quad \frac{du}{dy}=2y, \quad \frac{du}{dz}=0,$$
$$\frac{dv}{dx}=z, \quad \frac{dv}{dy}=0, \quad \frac{dv}{dz}=x,$$
$$\frac{dw}{dx}=1, \quad \frac{dw}{dy}=1, \quad \frac{dw}{dz}=-1,$$

и слѣдовательно, въ силу уравненія (20),

$$ds=\frac{u^v}{w}\left\{\left(\frac{v}{u}+z\log u-\frac{1}{w}\right)dx+\left(\frac{2vy}{u}-\frac{1}{w}\right)dy\right.$$
$$\left.+\left(x\log u+\frac{1}{w}\right)dz\right\}.$$

§ 9. Изобразимъ, какъ и въ предыдущемъ параграфѣ, чрезъ s функцію количествъ $u, v, w,\ldots$, которыя сами зависятъ отъ перемѣнныхъ $x, y, z\ldots.$ Если, для всѣхъ возможныхъ значеній сихъ послѣднихъ, другая функція r будетъ равна функціи s, то ясно, что изъ уравненія $s=r$, выведемъ

$$(21)\qquad ds=dr$$

Положивъ въ частности $r=$ *постоянной величинѣ* или *нулю*, найдется $dr=0$, и слѣдовательно

$$(22)\qquad ds=0.$$

Уравненія (21) и (22) представляютъ простѣйшіе случаи такъ называемыхъ *дифференціальныхъ уравненій.*

Если бы, напримѣръ, имѣли

$$x^3+y^3=xy$$

для всѣхъ возможныхъ значеній перемѣнныхъ x и y, то, въ силу формулы (21), въ которой слѣдовало бы положить $u=x$, $v=y$, получили бы

$$3x^2dx+3y^2dy=ydx+xdy, \text{ или}$$
$$(3x^2-y)dx+(3y^2-x)dy=0.$$

Вотъ другіе примѣры:

Полагая $x^2+y^2=a^2$, найдется

$$2xdx+2ydy=0, \text{ откуда } dy=-\frac{x}{y}dx;$$

но $y=\sqrt{a^2-x^2}$; слѣдовательно

$$d(\sqrt{a^2-x^2})=-\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Принявъ $x^2+y^2-z^2-a^2=0$, получимъ

$$2xdx+2ydy-2zdz=0, \text{ откуда } dz=\frac{x}{z}dx+\frac{y}{z}dy.$$

Если положимъ, что въ уравн. (22) перемѣнныя $x, y, z\ldots.$ подчинены зависимости, опредѣляемой уравненіями

$$L=\varphi(x,y,z\ldots)=0$$
$$M=\psi(x,y,z\ldots)=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

то сверхъ уравненія $ds=0$, получимъ еще формулы

$$dL=\frac{dL}{dx}dx+\frac{dL}{dy}dy+\frac{dL}{dz}dz+\ldots=0$$
$$dM=\frac{dM}{dx}dx+\frac{dM}{dy}dy+\frac{dM}{dz}dz+\ldots=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

посредствомъ которыхъ можно опредѣлить столько дифференціаловъ чрезъ остальные, сколько имѣемъ всѣхъ уравненій

$$ds=0,\ dL=0,\ dM=0,\ldots..$$

Положимъ напримѣръ

$$s=uv=\text{Пост.},\ u=x^2+y^2+z^2,$$
$$v=xyz,\ L=x+y+z=0;$$

найдется

$$d(uv)=vdu+udv=0,$$

или, замѣнивъ u, v, du, dv, равными имъ величинами,

$$\left.\begin{array}{l}(3x^2yz+z^3y+y^3z)\,dx\\+(3y^2xz+x^3z+z^3x)\,dy\\+(3z^2xy+y^3x+x^3y)\,dz\end{array}\right\}=0.$$

Сверхъ того, уравненіе $L=0$ доставляетъ

$$dx+dy+dz=0;$$

совокупляя это уравненіе съ предыдущимъ, получимъ формулы

$$dz=\frac{(3x^2yz+y^3z+z^3y)-(3y^2xz+x^3z+z^3x)}{(3y^2xz+x^3z+z^3x)-(3z^2xy+y^3x+x^3y)}dx$$

$$dy=\frac{(3x^2yz+y^3z+z^3y)-(3z^2xy+y^3x+x^3y)}{(3z^2xy+y^3x+x^3y)-(3y^2xz+x^3z+z^3x)}dx,$$

опредѣляющія dz и dy чрезъ dx.

§ 10. Переходимъ теперь къ производнымъ и дифференціаламъ высшихъ порядковъ. Займемся сперва функціями объ одной перемѣнной. Пусть будетъ $y=f(x)$; мы видѣли въ § 3, что выраженіе

$$y'=f'(x)=\textit{пред.}\left\{\frac{f(x+i)-f(x)}{i}\right\}$$

изображаетъ вообще нѣкоторую функцію перемѣнной x, которая принимаетъ названіе *производной*. Назовемъ $f'(x)$ *первою производною* (*fonction prime*) или *производною перваго порядка* (*dérivée du premier ordre*). Если подвергнемъ теперь функцію $f'(x)$ тому самому дѣйствію, какому подвергли функцію $f(x)$ для полученія первой производной, то найдемъ новую функцію перемѣнной x, которую назовемъ *второю производною* (*fonction seconde*) или *производною втораго порядка* (*dérivée du second ordre*). Означивъ ее чрезъ y'' или $f''(x)$, получимъ

$$y''=f''(x)=\textit{пред.}\left\{\frac{f'(x+i)-f'(x)}{i}\right\}.$$

Продолжая это дѣйствіе, получимъ сколько угодно новыхъ функцій, изъ которыхъ каждая будетъ производною предыдущей. Эти функціи называются *производными различныхъ порядковъ* (*dérivées de divers ordres*), и обозначаются вообще слѣдующимъ образомъ:

$$y',\ y'',\ y''',\ldots\ldots y^{(m)}$$

или $\quad f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ldots\ldots f^{(m)}(x).$

Въ слѣдствіе самаго опредѣленія производныхъ функцій различныхъ порядковъ, получимъ

$$y'=\frac{dy}{dx},\ y''=\frac{dy'}{dx},\ y'''=\frac{dy''}{dx},\ldots\ y^{(m)}=\frac{dy^{(m-1)}}{dx},$$

или

$$dy=y'dx,\ dy'=y''dx,\ dy''=y'''dx,\ldots dy^{(m-1)}=y^{(m)}dx.$$

Дифференцируя первое изъ сихъ уравненій нѣсколько разъ сряду въ предположеніи dx постояннаго, и слѣдовательно $d^2x=d^3x=\ldots=0$, найдемъ:

$$dy=y'dx,\ ddy=dxdy'=y''dx^2,$$
$$dddy=dx^2dy''=y'''dx^3,\ \text{и проч.}$$

Дифференціалы ddy, $dddy,\ldots$, которые для простоты изображаются чрезъ d^2y, $d^3y,\ldots$, называются *дифференціалами высшихъ порядковъ* (*différentielles des ordres supérieurs*); d^2y есть дифференціалъ *втораго* порядка, d^3y, *третьяго*, и проч.

Изъ уравненій

$$dy=y'dx,\ d^2y=y''dx^2,\ d^3y=y'''dx^3,\ldots\ldots$$
$$d^{(m)}y=y^{(m)}dx^m$$

выводимъ

$$y'=\frac{dy}{dx},\ y''=\frac{d^2y}{dx^2},\ y'''=\frac{d^3y}{dx^3},\ldots\ y^{(m)}=\frac{d^my}{dx^m};$$

эти дроби называются *дифференціальными коэффиціентами* (*coëfficients différentiels*) перваго, втораго, третьяго....m-го порядка, потому что вообще $\frac{d^my}{dx^m}$ или $y^{(m)}$ изображаетъ коэффиціентъ, на который должно помножить dx^m для полученія дифференціала m-го порядка функціи y.

Вотъ нѣсколько примѣровъ послѣдовательныхъ дифференцированій:

$$d^m(x^n)=n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)\,x^{n-m}.dx^m$$
$$d^m(A^x)=(\log A)^mA^x.dx^m$$
$$d^m(\log x)=(-1)^{m-1}.\frac{1.2.3\ldots(m-1)}{x^m}dx^m$$
$$d^m.\mathrm{Sin}\,x=\mathrm{Sin}(x+\tfrac{1}{2}m\pi).dx^m$$
$$d^m.\mathrm{Cos}\,x=\mathrm{Cos}(x+\tfrac{1}{2}m\pi).dx^m.$$

Если бы имѣли уравненіе $z=F(y)$, въ которомъ y есть нѣкоторая функція перемѣнной независимой x, то нашли бы

$$(23)\ \left\{\begin{array}{l}dz=F'(y)dy,\ d^2z=F''(y)dy^2+F'(y)d^2y,\\ d^3z=F'''(y)dy^3+3F''(y)dyd^2y+F'(y)d^3y,\ \text{и проч.}\end{array}\right.$$

Примѣры:

$$d^3(y^2)=6dyd^2y+2yd^3y$$
$$d^2(A^y)=\log A.A^y(\log A.dy^2+d^2y)$$
$$d^3(\mathrm{Sin}y)=-\mathrm{Cos}y.dy^3-3\mathrm{Sin}y.dy.d^2y+\mathrm{Cos}y.d^3y.$$

Формулы (23) могутъ служить для *измѣненія перемѣнной независимой*. Отсылаемъ по сему предмету къ статьѣ: CHANGEMENT DE LA VARIABLE INDÉPENDANTE.

§ 11. Легко распространить сказанное въ предыдущемъ параграфѣ на функцію съ нѣсколькими перемѣнными независимыми. Дѣйствительно, пусть будетъ $u=f(x, y, z\ldots)$; эту функцію можно дифференцировать нѣсколько разъ сряду относительно всѣхъ или только нѣкоторыхъ изъ перемѣнныхъ x, y, $z\ldots.$, при чемъ дифференціалы dx, dy, $dz\ldots.$ принимаются за величины постоянныя. Если будемъ дифференцировать функцію u одинъ, два, три... раза относительно всѣхъ перемѣнныхъ, то получимъ *полные дифференціалы* (*différentielles totales*) du, ddu, $dddu\ldots..$ перваго, втораго, третьяго..... порядка, которые для простоты означаются знакоположеніями du, d^2u, $d^3u\ldots.$ Но когда беремъ нѣсколько разъ сряду дифференціалы функціи u относительно одной изъ перемѣнныхъ x, y, $z\ldots.$, то получаемъ *частные дифференціалы* (*différentielles partielles*); и такъ, d_xu, $d^2{}_xu$, $d^3{}_xu\ldots..$ или, что всё равно, $\frac{du}{dx}dx$, $\frac{d^2u}{dx^2}dx^2$, $\frac{d^3u}{dx^3}dx^3\ldots...$ соотвѣтственно изображаютъ частные дифференціалы функціи u перваго, втораго, третьяго..... порядка. Можно также дифференцировать функцію u нѣсколько разъ сряду относительно нѣкоторыхъ изъ перемѣнныхъ независимыхъ x, y, $z\ldots.$ Получаемые такимъ образомъ частные дифференціалы высшихъ порядковъ изображаются слѣдующимъ образомъ: d_yd_xu или $\frac{d^2u}{dxdy}dxdy$, d_xd_yu или $\frac{d^2u}{dydx}dydx$, $d^2{}_xd_yd_zu$ или $\frac{d^4u}{dzdydx^2}dzdydx^2$ и проч. При употребленіи сихъ частныхъ дифференціаловъ, необходимо замѣтить, что они не измѣняются въ своей величинѣ каковъ бы ни былъ порядокъ послѣдовательныхъ дифференцированій относительно перемѣнныхъ x, y, $z\ldots$ И такъ

$$d_yd_xu=d_xd_yu \quad \text{или} \quad \frac{d^2u}{dxdy}=\frac{d^2u}{dydx},$$

$$d^3{}_xd^2{}_yd_zu=d_zd^2{}_yd^3{}_xu=d_zd_yd^3{}_xd_yu=$$
$$=d_zd_xd_yd_xd_yd_xu=\ldots\ldots...,$$

или, что всё равно,

$$\frac{d^5u}{dzdydx^3}=\frac{d^6u}{dx^3dy^2dz}=\frac{d^6u}{dydx^3dydz}=\frac{d^6u}{dxdydxdydxdz}=\ldots\ldots.$$

Чтобы доказать равенство $d_yd_xu=d_xd_yu$, мы покажемъ тожество двухъ выраженій $\Delta_y\Delta_xu$ и $\Delta_x\Delta_yu$, гдѣ подъ знакоположеніемъ Δ_xu разумѣемъ конечное приращеніе, получаемое функціею u, когда измѣняемъ въ ней x въ $x+\Delta x$, а подъ Δ_yu подобное приращеніе функціи u по измѣняемости количества y. Такъ какъ....... $u=f(x, y, z\ldots)$, то получимъ

$$\Delta_xu=f(x+\Delta x, y, z\ldots)-f(x, y, z\ldots),$$

и слѣдовательно

$$\Delta_y\Delta_xu=f(x+\Delta x, y+\Delta y, z\ldots)-f(x, y+\Delta y, z\ldots)$$
$$-f(x+\Delta x, y, z\ldots)+f(x, y, z\ldots).$$

Точно такимъ образомъ найдемъ

$$\Delta_yu=f(x, y+\Delta y, z\ldots)-f(x, y, z\ldots)$$

и

$$\Delta_x\Delta_yu=f(x+\Delta x, y+\Delta y, z\ldots)-f(x+\Delta x, y, z\ldots)$$
$$-f(x, y+\Delta y, z\ldots)+f(x, y, z\ldots).$$

Выраженія $\Delta_y\Delta_xu$ и $\Delta_x\Delta_yu$ тожественны: слѣдовательно можно сказать то̀ же самое и о дифференціалахъ d_yd_xu и d_xd_yu, ибо равенство... $\Delta_y\Delta_xu=\Delta_x\Delta_yu$ не нарушится, какъ бы малы не были приращенія Δx и Δy, которыя можно замѣнить величинами εdx и εdy, разумѣя подъ ε безконечно малое число.

На основаніи равенства $d_yd_xu=d_xd_yu$ легко доказать общее правило, въ слѣдствіе котораго позволяется измѣнять по произволенію порядокъ дифференцированій. И въ самомъ дѣлѣ, чтобы вывести, напримѣръ, справедливость уравненія

$$d_zd_yd_xu=d_xd_yd_zu,$$

пишемъ вторую его часть послѣдовательно въ слѣдующихъ видахъ:

$$d_xd_yd_zu=d_xd_y(d_zu)=d_yd_x(d_zu)=d_y(d_xd_zu)$$
$$=d_y(d_zd_xu)=d_yd_z(d_xu)=d_zd_yd_xu.$$

Чрезъ подобныя послѣдовательныя перемѣщенія буквъ, можно будетъ во всякомъ случаѣ доказать независимость частнаго дифференціала $d^l{}_xd^m{}_yd^n{}_z\ldots u$ отъ порядка, въ которомъ производятся дифференцированія.

Очевидно, что когда будемъ дифференцировать функцію $u=f(x, y, z\ldots)$ перемѣнныхъ независимыхъ x, y, $z\ldots.$ относительно какой нибудь изъ сихъ измѣняемыхъ, то получимъ въ результатѣ нѣкоторую конечную функцію отъ x, y, $z\ldots$, помноженную на дифференціалъ той измѣняемой; сверхъ того, замѣтивъ, что при дифференцированіи произведенія, постоянный множитель выносится за знакъ d, и что dx, dy, $dz,\ldots.$ суть величины постоянныя, мы въ правѣ будемъ заключить, что если функція....... $u=f(x, y, z\ldots)$ была дифференцирована l разъ

относительно x, m разъ относительно y, n разъ относительно z, ..., то окончательный диффеpенціалъ $d^l{}_x d^m{}_y d^n{}_z \ldots u$ будетъ равняться нѣкоторой функціи $\varphi(x, y, z\ldots)$, помноженной на произведеніе $dx^l dy^m dz^n \ldots$. И такъ
$d^l{}_x d^m{}_y d^n{}_z \ldots u = \varphi(x, y, z\ldots) dx^l dy^m dz^n \ldots$,
откуда

$$\varphi(x, y, z\ldots) = \frac{d^l{}_x d^m{}_y d^n{}_z \ldots u}{dx^l dy^m dz^n \ldots}.$$

Функція $\varphi(x, y, z\ldots)$, или равная ей дробь, называется *частною производною порядка*........ $l+m+n+\ldots$. Эта частная производная изображается обыкновенно въ слѣдующемъ сокращенномъ видѣ:

$$\frac{d^{l+m+n+\ldots}u}{dx^l dy^m dz^n \ldots}.$$

На основаніи сказаннаго выше, не трудно будетъ опредѣлить полные диффеpенціалы d^2u, d^3u,...... Дѣйствительно, принявъ въ соображеніе формулу

$$du = d_x u + d_y u + d_z u + \ldots$$

параграфа 7, найдемъ сперва

$$\begin{aligned} d^2u &= d_x(d_x u + d_y u + d_z u + \ldots) + d_y(d_x u + d_y u + d_z u + \ldots) \\ &\quad + d_z(d_x u + d_y u + d_z u + \ldots) + \ldots\ldots \\ &= d^2{}_x u + d_x d_y u + d_x d_z u + \ldots \\ &\quad + d_y d_x u + d^2{}_y u + d_y d_z u + \ldots \\ &\quad + d_z d_x u + d_z d_y u + d^2{}_z u + \ldots \\ &\quad + \ldots \ldots\ldots \end{aligned}$$

а потомъ, въ силу равенствъ $d_x d_y u = d_y d_x u$, $d_x d_z u = d_z d_x u$, $d_y d_z u = d_z d_y u$,.....,

$$d^2u = d^2{}_x u + d^2{}_y u + d^2{}_z u + \ldots + 2(d_x d_y u + d_x d_z u + \ldots + d_y d_z u + \ldots).$$

Это самое уравненіе можетъ быть написано въ слѣдующемъ, болѣе употребительномъ видѣ:

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2u}{dz^2}dz^2 + \ldots\ldots + 2\left[\frac{d^2u}{dxdy}dxdy + \frac{d^2u}{dxdz}dxdz + \ldots + \frac{d^2u}{dydz}dydz + \ldots\right].$$

Вотъ нѣсколько примѣровъ:

$$d^2(xy) = 2dxdy,\ d^3(xy) = 0,$$
$$d^2(x^2 + y^2 + z^2) = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$
$$d^2(xye^z) = e^z[2dxdy + 2ydxdz + 2xdydz + xydz^2]$$
$$d^3(xyz) = 6dxdydz,\ d^4(xyz) = 0.$$

Въ статьѣ: ANALOGIE DES DIFFÉRENCES AVEC LES PUISSANCES показано употребленіе символической формулы

$$d^m s = (d_x + d_y + d_z + \ldots)^m s,$$

посредствомъ которой можемъ найти очень легко диффеpенціалъ какого ни есть порядка функціи $s = f(x, y, z\ldots)$ отъ сколькихъ угодно перемѣнныхъ независимыхъ $x, y, z\ldots$.

Можно также привести опредѣленіе высшихъ диффеpенціаловъ функцій объ нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ къ разысканію диффеpенціаловъ высшихъ порядковъ для функцій съ одною только перемѣнною. Легко достигнуть этой цѣли соображаясь съ тѣмъ, что было сказано въ концѣ § 7. Дѣйствительно, принявъ.......... $u = f(x, y, z\ldots)$, и положивъ

$$f(x + \varepsilon dx, y + \varepsilon dy, z + \varepsilon dz, \ldots) = F(\varepsilon),$$

окажется, что разности

$$F(\varepsilon) - F(0),\ F'(\varepsilon) - F'(0),\ F''(\varepsilon) - F''(0), \ldots\ldots\ F^{(m-1)}(\varepsilon) - F^{(m-1)}(0)$$

соотвѣтственно изображаютъ приращенія, принимаемыя функціями

$$F(0),\ F'(0),\ F''(0), \ldots\ldots F^{(m-1)}(0),$$

когда подставимъ въ нихъ $x + \varepsilon dx, y + \varepsilon dy, z + \varepsilon dz,\ldots$ на мѣсто $x, y, z\ldots$. И такъ, наблюдая что $F(0) = u$, найдемъ послѣдовательно:

$$F'(0) = \text{пред.}\left\{\frac{F(\varepsilon) - F(0)}{\varepsilon}\right\} = \text{пред.}\frac{\Delta u}{\varepsilon} = du$$
$$F''(0) = \text{пред.}\left\{\frac{F'(\varepsilon) - F'(0)}{\varepsilon}\right\} = \text{пред.}\frac{\Delta du}{\varepsilon} = ddu = d^2u$$
$$F'''(0) = \text{пред.}\left\{\frac{F''(\varepsilon) - F''(0)}{\varepsilon}\right\} = \text{пред.}\frac{\Delta d^2u}{\varepsilon} = dd^2u = d^3u$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F^{(m)}(0) = \text{пред.}\left\{\frac{F^{(m-1)}(\varepsilon) - F^{(m-1)}(0)}{\varepsilon}\right\} = \text{пред.}\frac{\Delta d^{m-1}u}{\varepsilon} = dd^{m-1}u = d^m u.$$

И такъ

$$u = F(0),\ du = F'(0),\ d^2u = F''(0),\ d^3u = F'''(0), \ldots\ d^m u = F^{(m)}(0).$$

Изъ этихъ формулъ заключаемъ, что для опредѣленія послѣдовательныхъ диффеpенціаловъ функціи $f(x, y, z\ldots)$, стоитъ только найти послѣдовательныя производныя выраженія

$$f(x + \varepsilon dx, y + \varepsilon dy, z + \varepsilon dz, \ldots),$$

принимаемаго за функцію одной перемѣнной ε, и потомъ положить $\varepsilon = 0$.

§ 12. Въ силу § 8 легко опредѣлить послѣдовательные диффеpенціалы функціи

$$s = f(u, v, w, \ldots),$$

въ которой величины $u, v, w, \ldots$ означаютъ извѣстныя функціи перемѣнныхъ независимыхъ $x, y, z\ldots$. Но здѣсь должно замѣтить, что du, dv, dw,.... будутъ величины перемѣнныя, почему высшіе ихъ диффеpенціалы должны быть удержаны. Итакъ, на этомъ основаніи, получимъ:

$$ds = \frac{ds}{du}du + \frac{ds}{dv}dv + \frac{ds}{dw}dw + \cdots\cdots$$

$$d^2s = \frac{d^2s}{du^2}du^2 + \frac{d^2s}{dv^2}dv^2 + \frac{d^2s}{dw^2}dw^2 + \cdots\cdot$$

$$+ 2\frac{d^2s}{dudv}dudv + 2\frac{d^2s}{dudw}dudw + \ldots 2\frac{d^2s}{dvdw}dvdw + \ldots$$

$$+ \frac{ds}{du}d^2u + \frac{ds}{dv}d^2v + \frac{ds}{dw}d^2w + \cdots\cdot$$

и проч, и проч.

Очевидно, что въ этихъ формулахъ должно будетъ подставить на мѣсто du, dv, dw,.... d^2u, d^2v, d^2w,.... слѣдующія величины:

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \cdots$$

$$dv = \frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy + \frac{dv}{dz}dz + \cdots$$

$$dw = \frac{dw}{dx}dx + \frac{dw}{dy}dy + \frac{dw}{dz}dz + \cdots$$

....

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2u}{dz^2}dz^2 + \cdots\cdot$$

$$+ 2\left(\frac{d^2u}{dxdy}dxdy + \frac{d^2u}{dxdz}dxdz + \ldots + \frac{d^2u}{dydz}dydz + \ldots\right)$$

$$d^2v = \frac{d^2v}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2v}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2v}{dz^2}dz^2 + \cdots\cdot$$

$$+ 2\left(\frac{d^2v}{dxdy}dxdy + \frac{d^2v}{dxdz}dxdz + \ldots + \frac{d^2v}{dydz}dydz + \ldots\right)$$

$$d^2w = \frac{d^2w}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2w}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2w}{dz^2}dz^2 + \cdots\cdot$$

$$+ 2\left(\frac{d^2w}{dxdy}dxdy + \frac{d^2w}{dxdz}dxdz + \ldots + \frac{d^2w}{dydz}dydz + \ldots\right)$$

....

Для примѣра, положимъ что ищется второй диѳѳеренціалъ суммы $uv + v^2$, предполагая..... $u = \varphi(x, y)$ а $v = \psi(y, z)$. Найдется послѣдовательно

$$d(uv + v^2) = vdu + udv + 2vdv$$

$$d^2(uv + v^2) = vd^2u + 2dudv + ud^2v + 2dv^2 + 2vd^2v.$$

Сверхъ того

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dx}dy$$

$$dv = \frac{dv}{dy}dy + \frac{dv}{dz}dz$$

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy$$

$$d^2v = \frac{d^2v}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2v}{dz^2}dz^2 + 2\frac{d^2v}{dydz}dydz.$$

Подставляя эти величины для du, dv, d^2u, d^2v въ найденное выраженіе для $d^2(uv + v^2)$, а также $\varphi(x, y)$, $\psi(y, z)$ на мѣсто u и v, получимъ искомый диѳѳеренціалъ втораго порядка въ однихъ x, y, z и диѳѳеренціалахъ dx, dy, dz.

Вотъ полное изложеніе правилъ для диѳѳеренцированія ѳункцій. Приводимъ теперь краткое обозрѣніе главныхъ способовъ изложенія Диѳѳеренціальнаго Исчисленія.

Краткій очеркъ главныхъ способовъ изложенія Диѳѳеренціальнаго Исчисленія.

О способѣ безконечно малыхъ величинъ, предложенномъ Лейбницемъ.

При изложеніи правилъ Диѳѳеренціальнаго Исчисленія, Лейбницъ руководствовался способомъ безконечно малыхъ величинъ, который основалъ на слѣдующихъ началахъ: онъ предположилъ, что всякая перемѣнная величина, при переходѣ изъ одного состоянія въ другое, получаетъ безконечно малыя приращенія, то есть увеличивается или уменьшается такими количествами, которыя, по своей малости, не могутъ быть сравниваемы ни съ какою конечною величиною; за симъ слѣдуетъ требованіе, чтобы двѣ величины, разнствующія между собою количествомъ безконечно малымъ въ сравненіи съ каждою изъ нихъ, могли быть принимаемы безъ различія одна за другую.

Безконечно малое приращеніе перемѣнной величины Лейбницъ называетъ *диѳѳеренціаломъ*, и изображаетъ буквою d, поставленною передъ разсматриваемою величиною. Итакъ, диѳѳеренціалы перемѣнныхъ x и y обозначаются соотвѣтственно чрезъ dx и dy. Пусть будетъ $y = f(x)$, и положимъ что величина x получила безконечно малое приращеніе dx; ѳункція $f(x)$ или y получитъ соотвѣтственное приращеніе dy, почему и будетъ $y + dy = f(x + dx)$, или..... $dy = f(x + dx) - f(x)$. Вь слѣдствіе приведеннаго выше требованія, въ разности $f(x + dx) - f(x)$ должно будетъ удержать только членъ, заключающій въ себѣ первую степень приращенія dx, а члены съ высшими степенями диѳѳеренціала dx должны быть откинуты. Итакъ, если бы имѣли $y = x^3$, то нашли бы сперва

$$dy = (x + dx)^3 - x^3 = 3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3,$$

и какъ $3xdx^2$ и dx^3 въ отношеніи къ $3x^2dx$ суть количества безконечно малыя, ибо содержанія ихъ къ $3x^2dx$ соотвѣтственно равны $\frac{dx}{x}$, $\frac{dx^2}{3x^2}$, то и слѣдуетъ ихъ откинуть, почему

$$dy = 3x^2dx.$$

Подобнымъ образомъ найдемъ

$$d(xy) = ydx + xdy;$$

и дѣйствительно

$$d(xy) = (x+dx)(y+dy) - xy$$
$$= ydx + xdy + dxdy.$$

Но членъ $dxdy$ долженъ быть откинутъ, потому что въ разсужденіи величинъ ydx и xdy онъ будетъ количествомъ безконечно малымъ; и въ самомъ дѣлѣ, отношенія $dxdy$ къ ydx и xdy будутъ соотвѣтственно $\frac{dy}{y}$ и $\frac{dx}{x}$.

На томъ же основаніи найдется

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x+dx}{y+dy} - \frac{x}{y} = \frac{ydx-xdy}{y(y+dy)};$$

откинувъ въ знаменателѣ безконечно малую величину dy, сложенную съ конечною y, получимъ

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx-xdy}{y^2}.$$

Съ такою же простотою выводятся по способу Лейбница дифференціалы какихъ ни есть функцій. Такъ напримѣръ, для опредѣленія дифференціала *синуса*, мы получимъ формулу

$$d.Sin x = Sin(x+dx) - Sin x$$
$$= Sin x . Cos dx + Sin dx . Cos x - Sin x.$$

Но косинусъ безконечно малой дуги разнствуетъ отъ радіуса количествомъ безконечно малымъ; слѣдовательно, положивъ радіусъ равнымъ единицѣ, будетъ $Cos dx = 1$; съ другой стороны, синусъ безконечно малой дуги разнствуетъ отъ самой дуги безконечно малою величиною высшаго порядка, почему должно принять ...... $Sin dx = dx$. И такъ, предыдущая формула доставитъ

$$d.Sin x = Cos x . dx.$$

Переходимъ теперь къ дифференціаламъ высшихъ порядковъ.

Безконечно малая величина, которою увеличивается или уменьшается дифференціалъ перемѣнной величины, называется *дифференціаломъ дифференціала* или *вторымъ дифференціаломъ*; безконечно малое приращеніе втораго дифференціала — *третьимъ дифференціаломъ*, и такъ далѣе. Дифференціалы высшихъ порядковъ обозначаются повторенною буквою d; и такъ, ddy, $dddy$, ... изображаютъ *второй*, *третій*...... дифференціалъ перемѣнной величины y. Для сокращенія пишутъ d^2y, d^3y......

Чтобы показать геометрическое значеніе дифференціаловъ высшихъ порядковъ, пусть будетъ плоская кривая AmB (черт. 6 Листъ VIII), отнесенная къ двумъ прямоугольнымъ координатнымъ осямъ OX, OY. Положимъ $Op = x$, $pm = y$ и $pp' = p'p'' = p''p''' = . \; . = dx$. Проведемъ изъ точекъ m, m', m''... линіи mq, $m'q'$, $m''q''$... параллельно оси x-овъ, и $m'n$, $m''n'$..... параллельно прямымъ qq', $q'q''$,..... Если теперь примемъ въ соображеніе равенства

$$p'm' = y + dy$$
$$p''m'' = y + dy + d(y+dy) = y + 2dy + d^2y$$
$$p'''m''' = y + 2dy + d^2y + d(y + 2dy + d^2y)$$
$$= y + 3dy + 3d^2y + d^3y$$

....

то выведемъ изъ нихъ слѣдующія значенія для дифференціаловъ ординатъ: $dy = m'q$, $d^2y = m''n$, $d^3y = m''n - m'''n'$, и такъ далѣе. Легко видѣть, что когда кривая вогнута къ оси x-овъ, то d^2y будетъ количествомъ отрицательнымъ. —

Всякая величина, въ отношеніи къ своему дифференціалу, называется *интеграломъ* или *суммою*, потому что она дѣйствительно изображаетъ сумму безконечно малыхъ приращеній, получаемыхъ этою величиною; Смот. INTÉGRAL (CALCUL). Интегралъ обозначается знакомъ $\int$ (начальною буквою *суммы*, *summa*), поставленнымъ передъ дифференціаломъ. —

Въ приложеніяхъ Дифференціальнаго Исчисленія почти всегда придерживаются способа безконечно малыхъ величинъ, который имѣетъ передъ другими то преимущество, что сокращаетъ значительнымъ образомъ рядъ сужденій, ведущихъ къ доказательству какой либо истины. Нѣкоторые математики, въ томъ числѣ Ньёвентитъ, современникъ Лейбница, возставали противъ строгости этого способа. Лейбницъ, въ первомъ объясненіи на возраженія Ньёвентита (Act. Lips. 1694), отвѣчалъ неудовлетворительно: онъ называлъ свои безконечно малыя количества или дифференціалы величинами *не подлежащими сравненію* (*incomparables*); такова величина песчинки въ отношеніи къ сферѣ неподвижныхъ звѣздъ. Очевидно, что допустивъ справедливость такого объясненія, мы разрушили бы точность Дифференціальнаго Анализа въ самомъ его основаніи. Лейбницъ скоро замѣтилъ свою ошибку, и, вслѣдъ за первымъ объясненіемъ, сообщилъ дополненіе къ прежнему отвѣту, предлагая на этотъ разъ другія мысли, болѣе основательныя.

Возраженія противъ способа безконечно малыхъ величинъ неосновательны, ибо Дифференціальное Исчисленіе, въ сущности своей, совершенно независимо отъ разсматриванія подобныхъ количествъ, которыя, какъ уже сказано выше, употребляются единственно для сокращенія сужденій. Объяснимъ это примѣромъ.

Пусть будетъ $Amm'B$ (черт. 7 Листъ VIII) кривая линія, отнесенная къ прямоугольнымъ координатамъ $Op=x$, $pm=y$, и предложимъ себѣ найти дифференціалъ площади $OAmpO$. Если означимъ чрезъ $\varphi(x)$ эту площадь, и дадимъ какое ни есть конечное приращеніе $pp'=i$ абсциссѣ x, то $\varphi(x+i)$ изобразитъ площадь... $OAmm'p'O$, а $\varphi(x+i)-\varphi(x)$ приращеніе $pmm'p'p$ первоначальной площади $\varphi(x)$. Разлагая $\varphi(x+i)-\varphi(x)$ въ рядъ по степенямъ i, получимъ

$$pi+qi^2+\ldots\ldots,$$

гдѣ p, по самому опредѣленію, изображаетъ *производную функцію*, или, что всё равно, *дифференціальный коэффиціентъ* площади $\varphi(x)$. Но, съ другой стороны, площадь $pmm'p'p$ составлена изъ площадей $pmqp'$, mrq, и проч. И такъ, означивъ чрезъ α уголъ rmq касательной въ точкѣ m съ осью x-овъ, площади, о которыхъ говоримъ, изобразятся соотвѣтственно чрезъ yi, $\frac{\tang \alpha}{2}\cdot i^2$ и проч., почему и найдется

$$pmm'p'p=yi+\frac{\tang \alpha}{2}\cdot i^2+\ldots.$$

Слѣдовательно

$$pi+qi^2+\ldots.=yi+\frac{\tang \alpha}{2}\cdot i^2+\ldots.$$

Вотъ равенство, которое должно имѣть мѣсто для всѣхъ возможныхъ значеній приращенія i, почему, *чрезъ сравненіе коэффиціентовъ* у одинаковыхъ степеней i, найдемъ

$$p=y,\ q=\tfrac{1}{2}\tang \alpha, \text{ и проч.}$$

Но p, какъ сказано выше, есть ни что иное, какъ производная отъ функціи $\varphi(x)$; и такъ $\varphi'(x)=y$. Слѣдовательно, искомый дифференціалъ площади опредѣлится формулою

$$d\varphi(x)=\varphi'(x)\,dx=ydx.$$

Этотъ самый выводъ получится гораздо проще посредствомъ Лейбницева способа; дѣйствительно, если проведемъ ординату $\pi\mu$ (тотъ же чертежъ) на безконечно близкомъ разстояніи dx отъ ординаты pm, то $pm\mu\pi$ изобразитъ дифференціалъ площади $\varphi(x)$; эта элементарная площадь состоитъ изъ прямоугольника $pm\lambda\pi=ydx$ и треугольника $m\mu\lambda=\frac{dxdy}{2}$, ибо безконечно малая дуга $m\mu$ принимается за прямую линію. Такъ какъ отношеніе $\frac{dxdy}{2}$ къ ydx есть безконечно малая величина $\frac{dy}{2y}$, то членъ $\frac{dxdy}{2}$ долженъ быть откинутъ предъ ydx, почему и получимъ какъ выше $d\varphi(x)=ydx$.

Чтобы согласить простоту теоріи безконечно малыхъ величинъ съ строгостію способа *чрезъ сравненіе коэффиціентовъ*, можно поступать слѣдующимъ образомъ: употреблять первый изъ сихъ способовъ только для опредѣленія коэффиціента p у первой степени приращенія i, предполагая сіе послѣднее безконечно малымъ, а потомъ уже принимать i произвольнымъ. Такимъ образомъ сохранимъ всю простоту, свойственную теоріи безконечно малыхъ величинъ, и, вмѣстѣ съ тѣмъ, оградимъ доказательства отъ возраженій, которымъ подвергался Лейбницевъ анализъ.

Знакоположеніе Лейбница вошло во всеобщее употребленіе. Только нѣкоторые Англійскіе математики, благоговѣя къ памяти Нютона, или изъ народной гордости, удержали означенія способа флюкцій.

О способѣ флюкцій, предложенномъ Нютономъ.

Нютонъ, въ изложеніи своего способа флюкцій, прибѣгаетъ къ соображеніямъ геометрическимъ и механическимъ. Онъ разсматриваетъ кривыя линіи какъ бы образуемыя равномѣрнымъ движеніемъ точки, постоянная скорость которой разлагается въ каждое мгновеніе на двѣ другія, параллельныя двумъ координатнымъ осямъ. Эти три скорости Нютонъ и называетъ *флюкціями* (*fluxio — теченіе*) дуги и двухъ координатъ кривой линіи. Флюкція обозначается точкою, поставленною надъ разсматриваемою величиною. И такъ, если изобразимъ чрезъ x, y и s абсциссу, ординату и дугу данной кривой линіи, то флюкціи количествъ x, y и s будутъ соотвѣтственно $\dot{x}$, $\dot{y}$ и $\dot{s}$. На-оборотъ, величины x, y и s, въ отношеніи къ ихъ флюкціямъ $\dot{x}$, $\dot{y}$ и $\dot{s}$, Ньютонъ называетъ *флюэнтами* (*fluenta—текущія*), которыя обозначаютъ знакомъ *Fl.* въ такомъ видѣ: $Fl.\dot{x}=x$, $Fl.\dot{y}=y$, $Fl.\dot{s}=s$, $Fl.x^m.\dot{x} = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \text{Пост.}$ и проч. И такъ, *флюкція* соотвѣтствуетъ Лейбницеву *дифференціалу*, а *флюэнта—интегралу*. Впрочемъ должно замѣтить, что флюкція, какъ количество конечное, разнствуетъ отъ Лейбницева дифференціала, изображающаго величину безконечно малую.

Мы сей-часъ сказали, что скорость точки, описывающей кривую, принимается постоянною. Но можно также предположить движеніе точки неравномѣрнымъ, а принять постоянною составляющую скорость или по оси абсциссъ, или по оси ординатъ. Такъ напримѣръ, принимая флюкцію *абсциссы* постоянною, можемъ представить себѣ образованіе параболы слѣдующимъ образомъ: прямая AB (черт. 8 Листъ VIII), совмѣщающаяся въ началѣ движенія съ осью OY, движется параллельно этой оси отъ O къ X съ постоянною скоростію; въ то же время точка M, находящаяся въ началѣ координатъ O когда начинается движеніе, движется по прямой AB съ перемѣнною скоростію, при которой перейденное пространство AM изображаетъ среднюю пропорціональную между данною линіею (параметромъ параболы) и соотвѣтствующею абсциссою OA. При такомъ движеніи точка M опишетъ полу-параболу OMC. Отношеніе, существующее въ какое ни есть мгновеніе между скоростію точки M, движущейся по прямой AB, и постоянною скоростію линіи AB, изобразитъ отношеніе флюкціи ординаты къ флюкціи абсциссы; по знакоположенію Ньютона это отношеніе обозначится чрезъ $\dot{y}:\dot{x}$ или $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, а по Лейбницу, чрезъ $dy:dx$ или $\frac{dy}{dx}$. Для параболы, о которой идетъ рѣчь, будетъ $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{dy}{dx}=\frac{p}{2y}$, разумѣя подъ p данный ея параметръ.

Правила способа флюкцій не отличаются отъ правилъ Дифференціальнаго Исчисленія. Но не должно терять изъ виду, что $\dot{x}$ есть количество конечное, именно, скорость движущейся точки, параллельная оси x-овъ, между тѣмъ какъ dx, по Лейбницу, изображаетъ безконечно малое приращеніе абсциссы x. Пояснимъ это другимъ образомъ: если изобразимъ чрезъ t время, протекшее отъ начала движенія, то изъ сказаннаго выше легко заключить что $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$, $\dot{y}=\frac{dy}{dt}$; Смот. VITESSE. И такъ, $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{dy}{dx}$, и каждая изъ величинъ $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ будетъ величина конечная.

Если примемъ флюкціи $\dot{x}$ и $\dot{y}$ первоначальной кривой за координаты новой кривой, то флюкціи абсциссы и ординаты сей послѣдней будутъ уже *флюкціями отъ флюкцій*, и изобразятся чрезъ $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$. Очевидно, что эти флюкціи втораго порядка будутъ также количества конечныя. Точно такимъ образомъ составятся и флюкціи третьяго порядка, которыя изображаются знакоположеніемъ $\dddot{x}$, $\dddot{y}$ и проч.

Сказанное здѣсь о приложеніи Способа Флюкцій къ образованію кривыхъ линій, можетъ быть распространено на опредѣленіе ихъ площадей, дугъ, также на кривыя поверхности, ихъ объёмы и проч. И вообще, способъ Ньютона примѣняется съ удобностію къ рѣшенію вопросовъ по разнымъ отраслямъ Естественной Философіи

Здѣсь мѣсто указать на другой способъ, предложенный также Ньютономъ, и имѣющій близкую связь съ Дифференціальнымъ Исчисленіемъ. Мы разумѣемъ способъ *первыхъ и послѣднихъ содержаній*. Смот. DERNIÈRE VALEUR.

Нѣкоторые математики возражали противъ Способа Флюкцій, что онъ вводитъ въ Геометрію, принадлежащую въ нѣкоторомъ отношеніи къ Чистой Математикѣ, понятіе о скорости, заимствованное изъ Механики — науки прикладной. Такимъ образомъ, простое понятіе о протяженіи замѣняется сложнымъ — о скорости. Приверженцы Способа Флюкцій отвѣчали на это, что порядокъ, въ которомъ распредѣляются различныя отрасли наукъ математическихъ, болѣе или менѣе произвольный; хотя Геометрія въ принятомъ распредѣленіи и предшествуетъ Механикѣ, но нѣтъ сомнѣнія, что высшія части первой, отвлеченнѣе элементарныхъ частей второй. И такъ, не погрѣшая противъ духа Математематики, можно, опредѣленіе флюкцій основать на понятіи о скорости, болѣе вразумительномъ для каждаго.

Мы не будемъ разбирать, до какой степени возраженія противъ Способа Флюкцій могутъ быть основательны. Скажемъ только, что понятіе о перемѣнной скорости весьма далеко отъ очевидности. Даже можно догадываться, что самъ Нютонъ, предвидя возраженіе, сознавалъ его сильную сторону, ибо, во многихъ мѣстахъ своихъ *Началъ*, онъ предпочелъ употребленіе способа первыхъ и послѣднихъ содержаній.

Послѣ Нютона и Лейбница нѣкоторые первостепенные геометры излагали начала Дифференціальнаго Исчисленія по собственному возрѣнію. *Эйлеръ*, съ цѣлію согласить простоту Лейбницева способа съ строгостію математическою, разсматривалъ безконечно малыя количества какъ настоящіе нули, различающіеся между собою только происхожденіемъ, почему взаимныя ихъ отношенія приводятся къ величинамъ опредѣленнымъ. На основаніи этой мысли, Эйлеръ, въ сочиненіи своемъ *Institutiones Calculi differentialis*, опредѣлилъ Дифференціальное Исчисленіе способомъ, посредствомъ котораго опредѣляются отношенія исчезающихъ приращеній, получаемыхъ какими ни есть функціями, когда самымъ перемѣннымъ, отъ которыхъ сіи функціи зависятъ, приписываютъ исчезающія же приращенія. Смот. ÉVANOUISSANTES (QUANTITÉS).

Лагранжъ замѣтилъ въ объясненіи Эйлера то неудобство, что количества разсматриваются въ исчезающемъ ихъ состояніи, слѣдовательно въ то мгновеніе, когда они, собственно говоря, перестаютъ быть величинами. „И въ самомъ дѣлѣ, говоритъ Лагранжъ *), хотя мы ясно понимаемъ, что должно разумѣть подъ отношеніемъ двухъ количествъ, когда разсматриваются количества конечныя, но это самое отношеніе не представляетъ уму никакого яснаго и опредѣленнаго понятія, когда въ одно время оба члена содержанія обращаются въ нуль.“

Лагранжъ, въ Запискахъ Берлинской Академіи за 1772 годъ, предложилъ теорію разложенія функцій въ ряды. Его Разсужденіе заключало въ себѣ истинныя начала Дифференціальнаго Исчисленія, освобожденнаго отъ разсматриванія безконечно малыхъ количествъ или исчезающихъ величинъ, и флюкцій или предѣловъ. Позже, онъ издалъ объ этомъ предметѣ два сочиненія: *Théorie des fonctions analytiques* и *Calcul des fonctions*. Отсылаемъ для нѣкоторыхъ подробностей къ статьѣ DÉRIVÉE нашего Лексикона.

Маклоренъ и *Д'Аламбертъ* основали Дифференціальное Исчисленіе на теоріи предѣловъ, или, что всё равно, на способѣ первыхъ и послѣднихъ содержаній Нютона. Они разсматривали отношеніе дифференціала функціи къ дифференціалу перемѣннаго количества какъ предѣлъ отношенія конечнаго приращенія функціи къ конечному же приращенію перемѣннаго количества, когда члены этого содержанія обращаются оба въ нуль. Смот. § 3 Изложенія правилъ Дифференціальнаго Исчисленія, а также статьи LIMITE, DERNIÈRE VALEUR.

Кромѣ поименованныхъ математиковъ и нѣкоторые другіе предложили свои способы разсматриванія Дифференціальнаго Исчисленія. Примѣчательнѣйшіе изъ нихъ *Ланденъ*, издавшій въ 1764 году по сему предмету книгу: The residual analysis; *Пасквичъ* (*Pasquich*), *Грузонъ* (*Gruson*) [Смот. его *Mémoires sur le Calcul d'exposition* въ Mémoires de l'Académie de Berlin за 1798 и 1799 годы]; *Крампъ* и *Арбогастъ*. [Смот. DÉRIVATIONS (CALCUL DES)].

Читатели, желающіе почерпнуть довольно подробныя свѣдѣнія объ различныхъ способахъ изложенія Дифференціальнаго Исчисленія, могутъ

---

*) *Théorie des fonctions analytiques*, 1-ое изданіе, стр. 4.

обратиться къ сочиненію: *Réflexions sur la métaphysique du Calcul Infinitésimal*, par M. Carnot, 2de édition, 1813.

Въ заключеніе этой статьи, приводимъ главныя знакоположенія, которыя были предложены для изображенія дифференціальнаго коэффиціента. Вотъ они:

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{\dot{y}}{\dot{x}},\ f'(x),\ y',\ [x \perp y],\ \partial y,\ \frac{\mathfrak{Z}y}{x},\ \mathrm{D}y.$$

Первое знакоположеніе принадлежитъ *Лейбницу*, второе — *Нютону*, третье и четвертое — *Лагранжу*, пятое — *Ландену*, шестое — *Пасквичу*, седьмое — *Грузону*, и наконецъ осьмое — *Арбогасту*.

Въ статьѣ INTÉGRAL (CALCUL) мы укажемъ на лучшіе трактаты объ Дифференціальномъ и Интегральномъ Исчисленіи. Пріуготовительнымъ же пособіемъ къ изученію Дифференціальнаго Анализа можетъ служить превосходное сочиненіе Эйлера: *Introductio in analysin infinitorum*, 1748 г.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ. Уравненія, заключающія въ себѣ перемѣнныя величины съ ихъ дифференціалами. Когда въ уравненіе, сверхъ перемѣнныхъ количествъ, входятъ только дифференціалы перваго порядка, то оно называется *дифференціальнымъ уравненіемъ перваго порядка* (*équation différentielle du premier ordre*); напримѣръ, $f(x, y)dx + F(x, y)dy = 0$. Когда уравненіе заключаетъ въ себѣ дифференціалъ втораго порядка зависимой перемѣнной, то оно принимаетъ названіе *дифференціальнаго уравненія втораго порядка*; напримѣръ, $f(x,y)d^2y + F(x,y)dx\,dy + \varphi(x, y)\,dx^2 = 0$, и такъ далѣе.

Степенью дифференціальнаго уравненія (*degré de l'équation différentielle*) называется высшая степень, въ которую возвышенъ высшаго порядка дифференціалъ перемѣнной независимой. Итакъ, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} + y = 0$ есть *дифференціальное уравненіе 1-го порядка и 2-ой степени*, а $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + xy = 0$, *дифференціальное уравненіе 2-го порядка и 2-ой степени*.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SIMULTANÉES. СОВОКУПНЫЯ, СОВМѢСТНЫЯ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ. Когда имѣемъ m дифференціальныхъ уравненій съ $(m+1)$ою перемѣнною величиною, то эти m уравненій, разсматриваемыя вмѣстѣ, называются *совокупными дифференціальными уравненіями*. Таковы напримѣръ два уравненія перваго порядка:

$$(ax + by)dt + dx = 0,\ (a'x + b'y)dt + dy = 0,$$

и три уравненія втораго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0,\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0.$$

ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES или AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES. УРАВНЕНІЯ ВЪ ЧАСТНЫХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛАХЪ или ЧАСТНО-ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ. Уравненія, заключающія въ себѣ сверхъ перемѣнныхъ величинъ, частные дифференціалы сихъ послѣднихъ. Смот. DIFFÉRENTIEL (CALCUL) § 6. Таково частное дифференціальное уравненіе 1-го порядка

$$f(x, y, z)\frac{dz}{dx} + F(x, y, z)\frac{dz}{dy} = \varphi(x, y, z)$$

и частное дифференціальное уравненіе 2-го порядка

$$P\frac{d^2z}{dx^2} + Q\frac{d^2z}{dxdy} + R\frac{d^2z}{dy^2} + S\frac{dz}{dx} + T\frac{dz}{dy} = U,$$

въ которомъ P, Q, R, S, T и U изображаютъ какія ни есть функціи перемѣнныхъ x, y и z.

ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES MÊLÉES. ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЯ УРАВНЕНІЯ. Уравненія, заключающія въ себѣ перемѣнныя величины, ихъ дифференціалы и конечныя разности. Таковы напримѣръ два уравненія

$$\frac{dy}{dx} + \Delta y + y = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\Delta y}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + x = 0.$$

Что касается до теоріи дифференціальныхъ уравненій и до ихъ интегрированія, то читатели найдутъ надлежащія подробности въ статьѣ INTÉGRAL (CALCUL), а также и въ другихъ мѣстахъ нашего Лексикона. Отсылаемъ преимущественно къ словамъ: ARBITRAIRES (ÉLIMINATION DES CONSTANTES), BERNOULLI (ÉQUATION DE), HOMOGÈNES (ÉQUATIONS), LINÉAIRES (ÉQUATIONS), RICCATI (ÉQUATION DE), SIMULTANÉES (ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES), TANGENTES (PROBLÊME DES) и проч. и проч.

DIFFÉRENTIELLE. ДИФФЕРЕНЦІАЛЪ. Смот. DIFFÉRENTIEL (CALCUL).

DIFFÉRENTIER. ДИФФЕРЕНЦИРОВАТЬ. Находить, опредѣлять дифференціалъ какой ни есть функціи или уравненія. Смот. DIFFÉRENTIEL (CALCUL).

DIFFERENTIO-DIFFÉRENTIELLE (ÉQUATION). ДИФФЕРЕНЦІАЛО-ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОЕ УРАВНЕНІЕ. Такъ называлъ *Эйлеръ* дифференціальныя уравненія втораго порядка.

Calcul differentio-différentiel. Уст. выр. Дифференціало-дифференціальное исчисленіе. Совокупность способовъ служащихъ для нахожденія дифференціаловъ высшихъ порядковъ.

DIFFRACTION или **INFLEXION DE LA LUMIÈRE.** (Физ.) **ДИФФРАКЦІЯ, УКЛОНЕНІЕ СВѢТА.** Если сквозь весьма малое отверстіе, сдѣланное въ ставнѣ окна тёмной комнаты, пропустимъ кисть солнечнаго свѣта такъ, чтобы лучи падали на волосокъ или на тонкую проволоку, установленную въ нѣсколькихъ футахъ отъ отверстія, то усмотримъ слѣдующее явленіе: тѣнь волоска, принятая въ нѣкоторомъ отъ него разстояніи на бѣлую бумагу, будетъ имѣть ширину гораздо бо́льшую противъ той, какую слѣдовало бы получить по разстоянію тѣни отъ волоска, и по діаметру сего послѣдняго, допуская прямолинейное распространеніе свѣта. Сверхъ того, по обѣимъ сторонамъ тѣни, увидимъ цвѣтныя полосы или каймы. Это свойство свѣта, по которому лучи его, коснувшись краевъ тѣла, уклоняются отъ первоначальнаго направленія, называется *диффракціею* или *уклоненіемъ.* Читатели найдутъ болѣе или менѣе удовлетворительныя объясненія этого явленія въ новѣйшихъ Запискахъ и Трактатахъ о теоріи свѣта.

Первый, замѣтившій *диффракцію*, былъ, какъ полагаютъ, Іезуитъ *Гримальди*, жившій въ концѣ XVII столѣтія. Въ новѣйшія времена это явленіе было предметомъ изслѣдованій *Юнга, Фрауенгофера, Френеля* и другихъ физиковъ.

DIFFUSION. (Физ.) **РАСПРОСТРАНЕНІЕ.** *Diffusion de la lumière*; *распространеніе свѣта.* Смот. PROPAGATION.

DIGNITÉ. (Алг.) Уст. выр. **СТЕПЕНЬ.** Слово *dignité* употреблялось прежними алгебристами въ одномъ смыслѣ съ *degré.* И такъ, говорили: *l'inconnue de cette équation monte à la 2*^{de}, *3*^{me} *dignité*; *это уравненіе заключаетъ въ себѣ неизвѣстную величину во 2*^{ой}, *3*^{й} *степени.*

DIGRESSION. (Астр.) **ОТСТУПЛЕНІЕ.** Видимое удаленіе планетъ отъ солнца, и преимущественно нижнихъ, то есть *Меркурія* и *Венеры.* Смот. ÉLONGATION.

DIGUE. (Гидрав.) **ДАМБА, ПЛОТИНА, ЗАПРУДА, ГАТЬ.** Всякая преграда, противуполагаемая водѣ для воспрепятствованія ея разлитію.

DIHÉLIE. (Астр.) **ДИГЕЛІЙ.** Такъ называлъ *Кеплеръ* линію, перпендикулярную къ большой оси эллипса, и проходящую чрезъ фокусъ этой кривой, въ которомъ, по предположенію, находится солнце. Это названіе вышло совсѣмъ изъ употребленія.

DIHEXAÈDRE. (Геом. и Кристал.) **ДИГЕКЗАЭДРЪ.** — Двойная шестиугольная пирамида. Геометрическое тѣло, ограниченное двѣнадцатью треугольниками. *Правильный дигекзаэдръ* состоитъ изъ двухъ правильныхъ шестиугольныхъ пирамидъ, равныхъ между собою, и соединенныхъ своими основаніями.

DILATABILITÉ. (Физ.) **РАСШИРЯЕМОСТЬ, РАСШИРИТЕЛЬНОСТЬ.** *Dilatabilité des corps aériformes* или *force élastique*, *force expensive des corps aériformes*; *расширяемость*, *упругость воздухообразныхъ тѣлъ.* Стремленіе воздухообразныхъ тѣлъ увеличиться въ объёмѣ. Смот. CORPS, CHALEUR, AÉRIFORMES (CORPS).

DILATATION. (Физ.) **РАСШИРЕНІЕ.** Увеличеніе объёма какого либо тѣла отъ дѣйствія теплоты или отъ другой причины. *Dilatation des corps solides, liquides et aériformes*; *расширеніе тѣлъ твердыхъ, жидкихъ и воздухообразныхъ.* — Въ Астрономіи подъ словомъ *dilatation* разумѣютъ видимое увеличеніе діаметра планетъ, происходящее отъ большаго свѣта, которымъ онѣ бываютъ окружены.

DIMENSION. (Геом.) **ИЗМѢРЕНІЕ.** Свойства различныхъ протяженій, составляющія предметъ

Геометріи, совершенно зависятъ отъ нашихъ понятій о пространствѣ. Въ пространствѣ, какимъ мы его понимаемъ, можемъ вообразить только *три* различныя протяженія: 1° *линіи*; 2° *поверхности*, и 3° *объёмы*. Сообразно съ этимъ, геометры вообразили и *три измѣренія* въ тѣлѣ: *длину* (*longueur*), *ширину* (*largeur*) и *высоту* (*hauteur*), называемую также *глубиною* и *толщиною* (*profondeur*, *épaisseur*). Длина, разсматриваемая отдѣльно, называется *линіею*; длина въ совокупности съ шириною — *поверхностію*; наконецъ, длина, ширина и высота, принимаемыя вмѣстѣ, составляютъ *тѣло*. Смот. LIGNE, SURFACE, SOLIDE. Для соображенія, отсылаемъ читателей также къ статьѣ GÉOMÉTRIE.

GÉOMÉTRIE A DEUX DIMENSIONS или GÉOMÉTRIE PLANE; Геометрія двухъ измѣреній или Геометрія въ плоскости. GÉOMÉTRIE A TROIS DIMENSIONS или GÉOMÉTRIE DANS L'ÉSPACE; Геометрія трехъ измѣреній или Геометрія въ пространствѣ. Смот. GÉOMÉTRIE

DIMENSION. (Алг.) **ИЗМѢРЕНІЕ, СТЕПЕНЬ.** Измѣреніемъ какого ни есть количества называется сумма показателей тѣхъ величинъ, произведеніе которыхъ составляетъ данное количество. И такъ, измѣреніе количества x^2y есть 3; количество xy^2z^3 будетъ *шестаго* измѣренія; измѣреніе дроби $\frac{x}{y}$ есть 0, ибо она можетъ быть написана въ видѣ $x^1.y^{-1}$, и тогда ясно, что $1-1=0$. и проч. — Въ томъ же смыслѣ употребляемъ это слово, когда говоримъ объ однородной функціи. И такъ, *измѣренія* или *степени* однородныхъ функцій $Ax^2+Bxy+Cy^2$, $\frac{ax}{y^2}+\frac{by}{x^2}$ будутъ соотвѣтственно $+2$ и -1.

DIMENSIONS (SIGNES DE). ЗНАКИ ИЗМѢРЕНІЯ. *Фишеръ*, Берлинскій учёный, извѣстный многими полезными трудами, и преимущественно своею *Механическою Физикою*, издалъ въ 1792 году сочиненіе подъ заглавіемъ: Theorie der Dimensionszeichen, Halle, 2 тома, in 4°. Въ этой книгѣ Фишеръ употребилъ особенные знаки, которые назвалъ *знаками измѣренія*; ими обозначалъ онъ послѣдовательные коэффиціенты рядовъ и ихъ степеней. Новое знакоположеніе казалось ему выгоднымъ для приведенія въ очевидность закона коэффиціентовъ такихъ рядовъ, которые получаются чрезъ подстановленіе въ извѣстную строку степеней другихъ рядовъ.

Коэффиціенты одного и того же ряда отмѣчаются однимъ и тѣмъ же символомъ или знакомъ, но съ различными цифрами, которыя ставятся надъ знакомъ; эти цифры служатъ для обозначенія мѣста, занимаемаго членомъ въ разсматриваемомъ ряду. Символы, о которыхъ говоримъ, суть частію Римскіе числительные знаки I, II, III,..., а частію Нѣмецкія буквы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$,.... Напримѣръ

$$y=\overset{1}{\mathrm{I}}x+\overset{2}{\mathrm{I}}x^2+\overset{3}{\mathrm{I}}x^3+\overset{4}{\mathrm{I}}x^4+\ldots.$$

$$y^2=\overset{2}{\mathrm{II}}x^2+\overset{3}{\mathrm{II}}x^3+\overset{4}{\mathrm{II}}x^4+\overset{5}{\mathrm{II}}x^5+\ldots$$

$$y^3=\overset{3}{\mathrm{III}}x^3+\overset{4}{\mathrm{III}}x^4+\overset{5}{\mathrm{III}}x^5+\overset{6}{\mathrm{III}}x^6+\ldots$$

....

$$y=\overset{1}{\mathfrak{A}}x^m+\overset{2}{\mathfrak{A}}x^{m+r}+\overset{3}{\mathfrak{A}}x^{m+2r}+\ldots$$

$$y^2=\overset{2}{\mathfrak{B}}x^{2m}+\overset{3}{\mathfrak{B}}x^{2m+r}+\overset{4}{\mathfrak{B}}x^{2m+2r}+\ldots.$$

....

Здѣсь символъ II означаетъ произведеніе двухъ простыхъ коэффиціентовъ перваго ряда, III, произведеніе трехъ, и т. д.; отсюда происходитъ и названіе *знаковъ измѣренія*. Число надъ символомъ, разложенное на цѣлыя его части, показываетъ изъ какихъ коэффиціентовъ ряда y составленъ разсматриваемый коэффиціентъ. И такъ $\overset{5}{\mathrm{II}}$ состоитъ изъ 1^{го} и 4^{го}, 2^{го} и 3^{го}, ибо $1+4=5$, $2+3=5$; $\overset{6}{\mathrm{III}}$ состоитъ изъ коэффиціентовъ, соотвѣтствующихъ мѣстамъ 1, 1, 4; 1, 2, 3; 2, 2, 2.

Сочиненіе Фишера заключаетъ въ себѣ приложеніе теоріи знаковъ измѣренія къ рѣшенію численныхъ уравненій, къ возвышенію въ степени рядовъ конечныхъ и безконечныхъ, къ обращенію строкъ (retour des suites) и еще къ нѣкоторымъ другимъ задачамъ изъ математическаго анализа.

DIMINUTION. (Ариѳ.) **УМЕНЬШЕНІЕ.**

DINOSTRATE (QUADRATRICE DE). (Геом.) **ДИНОСТРАТОВА КВАДРАТРИССА, КРУГОСПРЯМЛЯЮЩАЯ КРИВАЯ.** Смот. QUADRATRICE.

DIOCLÈS (CISSOÏDE DE). (Геом.) **ДІОКЛОВА ЦИССОИДА.** Смот. CISSOÏDE.

DIOPHANTE (Problèmes или questions de) или еще Analyse de Diophante. **ДІОФАНТОВЫ** задачи или Діофантовъ анализъ. Греческій математикъ Діофантъ Александрійскій, жившій какъ думаютъ въ IV столѣтіи по Р. Х., написалъ объ Алгебрѣ 13 книгъ, изъ которыхъ только 6 дошли до насъ. Первый переводъ этихъ 6 книгъ, съ Греческаго языка на Латинскій, былъ напечатанъ *Ксиландеромъ* въ 1575 году, а въ 1621, извѣстный *Башетъ де Мизиріакъ* издалъ, на Латинскомъ же языкѣ, гораздо лучшій переводъ, обогативъ его превосходными комментаріями. Въ 1670 году *Ферматъ* напечаталъ также изданіе Діофанта, и дополнилъ текстъ собственными примѣчаніями.

Въ твореніи Греческаго математика болѣе всего примѣчательны рѣшенія особеннаго рода *неопредѣленныхъ вопросовъ* о числахъ квадратныхъ, кубичныхъ, о прямоугольныхъ треугольникахъ и проч. Въ задачахъ такого рода ищутъ раціональныя, а часто только цѣлыя рѣшенія неопредѣленныхъ уравненій, допускающихъ безконечное число рѣшеній ирраціональныхъ. Напримѣръ, если бы предложено было найти прямоугольный треугольникъ такого свойства, чтобы оба катета а также ипотенуза его изображались цѣлыми числами, то такая задача принадлежала бы къ числу *Діофантовыхъ*. Впрочемъ, *Діофантовъ Анализъ* преимущественно называютъ теперь *Неопредѣленнымъ Анализомъ*, который самъ входитъ въ составъ *Теоріи чиселъ*, или, что всё равно, *Трансцендентной Ариѳметики*.

Чтобъ ознакомить читателей съ Діофантовымъ Анализомъ, предлагаемъ рѣшеніе нѣсколькихъ задачъ.

Задача 1. *Найти прямоугольный треугольникъ такого свойства, чтобы три стороны его изображались цѣлыми числами.*

Пусть будутъ x и y катеты искомаго треугольника, а z его ипотенуза. Получимъ уравненіе

$$x^2+y^2=z^2,$$

въ которомъ, по условію вопроса, неизвѣстныя x, y и z должны быть цѣлыя числа. Во первыхъ замѣтимъ, что x и y можно принимать простыми между собою; дѣйствительно, если бы x и y имѣли общаго дѣлителя, напримѣръ λ, то получили бы $x=\lambda x'$, $y=\lambda y'$, и слѣдовательно

$$(\lambda x')^2+(\lambda y')^2=\lambda^2(x'^2+y'^2)=z^2;$$

изъ этого уравненія видимъ, что z^2 долженъ дѣлиться безъ остатка на λ^2, почему $z=\lambda z'$, и первоначальное уравненіе $x^2+y^2=z^2$ приметъ видъ $x'^2+y'^2=z'^2$, въ которомъ величины x', y' и z' простыя между собою. И такъ, положимъ прямо что количества x, y и z, удовлетворяющія уравненію $x^2+y^2=z^2$, не имѣютъ никакого общаго дѣлителя. Сверхъ того замѣтимъ, что одно изъ чиселъ x или y будетъ чётное, а другое нечётное; оба чётными не могутъ быть, ибо въ такомъ случаѣ они имѣли бы общаго дѣлителя 2, что противно предположенію, а нечётными потому что сумма квадратовъ двухъ нечётныхъ чиселъ $(2k+1)^2+(2k'+1)^2=4(k^2+k'^2+k+k')+2$ не можетъ быть квадратнымъ числомъ; ибо дѣлится только на 2, а не дѣлится на 4. Пусть будетъ x нечётное, а y чётное число, и положимъ $z=x+\frac{p}{q}y$, разумѣя подъ $\frac{p}{q}$ несократимую дробь; получимъ

$$x^2+y^2=\left(x+\frac{p}{q}y\right)^2=x^2+\frac{2pxy}{q}+\frac{p^2y^2}{q^2},$$

откуда

$$\frac{x}{y}=\frac{q^2-p^2}{2pq}.$$

Такъ какъ по предположенію p и q не имѣютъ никакого общаго дѣлителя, то дробь $\frac{q^2-p^2}{pq}$ будетъ несократимая; сверхъ того замѣтимъ, что числа p и q не могутъ быть оба нечётныя, ибо тогда разность q^2-p^2 дѣлилась бы на 4, и, по сокращеніи на 2, остался бы множитель 2 въ числителѣ, чего не должно быть по причинѣ x нечётнаго. И такъ, одно изъ чиселъ p или q чётное, а другое нечётное, почему числитель q^2-p^2 не дѣлится на 2, и вся дробь $\frac{q^2-p^2}{2pq}$ несократимая. Слѣдовательно

$$x=q^2-p^2,\quad y=2pq,$$

$$z=x+\frac{p}{q}y=q^2-p^2+\frac{p}{q}\cdot 2pq=p^2+q^2.$$

Вотъ общее рѣшеніе уравненія $x^2+y^2=z^2$

въ цѣлыхъ числахъ. Величины p и q, какъ уже сказано выше, изображаютъ цѣлыя числа, изъ которыхъ одно чётное, а другое нечётное; сверхъ того предполагается, что дробь $\frac{p}{q}$ несократимая, то есть, что числа p и q не имѣютъ никакого общаго дѣлителя.

Полагая послѣдовательно

$p=1,\ q=2$ получимъ $x=3,\ y=4,\ z=5$
$p=1,\ q=4$ .... $x=15,\ y=8,\ z=17$
$p=2,\ q=3$ .... $x=5,\ y=12,\ z=13$
$p=3,\ q=4$ .... $x=7,\ y=24,\ z=25$
и проч. и проч.

Задача 2. *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе $x^2-Ay^2=z^2$, гдѣ подъ A разумѣемъ какое ни есть цѣлое число, положительное или отрицательное, но только не квадратное.*

Разлагаемъ сумму x^2-Ay^2 на два множителя, и получаемъ

$$(x+y\sqrt{A})(x-y\sqrt{A})=z^2.$$

Если, подобно предыдущему, положимъ что числа x, y и z не имѣютъ общаго дѣлителя, то и суммы $x+y\sqrt{A}$, $x-y\sqrt{A}$ будутъ простыя между собою, и слѣдовательно каждая изъ нихъ будетъ отдѣльно равняться квадрату. Изобразивъ чрезъ $(p+q\sqrt{A})^2$ квадратъ, которому равняется выраженіе $x+y\sqrt{A}$, получимъ

$$x+y\sqrt{A}=(p+q\sqrt{A})^2=p^2+Aq^2+2pq\sqrt{A};$$

количества p и q, какъ въ предыдущей задачѣ, изображаютъ два цѣлыя числа, простыя между собою. Но $\sqrt{A}$ есть число ирраціональное или даже мнимое, смотря по тому, будетъ ли A положительное или отрицательное; слѣдовательно, по причинѣ x, y, p и q цѣлыхъ, послѣднее уравненіе доставитъ

$$x=p^2+Aq^2,\quad y=2pq,$$

и сверхъ того

$$z^2=(p^2+Aq^2)^2-A(2pq)^2=(p^2-Aq^2)^2,$$

откуда

$$z=p^2-Aq^2.$$

Для примѣра, возьмемъ неопредѣленную формулу $x^2-5y^2=z^2$, въ которой $A=5$; получимъ

$$x=p^2+5q^2,\ y=2pq,\ z=p^2-5q^2.$$

Положивъ $p=4$, $q=1$, найдется

$$x=21,\ y=8,\ z=11,$$

и дѣйствительно: $21^2-5.8^2=121=11^2$.

Пусть будетъ еще уравненіе $x^2+7y^2=z^2$, въ которомъ $A=-7$; слѣдовательно получимъ

$$x=p^2-7q^2,\ y=2pq,\ z=p^2+7q^2.$$

Положивъ $p=2$, $q=1$, найдемъ

$$x=-3,\ y=4,\ z=11.$$

Очевидно, что вмѣсто отрицательной величины для x, можемъ допустить положительную. И такъ: $x=3$, $y=4$, $z=11$, что и справедливо, ибо $3^2+7.4^2=121=11^2$.

Задача 3. *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ уравненіе $x^2+Ay^2=z^3$, въ которомъ A изображаетъ произвольное цѣлое число, положительное или отрицательное.*

Положимъ что x, y и z не имѣютъ никакого общаго дѣлителя, и представимъ x^2+Ay^2 въ видѣ $(x+y\sqrt{-A})(x-y\sqrt{-A})$; такъ какъ выраженія $x+y\sqrt{-A}$ и $x-y\sqrt{-A}$ будутъ простыя между собою, то и должно взять

$$x+y\sqrt{-A}=(p+q\sqrt{-A})^3,$$

разумѣя подъ p и q числа цѣлыя, также простыя между собою. Это уравненіе, по разложеніи второй его части, приметъ видъ

$$x+y\sqrt{-A}=p^3-3Apq^2+(3p^2q-Aq^3)\sqrt{-A};$$

уравнивъ x раціональной части, а $y\sqrt{-A}$ ирраціональной или мнимой, получимъ

$$x=p^3-3Apq^2,\quad y=3p^2q-Aq^3,$$

и слѣдовательно

$$z=p^2+Aq^2.$$

Пусть $A=1$; получимъ слѣдующія рѣшенія уравненія $x^2+y^2=z^3$:

$$x=p^3-3pq^2,\ y=3p^2q-q^3,\ z=p^2+q^2.$$

Принявъ, напримѣръ, $p=2$, $q=1$, найдется: $x=2$, $y=11$, $z=5$; и дѣйствительно $2^2+11^2=125=5^3$.

Положимъ еще $A=2$; рѣшенія уравненія $x^2+2y^2=z^3$ опредѣлятся формулами

$$x=p^3-6pq^2,\ y=3p^2q-2q^3,\ z=p^2+2q^2.$$

Если бы искали рѣшенія неопредѣленнаго уравненія съ двумя неизвѣстными

$$x^2+2=z^3,$$

или, что всё равно, имѣли бы въ виду опредѣлить такія квадратныя числа, которыя, будучи сложены съ 2, доставляли бы кубы, то надлежало бы положить $y=\pm1$, то есть .... $3p^2q-2q^3=\pm1$; написавъ это уравненіе въ видѣ $(3p^2-2q^2)q=\pm1$, заключаемъ, что $q=\pm1$, и слѣдовательно $3p^2-2=\pm 1$, откуда $p=\pm 1$ и $p=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$; послѣднее значенie p, какъ ирраціональное, должно быть откинуто. И такъ, остаются только значенія $p=\pm 1$; подставляя эти величины въ уравненіе $x=p^3-6pq^2$, а также $+1$ на мѣсто q^2, получимъ $x=\pm(1-6)=\mp 5$, или, удержавъ только положительную величину, $x=5$. Дѣйствительно, $5^2+2=27=3^3$. И такъ, кромѣ квадратнаго числа 25, нѣтъ другаго, которое, будучи сложено съ 2, доставляло бы кубичное число. —

Діофантовъ Анализъ, то есть способъ для приведенія ирраціональныхъ выраженій къ раціональнымъ, полезенъ и въ Интегральномъ Исчисленіи. Смот. INTÉGRAL (CALCUL), BINOMES (DIFFÉRENTIELLES) и проч.

Для полнаго изученія Діофантова Анализа можно руководствоваться слѣдующими сочиненіями: изданіями *Діофанта*, о которыхъ упомянуто въ началѣ этой статьи; Disquisitiones Arithmeticae, *Гаусса*; Théorie des nombres, *Лежандра*, и преимущественно вторымъ томомъ Алгебры *Эйлера*.

DIOPTRES. ДІОПТРЫ. Узкія скважины или небольшія круглыя отверстія, дѣлаемыя на визирахъ (pinules), то есть на дощечкахъ, отвѣсно поставленныхъ на обоихъ концахъ алидады. Смотря сквозь діоптры, и наводя такимъ образомъ алидаду на различные предметы, опредѣляемъ направленія, на которыхъ эти предметы находятся. Смот. ALIDADE, GRAPHOMÈTRE, PLANCHETTE и проч.

DIOPTRIQUE. ДІОПТРИКА. Отъ Греческ. *διά*, *сквозь* и *ὄπτομαι*, *вижу*. Часть Оптики, занимающаяся законами преломленія свѣта. Эта наука называлась прежде *Анакластикой* (*Anaclastique*).

Всѣ тѣла воздухообразныя, значительная часть жидкихъ, и весьма многія твердыя тѣла, одарены свойствомъ пропускать лучи свѣта, почему и называются *тѣлами прозрачными* (*corps transparens*, *diaphanes*). Бо́льшая часть изъ нихъ просто *преломляютъ* свѣтъ, то есть, лучи свѣта, проходя сквозь сіи тѣла, не разъединяются. Это явленіе называется *простымъ преломленіемъ*. Но есть и такія тѣла, въ которыхъ лучи свѣта раздѣляются на двѣ кисти. Такое свойство свѣта, замѣченное еще въ 1669 году Датскимъ математикомъ *Бартолиномъ*, извѣстно подъ наименованіемъ *двойнаго преломленія*; оно обнаруживается въ тѣлахъ окристаллованныхъ, коихъ первообразная форма не есть ни кубъ, ни правильный осьмигранникъ.

Всякій лучъ свѣта, переходящій косвенно изъ одной прозрачной средины въ другую, болѣе или менѣе плотную, *преломляется*, то есть уклоняется отъ начальнаго своего направленія. Положимъ что чрезъ точку, въ которой лучъ встрѣтилъ вторую средину, проведена нормальная линія къ преломляющей поверхности; лучъ свѣта, по преломленіи, приблизится или удалится отъ этой нормали смотря по тому, будетъ ли средина, въ которую онъ входитъ, плотнѣе или рѣже той, изъ которой вышелъ.

Назовемъ *угломъ паденія* (*angle d'incidence*) уголъ IMN (черт. 9 Листъ VIII), составляемый лучемъ IM, падающимъ на преломляющую поверхность AMB, съ нормалью LMN, проведенною въ точкѣ M къ этой самой поверхности. Если чрезъ направленіе IM и нормаль LMN вообразимъ плоскость, то преломленный лучъ останется въ этой плоскости, но не пойдетъ по продолженному направленію MI', когда разсматриваемыя двѣ средины будутъ имѣть различныя плотности. Если нижняя средина, то есть та, въ которую входитъ лучъ, будетъ плотнѣе, то онъ по преломленіи приблизится къ нормали, и пойдетъ по MR; напротивъ того, если верхняя средина плотнѣе, то лучъ удалится отъ нормали, и направится по MR'. Въ томъ и другомъ предположеніи уголъ LMR или LMR' называется *угломъ преломленія* (*angle de réfraction*). Основной законъ Діоптрики состоитъ въ томъ, что *отношеніе синуса угла паденія къ синусу угла преломленія есть постоянная величина, каково бы ни было первоначальное направленіе падающаго луча*. Это постоянное отношеніе синусовъ называется *показателемъ преломленія* (*rapport de réfraction*). *Нютонъ*, *Малюсъ*, *Волластонъ*, *Фраунгоферъ*, *Біотъ*, *Араго* и другіе физики производили весьма много опытовъ для опредѣленія показателя преломленія при различныхъ срединахъ. Вообще замѣчено, что бо́льшая или ме́ньшая степень преломляемости зависитъ нетолько отъ плотности прозрачнаго тѣла, но и отъ химическихъ его свойствъ.

Читатели найдутъ почти во всѣхъ курсахъ Физики таблицы показателей преломленія для разныхъ срединъ.

Хотя первую мысль о преломленіи свѣта приписываютъ знаменитому *Птолемею*, жившему во второмъ столѣтіи по Р. Х.*), но достовѣрно, что Діоптрика, до конца XVI вѣка, не получила никакого приращенія, по крайней мѣрѣ въ теоретическомъ отношеніи. Въ концѣ XVI столѣтія *Антоній де Доминисъ*, первый предпринялъ объяснить образованіе радуги преломленіемъ солнечнаго свѣта въ дождевыхъ капляхъ. *Кеплеръ* и *Декартъ*, современники *Антонія де Доминисъ*, производили многочисленные опыты съ цѣлію найти законы преломленія свѣта; но усилія ихъ не имѣли успѣха. *Спеллъ* (*Snellius*), Голландскій математикъ, жившій въ половинѣ XVII столѣтія, открылъ этотъ законъ, состоящій, какъ сказано выше, въ пропорціональности синусовъ угловъ паденія къ синусамъ угловъ преломленія. Впослѣдствіи многіе математики и физики занимались усовершенствованіемъ Діоптрики; примѣчательнѣйшіе изъ нихъ: *Барровъ*, *Нютонъ*, *Гугенсъ*, *Гершелъ*, *Шмитъ*. Въ новѣйшія времена особеннаго вниманія заслуживаютъ изслѣдованія о двойномъ преломленіи *Малюса*, *Біота*, *Френеля* и *Волластона*.

Читатели могутъ почерпнуть нѣкоторыя свѣдѣнія объ Діоптрикѣ въ статьяхъ: ACHROMATIQUE, ARC-EN-CIEL, COULEUR, DIACAUSTIQUE, LENTILLE, MICROSCOPE, RÉFRACTION, TÉLESCOPE, VERRE и проч. Смот. также LUMIÈRE, OPTIQUE.

DIOPTRIQUE. ДІОПТРИЧЕСКІЙ. Относящійся къ Діоптрикѣ; происходящій чрезъ преломленіе лучей. *Télescope dioptrique*; *діоптрическій телескопъ*. Телескопъ составленный изъ однихъ стеколъ, и слѣдовательно основанный на законѣ преломленія свѣта; говорится въ противоположность *катадіоптрическаго* телескопа, устроеніе котораго основано на законахъ преломленія и отраженія свѣта; поэтому катадіоптрическіе телескопы и составлены изъ стеколъ и зеркалъ.

DIORISME. DÉTERMINATION, DISCUTION. **ДІОРИЗМЪ.** Разборъ. При рѣшеніи задачъ, сверхъ Анализа и Синтеза, Греческіе геометры разсматривали еще третью часть сужденія, которую называли *діоризмомъ*. Діоризмъ состоялъ въ подробномъ разборѣ различныхъ случаевъ, къ которымъ приводило найденное рѣшеніе задачи, и поэтому принадлежалъ къ числу пріёмовъ аналитическихъ. Смот. ANALYSE.

DIPLANTIDIENNE (LUNETTE). (Опт.) **ДВУПРЕДМЕТНАЯ ТРУБА.** Зрительная труба о двухъ предметныхъ стеклахъ. Посредствомъ этой трубы наблюдаемый предметъ усматривается *вдвойнѣ*: одно изображеніе въ прямомъ, а другое въ опрокинутомъ положеніи. Этотъ снарядъ изобрѣтенъ астрономомъ *Жора* (*Jeaurat*), и описанъ имъ въ *Mémoires de l'Académie* за 1779 годъ.

DIRECT. (Анал.) **ПРЯМОЙ.** *Rapport direct* или *raison directe*; *прямое отношеніе*, *прямое содержаніе*. Когда отношеніе $\frac{A}{B}$ двухъ количествъ A и B есть постоянное, то говоримъ, что они въ *прямомъ отношеніи* одно къ другому. Если же произведеніе AB постоянное, то A и B будутъ находиться между собою въ *обратномъ отношеніи* (*rapport inverse*). Напримѣръ, пусть будетъ φ сила тяготѣнія, m и m' массы взаимно притягивающихся тѣлъ, а ρ взаимное ихъ разстояніе; извѣстно, что отношеніе $\frac{\varphi\rho^2}{mm'}$ будетъ постоянное, а это значитъ, что *сила тяготѣнія дѣйствуетъ въ прямомъ отношеніи массъ и въ обратномъ квадрата ихъ взаимнаго разстоянія.* — Подъ *quantité directe* (*прямое количество*) нѣкоторые авторы разумѣютъ *количество положительное*; въ такомъ случаѣ *quantité inverse* (*обратное количество*) принимается уже въ смыслѣ *отрицательной величины*.

DIRECT. (Астр. Мех. Опт.) **ПРЯМОЙ.** Когда планета движется отъ запада къ востоку, то есть, по порядку зодіакальныхъ знаковъ, то говоримъ, что она имѣетъ *прямое* или *поступательное движеніе* (*mouvement direct*). *Стояніе* (*station*) планеты бываетъ въ то время, когда она представляется намъ неподвижною. Наконецъ, говоримъ, что планета имѣетъ *возвратное движеніе* (*mouvement rétrograde*), когда по видимому она движется противъ порядка зодіа-

*) Смот. Histoire des Mathématiques par *Montucla*. T. I. стр. 312 (Изданіе 1799—1802 г.).

кальныхъ знаковъ, то есть отъ востока къ западу. — Въ Механикѣ *mouvement direct* значитъ *прямое, прямолинейное, прямонаправленное движеніе. Choc direct, прямой ударъ*; Смот. CHOC. — Въ Оптикѣ, *прямымъ* или *непосредственнымъ видѣніемъ* (*vision directe*) предмета, называется видѣніе, происходящее отъ дѣйствія *прямыхъ* лучей свѣта на органъ зрѣнія. Подъ *прямыми лучами* разумѣемъ такіе, которые идутъ непосредственно отъ предмета къ нашему глазу, въ противоположность лучамъ, достигающимъ до него чрезъ отраженіе или преломленіе.

DIRECTE (PROPOSITION). ПРЯМОЕ ПРЕДЛОЖЕНІЕ. Смот. PROPOSITION.

DIRECTEMÉNT OPPOSÉS. (Геом. и Мех.) **ПРЯМОПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ, ПРЯМОПРОТИВНЫЕ.** *Droites directement opposées*; *прямопротивоположныя прямыя*, то есть двѣ прямыя, примыкающія одна къ другой, и составляющія одну и ту же линію. — *Forces directement opposées*; *прямопротивныя*, *прямопротивоположныя силы.* Силы, дѣйствующія по одной и той же прямой, но въ противныя стороны.

DIRECTEUR. (Геом.) **НАПРАВЛЯЮЩІЙ.** *Cercle directeur*; *направляющій кругъ. Courbe directrice*; *направляющая кривая.* Смот. DIRECTRICE.

DIRECTION. (Геом. и Мех.) **НАПРАВЛЕНІЕ.** *Direction oblique*; *косвенное направленіе. Ces trois points se trouvent dans la même direction*; *эти три точки находятся на одномъ направленіи*, то есть, расположены по одной прямой линіи.— *Direction d'une force*; *направленіе силы.* Прямая, по направленію которой сила дѣйствуетъ или стремится дѣйствовать.

Direction или ligne de direction. Направленіе тяжести. Такъ называли прежніе авторы прямую, проходящую чрезъ средоточіе земли и центръ тяжести разсматриваемаго тѣла.

Angle de direction. Уголъ направленія, уголъ силъ. Уголъ, составляемый двумя пересѣкающимися силами.

Direction de l'aiguille aimantée. Направленіе магнитной стрѣлки. Смот. BOUSSOLE, MAGNÉTISME.

DIRECTRICE. (Геом.) **НАПРАВЛЯЮЩАЯ;** Направительница. Въ обширномъ смыслѣ, линія прямая или кривая, по которой движется другая линія или поверхность, образующія при такомъ движеніи: первая — плоскую или кривую поверхность, а вторая — геометрическое тѣло. —

Въ Коническихъ Сѣченіяхъ *направляющая* есть прямая линія, коей положеніе опредѣляется по условію слѣдующей задачи: *ищется кривая линія OMS* (черт. 10 Листъ VIII) *такого свойства, чтобы разстоянія* $\overline{MF}$ *и* $\overline{MQ}$ *каждой ея точки M отъ постоянной точки F и отъ неподвижной прямой AB, относились между собою какъ два данныя числа m и n.* Кривая, удовлетворяющая этому требованію, будетъ принадлежать къ роду коническихъ; ось ея совмѣстится съ прямою CX, перпендикулярною къ AB, фокусъ — съ данною точкою F, а вершина — съ точкою O, въ которой разстояніе $\overline{FC}$ раздѣлено въ отношеніи m къ n. Неподвижная прямая AB, въ отношеніи найденной кривой, называется ея *направляющею.*

Мы сказали, что искомая кривая будетъ коническая; и дѣйствительно, раздѣлимъ линію $\overline{FC}$, то есть перпендикулярное разстояніе данной точки отъ данной прямой въ отношеніи $m:n$. Пусть будетъ O точка дѣленія, и положимъ $\overline{OF}=m$, $\overline{OC}=n$. Сверхъ того, проведемъ прямоугольныя координатныя оси OX, OY, и изобразимъ $\overline{OP}$ чрезъ x, а $\overline{PM}$ чрезъ y. По условію вопроса найдется

$$\overline{MF}:\overline{MQ}::m:n;$$

но $$\overline{MF}=\sqrt{\overline{FP}^2+\overline{PM}^2}=\sqrt{(x-m)^2+y^2},$$

а $$\overline{MQ}=\overline{PC}=n+x;$$

слѣдовательно

$$\sqrt{(x-m)^2+y^2}:n+x::m:n,$$

откуда

$$n\sqrt{(x-m)^2+y^2}=m(n+x),$$

или, по возвышеніи въ квадратъ и по сокращеніи,

$$y^2=\frac{2m(m+n)}{n}x+\frac{m^2-n^2}{n^2}x^2.$$

Это уравненіе, какъ извѣстно, принадлежитъ конической кривой; начало координатъ совпадаетъ съ ея вершиною, а ось x-овъ, съ осью кривой.

Если сравнимъ предыдущее уравненіе съ каждымъ изъ трехъ слѣдующихъ:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$$

$$y^2 = px,$$

принадлежащихъ эллипсу, иперболѣ и параболѣ, то найдемъ:

Для эллипса: $\frac{m^2-n^2}{n^2} = -\frac{b^2}{a^2}$, откуда $\frac{m}{n} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

Для иперболы: $\frac{m^2-n^2}{n^2} = +\frac{b^2}{a^2}$, откуда $\frac{m}{n} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

Для параболы: $\frac{m^2-n^2}{n^2} = 0$, откуда $\frac{m}{n} = 1$.

Мы не будемъ останавливаться на разборѣ сихъ трехъ случаевъ, не представляющемъ никакого затрудненія. Скажемъ только, что для эллипса, а равно и для иперболы, существуютъ *двѣ* направляющія, а для параболы только *одна*.

Свойство параболы относительно ея направляющей, доставляетъ весьма простой способъ для начерченія этой кривой посредствомъ непрерывнаго движенія. И въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ BL направляющая параболы GAH (черт. 11 Листъ VIII). Приставимъ къ линейкѣ, совпадающей съ прямою BL, наугольникъ EQR стороною QR, и возьмемъ нить, равную по длинѣ своей линіи EQ, прикрѣпивъ ее однимъ концомъ въ точкѣ E, а другимъ въ фокусѣ F параболы; потомъ станемъ натягивать нить посредствомъ шпильки или карандаша, примыкающаго къ линіи EQ въ точкѣ M. Двигая теперь наугольникъ по длинѣ направляющей такъ чтобы шпилька скользила по EQ, окажется, что конецъ ея опишетъ *параболу*, ибо, при такомъ движеніи, линія FM будетъ постоянно равна линіи MQ, что̀ и должно быть по свойству параболы.

Читатели найдутъ во многихъ мѣстахъ нашего Лексикона разныя подробности о направляющихъ. Смот. между прочимъ статьи: CONIQUE, CYLINDRIQUE, GAUCHE, SURFACE.

DISCONTIGUË (FONCTION). ПРЕРЫВАЮЩАЯСЯ ФУНКЦІЯ. Смот. CONTIGUË (FONCTION).

DISCONTINU. ПРЕРЫВНЫЙ. *Fonction, proportion discontinue; прерывная функція, пропорція.* Смот. CONTINUE (FONCTION), DISCRÈTE.

DISCONTINUITÉ. ПРЕРЫВНОСТЬ. Смот. CONTINUE (FONCTION).

DISCRÈTE. (Ариѳ.) **ПРЕРЫВНАЯ.** *Proportion discrète, disjointe*, или, употребительнѣе, *discontinue; прерывная, прерывающаяся пропорція*; такая пропорція, въ которой средніе члены не равны между собою. Таковы, напримѣръ, геометрическая 6 : 8 :: 3 : 4 и ариѳметическая .... 7 — 3 = 8 — 4. Напротивъ того, пропорція 3 : 6 :: 6 : 12 :: 12 : 24, или, что̀ всё равно, ... :: 3 : 6 : 12 : 24, въ которой члены сохраняютъ послѣдовательную пропорціональность, есть *непрерывная* (*proportion continue*). Такого же свойства и ариѳметическая пропорція ÷20.17.14.11. Смот. PROPORTION.

QUANTITÉ DISCRÈTE или DISCONTINUE. ПРЕРЫВНОЕ, РАЗЪЕДИНЕННОЕ КОЛИЧЕСТВО. Такъ называется количество, составленное изъ отдѣльныхъ частей, не подлежащихъ закону непрерывности. Такъ напримѣръ число есть *количество прерывное*, потому что оно состоитъ изъ отдѣльныхъ единицъ. Напротивъ того, величина, разсматриваемая въ видѣ непрерывномъ, называется *непрерывнымъ количествомъ* (*quantité continue*). И такъ, разстояніе между двумя точками, поверхность, опредѣляющая видъ и протяженіе какого либо тѣла, суть *величины непрерывныя*, ибо каждая изъ нихъ принимается за одно цѣлое, сплошное, безъ различія его частей. Смот. GRANDEUR.

DISCUTER или ANALYSER UNE COURBE. **ДѢЛАТЬ РАЗБОРЪ КРИВОЙ.** Смот. ниже.

DISCUTION D'UNE COURBE. (Геом.) **РАЗБОРЪ КРИВОЙ.** Изслѣдованіе различныхъ свойствъ кривой линіи, какъ то: опредѣленіе ея вида, разысканіе особенныхъ точекъ, проведеніе къ ней касательныхъ, нормалей и проч. Смот. COURBE.

DISGRÉGATION. Уст. выраж. То же что̀ DISPERSION DES COULEURS (Смот.).

DISJOINT. РАЗЪЕДИНЕННЫЙ, ПРЕРЫВНЫЙ. *Masses disjointes; разъединенныя, несоприкосно-*

венныя массы. *Proportion disjointe*; *прерывная пропорція.* Смот. DISCRÈTE.

DISPARAITRE (FAIRE). (Алг.) **УНИЧТОЖИТЬ, ОСВОБОДИТЬСЯ.** *Faire disparaitre les quantités irrationnelles*, *les dénominateurs des fractions. Уничтожить ирраціональныя количества*, *освободиться отъ ирраціональностей*, *отъ знаменателей.*

DISPERSIF (POUVOIR). (Опт.) **СИЛА СВѢТОРАЗСѢЯНІЯ.** Сила свѣторазсѣянія какого либо прозрачнаго тѣла измѣряется отношеніемъ угла свѣторазсѣянія (Смот. ниже) къ углу уклоненія луча средней преломляемости отъ первоначальнаго его направленія. Читатели найдутъ во многихъ курсахъ Физики таблицы численныхъ величинъ этой силы для разныхъ веществъ.

DISPERSION DES COULEURS, DE LA LUMIÈRE. (Опт.) **РАЗСѢЯНІЕ** цвѣтныхъ лучей, свѣторазсѣяніе. Уклоненіе различныхъ цвѣтныхъ лучей отъ первоначальнаго ихъ направленія, когда они преломляются по выходѣ изъ какого либо прозрачнаго тѣла, напримѣръ изъ стекляной призмы. *Величина свѣторазсѣянія* опредѣляется угломъ, составляемымъ направленіями наиболѣе и наименѣе преломляющихся цвѣтныхъ лучей, то есть *фіолетоваго* и *краснаго*, или еще, разностію показателей преломленія этихъ самыхъ лучей. И такъ, на чертежѣ 3 (Листъ VI), уголъ свѣторазсѣянія есть bac. Смот. COULEUR.

DISPOSER DES QUANTITÉS. (Анал.) **РАСПОЛАГАТЬ** величинами. Давать неопредѣленнымъ количествамъ значенія, сообразныя съ предполагаемою цѣлію. Напримѣръ, если бы требовалось рѣшить уравненія

$$ax+by=c \quad \text{и} \quad a'x+b'y=c',$$

то помноживъ второе изъ нихъ на *неопредѣленную величину* λ, и взявъ потомъ ихъ сумму, получили бы

$$(a+\lambda a')x+(b+\lambda b')y=c+\lambda c'.$$

Такъ какъ количество λ неопредѣленное, то мы можемъ *располагать* имъ по произволенію. Если имѣемъ въ виду опредѣлить неизвѣстную x, то принимаемъ $b+\lambda b'=0$ или $\lambda=-\frac{b}{b'}$, и находимъ

$$x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}.$$

Для опредѣленія неизвѣстной y, располагаемъ величиною λ другимъ образомъ, а именно, полагаемъ $a+\lambda a'=0$, откуда $\lambda=-\frac{a}{a'}$, и получаемъ

$$y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}.$$

DISQUE. (Астр. и Опт.) **ДИСКЪ, КРУГЪ.** Астрономы разумѣютъ подъ *дискомъ солнца* или *луны* плоскій кругъ, въ видѣ котораго каждое изъ сихъ тѣлъ представляется глазу зрителя. Ширина диска, какъ солнечнаго такъ и луннаго, раздѣляется на 12 равныхъ частей, называемыхъ *дюймами* (*doigts*). Величину затмѣній часто опредѣляютъ числомъ такихъ дюймовъ. — Слово *disque* употреблялось также прежними оптиками въ одномъ смыслѣ съ *ouverture* (*отверстіе*), *champ d'une lunette* (*поле трубы*).

DISQUE HORRAIRE, DISQUE D'ARISTARQUE. (Гном.) ЧАСОВОЙ, АРИСТАРХОВЪ ДИСКЪ. Родъ солнечныхъ часовъ, бывшихъ нѣкогда въ употребленіи.

DISSEMBLABLE. (Геом. и Теор. Чис.) **НЕПОДОБНЫЙ.** Противополагается прилагательному *подобный*. *Triangles dissemblables*; *треугольники неподобные*, то есть такіе, у которыхъ углы не равны соотвѣтственно. — *Transformations semblables*, *dissemblables*; *подобныя*, *неподобныя преобразованія*. Наименованія, употребленныя *Гауссомъ* въ теоріи видовъ второй степени; (Смот. его сочиненіе *Disquisitiones arithmeticae*, N°. 159).

DISSIMILAIRE. РАЗНОРОДНЫЙ. Смот. HÉTÉROGÈNE.

DISTANCE. (Геом.) **РАЗСТОЯНІЕ.** Собственно, кратчайшій путь между двумя предметами. И такъ, разстояніе одной точки отъ другой опредѣляется прямою линіею, соединяющею эти двѣ точки; разстояніе точки отъ какой либо поверхности измѣряется перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ данной точки на эту поверхность.

Въ Практической Геометріи разстоянія между предметами измѣряются или непосредственно, употребляя на сей конецъ межевую цѣпь, сажень и проч., или помощію тригонометрическихъ пріёмовъ. Въ послѣднемъ случаѣ предполагается, что предварительно измѣрено на землѣ основаніе, и опредѣлены углы, заключающіеся между лучами зрѣнія, направленными къ предметамъ изъ крайнихъ точекъ основанія. Для дальнѣйшихъ подробностей отсылаемъ къ статьямъ: ARPENTAGE, BASE, CHAINE, GRAPHOMÈTRE, PLANCHETTE.

DISTANCES (CENTRE DES MOYENNES). Центръ средняго разстоянія. Смот. CENTRE.

DISTANCE. (Астр.) **РАЗСТОЯНІЕ.** Это слово употребляется астрономами въ разныхъ значеніяхъ, а именно:

DISTANCE APPARENTE или ANGULAIRE. Видимымъ или угловымъ разстояніемъ двухъ свѣтилъ или какихъ ни есть точекъ небесной сферы, называется уголъ, заключающійся между лучами зрѣнія, проведенными отъ глаза наблюдателя къ этимъ двумъ свѣтиламъ или точкамъ. И такъ, *разстояніе звѣзды отъ полюса* есть дуга круга склоненія (выраженная въ градусахъ, минутахъ, секундахъ и проч.), заключающаяся между звѣздою и сѣвернымъ полюсомъ; дуга того же круга, заключающаяся между звѣздою и зенитомъ, называется *разстояніемъ отъ зенита.* Чтобы получить истинное угловое разстояніе, надобно освободить непосредственно наблюденный уголъ отъ дѣйствія преломленія и параллакса.

DISTANCE HORAIRE DE LA LUNE AU SOLEIL. Подъ часовымъ разстояніемъ луны отъ солнца разумѣютъ разность прямыхъ восхожденій сихъ двухъ свѣтилъ.

DISTANCE HORAIRE. Часовое разстояніе. Такъ называется въ Гномоникѣ уголъ, составляемый часовою линіею съ направленіемъ полуденной.

DISTANCES DES PLANÈTES AU SOLEIL. Разстоянія, удаленія планетъ отъ солнца можно изображать двоякимъ образомъ: 1° Въ миляхъ, верстахъ и вообще посредствомъ какой либо употребительной путевой мѣры. 2° Отношеніемъ къ разстоянію произвольной планеты, напримѣръ земли, отъ солнца; въ такомъ случаѣ разстояніе земли отъ солнца принимается за единицу. Астрономы преимущественно употребляютъ второй способъ.

Такъ какъ планеты описываютъ около солнца орбиты эллиптическія, то разстоянія ихъ отъ этого свѣтила должны перемѣняться. Приводимъ здѣсь среднія разстоянія планетъ, выраженныя въ частяхъ разстоянія земли отъ солнца, которое равно 20665838 географическимъ милямъ. Во второмъ столбцѣ помѣщены тѣ же разстоянія въ милліонахъ верстъ.

Таблица среднихъ разстояній планетъ отъ солнца.

Планеты:	Пропорціональныя разстоянія:	Въ верстахъ приблизительно:
☿ Меркурій..	0,3870981	56 милліон.
♀ Венера....	0,7233323	104 м.
♁ Земля.....	1,0000000	144 м.
♂ Марсъ.....	1,5236935	219 м.
⚶ Веста.....	2,3730000	340 м.
⚵ Юнона.....	2,6671630	384 м.
⚳ Церера....	2,7674060	398 м.
⚴ Паллада....	2,7675920	399 м.
♃ Юпитеръ..	5,2027911	748 м.
♄ Сатурнъ...	9,5387705	1371 м.
♅ Уранъ.....	19,1833050	2757 м.

☾ Среднее разстояніе луны отъ земли 51821 геогр. миль или 360394 версты.

DISTANCE ACCOURCIE (по Латин. *distantia curtata*). Укращенное разстояніе есть проэкція на плоскости эклиптики истиннаго разстоянія планеты отъ солнца. Оно называется *укращеннымъ* или *укороченнымъ* потому что всегда бываетъ менѣе истиннаго разстоянія Смот. CURTATION.

DISTANCE APPARENTE DES OBJETS. (Опт.) **ВИДИМОЕ РАЗСТОЯНІЕ, УДАЛЕНІЕ ПРЕДМЕТОВЪ.** Хотя человѣческій глазъ и не можетъ съ точностію судить о разстояніяхъ предметовъ, даже не весьма отдаленныхъ, однакоже при видѣніи есть такія ощущенія, которыя могутъ привести насъ къ приблизительной оцѣнкѣ этихъ разстояній, или, по крайней мѣрѣ, къ отличенію большихъ отъ меньшихъ. Къ числу признаковъ, способствующихъ къ утвержденію нашихъ понятій объ разстояніяхъ предметовъ, принадлежатъ слѣдующія соображенія:

1°. Въ нормальномъ состояніи нашихъ глазъ, оси ихъ должны направляться къ предмету, на который смотримъ. Чѣмъ ближе отъ насъ предметъ, тѣмъ болѣе будетъ уголъ, составляемый двумя осями, и съ увеличеніемъ этого угла мы должны болѣе и болѣе сжимать зрачекъ; самое это усиліе обнаруживаетъ близость предмета.

2°. Степень освѣщенія, яркость красокъ и явственность изображенія на сѣточной оболочкѣ глаза уменьшаются съ увеличеніемъ разстоянія предмета.

3°. Видимая величина такихъ предметовъ, коихъ истинные размѣры намъ извѣстны, приводитъ насъ къ приблизительной оцѣнкѣ ихъ разстояній.

4°. Изъ положенія предмета въ отношеніи къ другимъ, коихъ взаимныя положенія намъ извѣстны, мы составляемъ себѣ понятіе, болѣе или менѣе вѣрное, объ его отдаленіи.

DISTANCE FOCALE. ФОКУСНОЕ РАЗСТОЯНІЕ. Такъ называется разстояніе фокуса выпуклаго оптическаго стекла отъ ближайшей поверхности сего послѣдняго. Смот. LENTILLE.

DISTANCE EXPLOSIVE. (Физ.) **ДАЛЬНОСТЬ РАЗРЯДА, РАЗРЯЖЕНІЯ.** Наибольшее разстояніе, на которомъ наэлектризованное тѣло сообщаетъ свое электричество посредствомъ искры другому тѣлу.

DISTINCTE (BASE). (Опт.) **РАЗСТОЯНІЕ ЯВСТВЕННАГО ИЗОБРАЖЕНІЯ.** Это наименованіе употреблялось прежними оптиками въ одномъ смыслѣ съ *фокуснымъ разстояніемъ*; Смот. DISTANCE FOCALE.

DISTRIBUTION DES EAUX. (Гидравл.) **РАЗДѢЛЪ, РАСПРЕДѢЛЕНІЕ ВОДЫ.** Раздѣленіе извѣстнаго количества воды на части, пропорціональныя даннымъ числамъ. На практикѣ, эта задача приводится вообще къ слѣдующему:

Положимъ, что водохранилище снабжается водою посредствомъ водопроводной трубы или инымъ образомъ. Требуется сдѣлать въ стѣнѣ этого водохранилища извѣстное число отверстій, и опредѣлить ихъ діаметры по двумъ слѣдующимъ условіямъ: 1°. Чтобы количество воды, вытекающей въ извѣстное время изъ всѣхъ сихъ отверстій, равнялось количеству воды, доставляемой въ то же время водопроводною трубою. 2°. Чтобы частные расходы отверстій находились между собою въ извѣстныхъ отношеніяхъ.

Читатели найдутъ подробное рѣшеніе этой задачи въ *Encyclopédie méthodique, Mathématiques* (Том. 1 стр. 542).

DISTRIBUTIVES (FONCTIONS). (Анал.) **РАСПРЕДѢЛИТЕЛЬНЫЯ ФУНКЦІИ.** Смот. COMMUTATIVES (FONCTIONS).

DIURNE. (Астр.) **ДНЕВНОЙ. — СУТОЧНЫЙ.** *Arc diurne, дневная дуга*; Смот. ARC. — *Cercle diurne, суточный кругъ*; кругъ, параллельный экватору, описываемый звѣздою или какою нибудь точкою небесной сферы въ суточномъ ея движеніи. *Mouvement diurne de la terre, суточное движеніе земли.* Обращеніе земли около ея оси, совершающееся въ промежутокъ времени, раздѣляемый на 24 часа, и называемый *сутками.*

DIVERGENCE. (Геом. Анал. и Опт.) **РАСХОЖДЕНІЕ, РАСХОДИМОСТЬ.** *Divergence de deux droites, des rayons visuels*; *расхожденіе, расходимость двухъ прямыхъ*; *расхожденіе лучей зрѣнія.* Состояніе двухъ прямыхъ или лучей зрѣнія, коихъ направленія удаляются одно отъ другаго. — DIVERGENCE D'UNE SÉRIE; РАСХОДИМОСТЬ РЯДА. Смот. CONVERGENCE.

DIVERGENCE (VERRE DE). РАЗСѢВАТЕЛЬНОЕ СТЕКЛО. Вогнутое оптическое стекло; выпуклое же называется *собирательнымъ* (*verre de convergence*) или зажигательнымъ. Смот. LENTILLE.

DIVERGENT. (Геом. Анал. и Опт.) **РАСХОДЯЩІЙСЯ, УДАЛЯЮЩІЙСЯ.** *Droites divergentes, rayons divergents*; *расходящіяся прямыя, расходящіеся лучи.* *Série divergente*; *расходящійся рядъ.* Смот. CONVERGENCE.

DIVERGENTE (HYPERBOLE). РАСХОДЯЩАЯСЯ ГИПЕРБОЛА. Такъ назвалъ *Ньютонъ* гиперболу третей степени, коей вѣтви расходятся, и простираются въ противныя стороны. Въ томъ же смыслѣ онъ употреблялъ названіе *расходящейся параболы.*

DIVERSITÉ DE DIAMÈTRE. (Астр.) **РАЗНОСТЬ ДІАМЕТРА.** Такъ называлась въ древней Астрономіи дуга эклиптики, изображающая разность между уравненіемъ центра эпицикла (*prostaphérèse de l'épicycle*) въ перигеѣ и его уравненіемъ въ апогеѣ. *Птолемей* и *Коперникъ* называли эту дугу *excès* (*избытокъ*).

DIVIDENDE. (Арие.) **ДѢЛИМОЕ.** Смот. DIVISION. — Въ Коммерціи — дивидендъ, доля, участокъ.

DIVIDENDO. Смот. COMPOSITION.

DIVINATOIRE (ARITHMÉTIQUE). ГАДАТЕЛЬНАЯ АРИѲМЕТИКА. Смот. ARITHMÉTIQUE AMUSANTE.

DIVISER. (Арие. и Геом.) **ДѢЛИТЬ, РАЗДѢЛИТЬ.** Смот. DIVISION. Въ Механическомъ Искусствѣ, *дѣлить на градусы.* Смот. GRADUER. *Machine à diviser*; *дѣлительная машина.* — *Diviser une droite en moyenne et extrême raison*; *раздѣлить прямую въ среднемъ и крайнемъ содержаніи.* Смот. EXTRÊME.

DIVISEUR. (Арие.) **ДѢЛИТЕЛЬ.** Число означающее на сколько частей дѣлимое должно быть раздѣлено. Смот. DIVISION.

Diviseurs premiers или simples. Простые, первые дѣлители. Простыя числа, раздѣляющія нà-цѣло данное цѣлое число. И такъ, простые дѣлители числа 60 суть 2, 2, 3, 5. Смот. PREMIER (NOMBRE). *Сложные дѣлители* (*diviseurs composés*) того же числа будутъ: 4, 6, 10, 12, 15, 20, 30.

Всякое цѣлое число N можетъ быть изображено произведеніемъ $a^p b^q c^r \ldots$, въ которомъ a, b, c .. означаютъ простыя числа, а p, q, $r \ldots$ цѣлые показатели. И такъ, число 1176 равно произведенію $2^3.3.7^2$; въ этомъ частномъ случаѣ имѣемъ $a=2$, $b=3$, $c=7$, $p=3$, $q=1$, $r=2$.

Ясно, что каждый изъ дѣлителей числа $N=a^p b^q c^r \ldots$ будетъ вида $a^l b^m c^n \ldots$, разумѣя подъ l, m, $n \ldots$ числа, не превосходящія p, q, $r \ldots$ Слѣдовательно всѣ дѣлители числа N, включая сюда 1 и самое число N, изобразятся послѣдовательными членами разложенія

$$(1+a+a^2+\ldots+a^p)(1+b+b^2+\ldots+b^q)\times(1+c+c^2+\ldots+c^r)\ldots.$$

Если означимъ чрезъ P число этихъ членовъ, или, что всё равно, число всѣхъ дѣлителей N, то получимъ

$$P=(p+1)(q+1)(r+1)\ldots. \quad (1)$$

Сверхъ того, пусть будетъ

$$S=(1+a+\ldots+a^p)(1+b+\ldots+b^q)(1+c+\ldots+c^r)\ldots;$$

найдется

$$S=\frac{a^{p+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{q+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{r+1}-1}{c-1}\ldots. \quad (2)$$

Величина S изобразитъ сумму всѣхъ дѣлителей числа N. Приложивъ формулы (1) и (2) къ числу $N=1176=2^3.3.7^2$, для котораго $a=2$, $b=3$, $c=7$, $p=3$, $q=1$, $r=2$, получимъ

$$P=(3+1)(1+1)(2+1)=24$$

$$S=\frac{2^4-1}{2-1}\cdot\frac{3^2-1}{3-1}\cdot\frac{7^3-1}{7-1}=15.4.57=3420.$$

Diviseur linéaire. Линейный дѣлитель, дѣлитель первой степени. Алгебрическое выраженіе или число вида $ax+b$, дѣлящее нà-цѣло какую либо функцію количества x или вообще какую ни есть формулу.

Diviseur quadratique. Квадратичный дѣлитель, дѣлитель второй степени. Выраженіе или число вида $ax^2+bxy+cy^2$, раздѣляющее нà-цѣло какую либо функцію количествъ x и y или вообще извѣстную формулу.

Commun diviseur. Общій дѣлитель. Общимъ дѣлителемъ двухъ или нѣсколькихъ предложенныхъ цѣлыхъ чиселъ называется такое число, которое раздѣляетъ нà-цѣло всѣ данныя числа. То же самое должно разумѣть и объ общемъ дѣлителѣ двухъ или нѣсколькихъ алгебрическихъ выраженій. И такъ, общіе дѣлители чиселъ 60 и 42 будутъ 2, 3 и 6, а общіе дѣлители выраженій $x^3+bx^2-a^2x-a^2b$ и x^3-a^2x суть: $x-a$, $x+a$ и x^2-a^2. Наибольшій изъ всѣхъ общихъ дѣлителей называется *наибольшимъ общимъ дѣлителемъ* (*le plus grand commun diviseur*). И такъ, наибольшій общій дѣлитель данныхъ чиселъ или алгебрическихъ выраженій есть тотъ изъ общихъ дѣлителей, который дѣлится нà-цѣло на всѣ остальные. Таковы количества 6 и x^2-a^2 въ приведенныхъ сей-часъ примѣрахъ.

Опредѣленіе общаго наибольшаго дѣлителя

сколькихъ угодно количествъ A, B, C, D... приводится къ опредѣленію подобнаго дѣлителя для двухъ величинъ. Дѣйствительно, пусть будетъ Q общій наибольшій дѣлитель между A и B, Q' между Q и C, Q'' между Q' и D, и такъ далѣе; легко видѣть, что послѣдній изъ нихъ принадлежитъ совокупности количествъ A, B, C, D..... И такъ, если бы даны были три количества A, B и C, то величина Q' изобразила бы наибольшій ихъ дѣлитель.

Приступимъ теперь къ опредѣленію общаго наибольшаго дѣлителя двухъ цѣлыхъ раціональныхъ функцій

$$A = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m$$
$$B = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n,$$

въ которыхъ предполагаемъ $m > n$. Для краткости условимся называть *большею* ту изъ двухъ полиномій, которой степень выше, и обратно; и такъ, въ этомъ смыслѣ *A больше B, B меньше A.* Пусть будетъ D общій наибольшій дѣлитель полиномій A и B.

Прежде всего замѣтимъ, что D не можетъ быть болѣе B. Если B дѣлитъ на̀-цѣло A, то B будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ. Но если по раздѣленіи A на B, кромѣ частнаго числа q, получимъ остатокъ r, то D будетъ менѣе B. Въ послѣднемъ предположеніи имѣемъ $A = qB + r$, и какъ A и B дѣлятся на D, то и остатокъ r долженъ дѣлиться на то же количество D, и другихъ общихъ дѣлителей съ B имѣть не можетъ. И такъ, мы приведены теперь къ разысканію наибольшаго дѣлителя между выраженіями B и r, коихъ степени соотвѣтственно ниже степеней предложенныхъ двухъ полиномій A и B. Разсуждая по предыдущему, выведемъ заключеніе, что если r дѣлитъ на̀-цѣло B, то будетъ искомымъ наибольшимъ дѣлителемъ между B и r, и слѣдовательно между A и B; если же по раздѣленіи B на r получится, кромѣ частнаго числа q', остатокъ r', то наибольшій дѣлитель величинъ r и r' будетъ искомый дѣлитель D. Продолжая такимъ образомъ, дойдемъ наконецъ до дѣленія безъ остатка; послѣдній дѣлитель будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ полиномій A и B.

Вотъ рядъ послѣдовательно получаемыхъ уравненій:

$$A = qB + r$$
$$B = q'r + r'$$
$$r = q''r' + r''$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$r^{(k-2)} = q^{(k)}r^{(k-1)} + r^{(k)}$$
$$r^{(k-1)} = q^{(k+1)}r^{(k)}.$$

Очевидно, что послѣдній остатокъ $r^{(k)}$ дѣлитъ на̀-цѣло количества $r^{(k-1)}$, $r^{(k-2)}$, ... r'', r', r, B и A, и, въ слѣдствіе сказаннаго выше, будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ предложенныхъ выраженій A и B, почему и найдется $D = r^{(k)}$.

И такъ, *для опредѣленія* общаго наибольшаго дѣлителя *между двумя количествами A и B, надобно бо́льшее изъ нихъ раздѣлить на ме́ньшее, потомъ ме́ньшее на первый остатокъ, первый остатокъ на второй, второй на третій, и такъ далѣе до тѣхъ поръ, пока не дойдемъ до дѣленія безъ остатка. Послѣдній остатокъ, дѣлящій на̀-цѣло предпослѣдній, будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ предложенныхъ двухъ количествъ. Если окажется, что послѣдній остатокъ величина* постоянная, *то есть, не заключаетъ въ себѣ перемѣнной, отъ которой данныя количества зависятъ, то это послужитъ признакомъ, что A и B не имѣютъ никакого общаго дѣлителя.*

Когда при разысканіи общаго наибольшаго дѣлителя усмотримъ, что въ одинъ изъ двухъ смежныхъ остатковъ входитъ множитель, на который другой остатокъ не дѣлится, то этотъ множитель можетъ быть откинутъ. Должно также замѣтить, что всякій остатокъ можетъ быть умноженъ на какое угодно количество, лишь бы сіе послѣднее не имѣло никакого дѣлителя съ смежнымъ остаткомъ. Эти два замѣчанія, въ справедливости которыхъ весьма легко удостовѣриться, во многихъ случаяхъ значительно упрощаютъ разысканіе наибольшаго дѣлителя.

Для опредѣленія общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ M и N руководствуемся тѣмъ же правиломъ, какое предложили выше для алгебрическихъ выраженій. Должно только замѣтить, что если послѣдній остатокъ равенъ 1, то предложенныя два числа M и N не будутъ имѣть никакихъ общихъ дѣлителей, то есть дробь $\frac{M}{N}$ будетъ *несократимая.*

Примѣръ 1. *Найти общій наибольшій дѣлитель двухъ чиселъ 1428 и 1036.*

Вотъ подробности вычисленія:

$$\begin{array}{rr|r|l}
 & 1036 & 1428 & 1 \\
 & & 1036 & \\
1\ \textit{Остатокъ}: & 392 & 1036 & 2 \\
 & & 784 & \\
2\ \textit{Остатокъ}: & 252 & 392 & 1 \\
 & & 252 & \\
3\ \textit{Остатокъ}: & 140 & 252 & 1 \\
 & & 140 & \\
4\ \textit{Остатокъ}: & 112 & 140 & 1 \\
 & & 112 & \\
5\ \textit{Остатокъ}: & 28 & 112 & 4 \\
 & & 112 & \\
 & & 0 &
\end{array}$$

Такъ какъ пятый остатокъ, то есть 28, дѣлитъ на̀-цѣло предшествующій ему 112, то заключаемъ, что 28 есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ 1428 и 1036. И такъ, числитель и знаменатель дроби $\frac{1428}{1036}$ сокращаются на 28, въ слѣдствіе чего и получимъ $\frac{1428}{1036}=\frac{28\times51}{28\times37}=\frac{51}{37}$.

Примѣръ 2. *Найти общій наибольшій дѣлитель двухъ цѣлыхъ функцій* $A=5x^3-18ax^2+11a^2x-6a^3$ и $B=7x^2-23ax+6a^2$.

По предложенному выше правилу слѣдовало бы раздѣлить A на B; въ частномъ числѣ получили бы для перваго члена дробь $\frac{5}{7}x$. Для избѣжанія этого неудобства, помножаю A на число 7, не дѣлящее на̀-цѣло B; и такъ, надобно раздѣлить $7A$ на B. Произведя это дѣленіе, получимъ $5x$ въ частномъ числѣ, а $-11ax^2+47a^2x-42a^3$ въ остаткѣ; но степень этого остатка равна степени дѣлителя B: слѣдовательно можно продолжать дѣленіе. Замѣтимъ при томъ, что найденный остатокъ можетъ быть раздѣленъ на a, потому что a не дѣлитъ на̀-цѣло количества B; сверхъ того, для избѣжанія дробей, помножаемъ сокращенный остатокъ $-11x^2+47ax-42a^2$ на 7, и получаемъ $-77x^2+329ax-294a^2$. Раздѣливъ на B это выраженіе, найдемъ частное число -11, и остатокъ $r=76ax-228a^2=76a(x-3a)$. Этотъ остатокъ опять можетъ быть сокращенъ на $76a$, потому что $76a$ не дѣлитъ на̀-цѣло выраженія $7x^2-23ax+6a^2$. Раздѣливъ B, то есть $7x^2-23ax+6a^2$ на сокращенный остатокъ $x-3a$, получимъ въ частномъ числѣ $7x-2a$, а въ остаткѣ *нуль*; и такъ, $x-3a$ дѣлитъ на̀-цѣло B; слѣдовательно $x-3a$ есть общій наибольшій дѣлитель выраженій A и B. Изъ этого заключаемъ, что дробь $\frac{A}{B}$ сокращается; но раздѣленіи числителя и знаменателя на $x-3a$, получимъ

$$\frac{5x^3-18ax^2+11a^2x-6a^3}{7x^2-23ax+6a^2}=\frac{5x^2-3ax+2a^2}{7x-2a}.$$

Способъ общаго наибольшаго дѣлителя употребляется во многихъ алгебрическихъ теоріяхъ; отсылаемъ по сему предмету преимущественно къ статьямъ: CONTINUE (FRACTION), ÉGALES (RACINES), ÉLIMINATION, STURM (THÉORÊME DE).

DIVISIBILITÉ. (Теор. Чис.) **ДѢЛИМОСТЬ.** Свойство, въ слѣдствіе котораго какое либо цѣлое число, или, общѣе, аналитическая формула дѣлится безъ остатка на другое число или на нѣкоторое алгебрическое выраженіе. Смот. FERMAT (THÉORÊME DE), CONGRU, RESIDU.

Въ сочиненіяхъ объ Ариѳметикѣ обыкновенно предлагаютъ нѣкоторыя правила, относящіяся къ дѣлимости чиселъ; приводимъ здѣсь наиболѣе употребительныя, а именно, *признаки дѣлимости цѣлыхъ чиселъ* на 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13.

Всякое число, оканчивающееся чётною цифрою (включая сюда и *нуль*), дѣлится на 2, ибо десятки, сотни, тысячи и проч., какъ числа чётныя, дѣлятся на 2 безъ остатка.

Число дѣлится на 3, когда сумма его цифръ дѣлится безъ остатка на 3. Дѣйствительно, пусть будетъ данное число

$$N=a_0+10a_1+10^2a_2+10^3a_3+\ldots.$$

гдѣ a_0, a_1, a_2, $a_3\ldots.$ изображаютъ его послѣдовательныя цифры, считаемыя отъ правой руки къ лѣвой. Этому уравненію можно дать видъ

$$N=a_0+(9+1)a_1+(99+1)a_2+(999+1)a_3+\ldots.$$
$$=9a_1+99a_2+999a_3+\ldots.+a_0+a_1+a_2+a_3+\ldots.$$

И такъ

$$\frac{N}{3}=3a_1+33a_2+333a_3+\ldots.+\frac{a_0+a_1+a_2+a_3+\ldots}{3}$$

Слѣдовательно, когда сумма $a_0+a_1+a_2+a_3+\ldots.$ цифръ числа N будетъ дѣлиться безъ остатка на 3, то вторая часть предыдущаго уравненія изобразитъ цѣлое число; отсюда заключаемъ, что въ этомъ предположеніи и N будетъ дѣлиться на 3.

Всякое число, котораго десятки съ единицами дѣлятся на 4, дѣлимо на 4. И такъ, 1856 дѣлится на 4, ибо $\frac{56}{4}=$ цѣлому числу 9. Въ справедливости этого признака удостовѣряемся замѣтивъ, что сотни, тысячи и проч. дѣлятся на̀-цѣло на 4.

На основаніи сего правила можемъ тотчасъ рѣшить, будетъ ли предложенный годъ простой или високосный. Для этого стоитъ только раздѣлить на 4 послѣднія двѣ цифры даннаго года: если найдется остатокъ, то годъ *простой*, а если не будетъ остатка, то годъ *високосный*. И такъ, 1839 годъ *простой*, ибо раздѣливъ 39 на 4 получаемъ въ остаткѣ 3; 1840 годъ *високосный*, потому что $\frac{40}{4}=$ цѣлому числу 10.

Всякое число, оканчивающееся *нулемъ* или цифрою 5, дѣлится на̀-цѣло на 5, ибо десятки, сотни, тысячи и проч. дѣлятся безъ остатка на 5.

Чтобы узнать, дѣлится ли предложенное число на 7, разлагаемъ его сперва на трехцифренныя грани отъ правой руки къ лѣвой. Послѣдняя грань можетъ заключать въ себѣ менѣе трехъ цифръ. Потомъ беремъ сумму 1-ой, 3-ей, 5-ой и вообще всѣхъ граней нечётнаго порядка; находимъ также сумму 2-ой, 4-ой, 6-ой и вообще всѣхъ граней чётнаго порядка. Вычтя, мѐньшую изъ найденныхъ двухъ суммъ изъ бо̀льшей, получимъ извѣстную разность; число N будетъ дѣлиться на̀-цѣло на 7, если эта разность дѣлится на 7 безъ остатка. Напримѣръ, если бы дано было число 6511509594436, то, разложивъ его на грани, получили бы

5-ая	4-ая	3-я	2-ая	1-ая
6,	511,	509,	594,	436

Сумма 1-ой, 3-ей и 5-ой грани, то есть $436+509+6=951$, а 2-ой и 4-ой, то есть $594+511=1105$. Такъ какъ разность $1105-951=154$ дѣлится на 7 безъ остатка, то заключаемъ, что и предложенное число дѣлится на̀-цѣло на 7.

Чтобы доказать это предложеніе, замѣтимъ что равенство $10^3=1000=-1+7.143$, или, что всё равно, остаточное сравненіе $10^3\equiv-1$ (mod. 7) приводитъ къ слѣдующимъ двумъ: $10^{3.2k}\equiv+1$ (mod. 7) и $10^{3(2k+1)}\equiv-1$ (mod. 7), въ которыхъ k изображаетъ какое ни есть цѣлое число, включая сюда и *нуль*; Смот. CONGRUENCE. Помножая каждое изъ сихъ двухъ сравненій на 10 и на 10^2, получимъ слѣдующія равноостаточности по модулю 7:

$$(1)\begin{cases}10^{3.2k}\equiv+1\\10^{3.2k+1}\equiv+10\\10^{3.2k+2}\equiv+10^2\end{cases}\qquad(2)\begin{cases}10^{3(2k+1)}\equiv-1\\10^{3(2k+1)+1}\equiv-10\\10^{3(2k+1)+2}\equiv-10^2.\end{cases}$$

Пусть будетъ теперь предложенное число

$$N=a_0+10a_1+10^2a_2+10^3a_3+10^4a_4+10^5a_5+10^6a_6+10^7a_7+10^8a_8+10^9a_9+10^{10}a_{10}+10^{11}a_{11}+\ldots\ldots$$

Когда раздѣлимъ обѣ части этого уравненія на 7, то вторая часть его, въ силу формулъ (1) и (2), приметъ простѣйшій видъ. Дѣйствительно, положивъ сперва $k=0$ въ сравненіяхъ (2), получимъ $10^3\equiv-1$, $10^4\equiv-10$, $10^5\equiv-10^2$; положивъ $k=1$, сравненія (1) и (2) доставятъ: $10^6\equiv+1$, $10^7\equiv+10$, $10^8\equiv+10^2$, $10^9\equiv-1$, $10^{10}\equiv-10$, $10^{11}\equiv-10^2$; и такъ далѣе. Слѣдовательно

$$N\equiv a_0+10a_1+10^2a_2-a_3-10a_4-10^2a_5+a_6+10a_7+10^2a_8-a_9-10a_{10}-10^2a_{11}+\ldots.\ (\text{mod. }7),$$

или, что всё равно,

$$N=\left.\begin{matrix}(a_0+10a_1+10^2a_2)+(a_6+10a_7+10^2a_8)+\ldots\\-(a_3+10a_4+10^2a_5)-(a_9+10a_{10}+10^2a_{11})-\ldots\end{matrix}\right\}(\text{mod.}7)$$

Эта равноостаточность выражаетъ правило, предложенное выше для узнанія, дѣлится ли безъ остатка предложенное число N на 7.

Число дѣлится на 9, когда сумма его цифръ дѣлится безъ остатка на 9. И такъ, 67383 дѣлится на̀-цѣло на 9, ибо $6+7+3+8+3=27=9.3$; дѣйствительно, $\frac{67383}{9}=7487$.

Чтобы узнать, дѣлится ли данное число на 11, составляемъ сумму 1-ой, 3-ей, 5-ой и вообще всѣхъ цифръ нечётнаго порядка, начиная счётъ съ правой или съ лѣвой руки по произволенію; складываемъ также цифры чётнаго порядка, и получаемъ новую сумму. Если разность этихъ суммъ дѣлится на̀-цѣло на 11, то и предложенное число дѣлится безъ остатка на 11. И такъ, число 92019279 дѣлится на 11, ибо $9+2+1+2=14$, $7+9+0+9=25$, а $\frac{25-14}{11}=$ цѣлому числу 1; дѣйствительно, $\frac{92019279}{11}=8365389$.

Доказательства признаковъ дѣлимости чиселъ на 9 и на 11 читатели найдутъ въ статьѣ CONGRUENCE.

Чтобы узнать, будетъ ли предложенное число дѣлиться на 13, поступаемъ точно такъ, какъ для 7. Разбиваемъ данное число на трехцифренныя грани, и сложивъ сперва всѣ грани нечётнаго порядка, а потомъ чётнаго, вычитаемъ меньшую сумму изъ большей. Если разность дѣлится на 13, то и предложенное число будетъ дѣлиться на 13. Напримѣръ, число 881559909247485 дѣлимо на 13, ибо сумма нечётныхъ граней $485+909+881=2275$, чётныхъ же $247+559=806$, а разность двухъ суммъ $2275-806$ равняется числу 1469, которое дѣлится на 13 безъ остатка.

Это правило доказывается весьма простымъ образомъ замѣтивъ, что $10^3=1000=-1+13.77$ $\equiv-1$ (mod. 13), ибо изъ этой формулы выводимъ слѣдующій рядъ остаточныхъ сравненій по модулю 13:

$10^3\equiv-1$, $10^4\equiv-10$, $10^5\equiv-10^2$;
$10^6\equiv-10^3\equiv+1$, $10^7\equiv+10$, $10^8\equiv+10^2$;
$10^9\equiv10^3\equiv-1$, $10^{10}\equiv-10$, $10^{11}\equiv-10^2$;
и проч.

Изъ этихъ равноостаточностей, точно такъ какъ для 7, выведемъ справедливость приведеннаго сей-часъ признака дѣлимости цѣлыхъ чиселъ на 13.

Замѣтимъ, что изъ равенства

$$10^3=-1+7.11.13$$

выводятся слѣдующія три равноостаточности:
$10^3\equiv-1$ (mod. 7), $10^3\equiv-1$ (mod. 11), $10^3\equiv-1$(mod.13). Среднее изъ нихъ показываетъ, что признакъ дѣлимости чиселъ на 7 и на 13, приличествуетъ также и дѣлителю 11.

Можно найти подобные признаки, болѣе или менѣе выгодные на практикѣ, и для другихъ простыхъ чиселъ, какъ то для 17, 19, 23 и проч.

На основаніи сказаннаго въ этой статьѣ объ дѣлимости чиселъ на 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, легко будетъ найти и признаки дѣлимости ихъ на сложныя числа 6, 8, 10, 12, 14; 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26 и проч.

DIVISIBILITÉ. (Матем. и Физ.) **ДѢЛИМОСТЬ.** Свойство, по которому всякая величина можетъ быть раздѣлена на части дѣйствительнымъ образомъ, или только умственно. Въ математическомъ смыслѣ, дѣлимость можно продолжать въ безконечность. Что касается до физической дѣлимости тѣлъ, то предѣлы ея намъ неизвѣстны; опыты показываютъ только, что тѣла раздробляются искуственнымъ или естественнымъ образомъ на частицы, до такой степени мелкія, что онѣ, для нашихъ чувствъ, дѣлаются совершенно неощутительными. Смот. ATOMISTIQUE (SYSTÊME), DYNAMIQUE (SYSTÊME).

DIVISION. (Ариѳ. и Алг.) **ДѢЛЕНІЕ.** Ариѳметическое или алгебрическое дѣйствіе, посредствомъ котораго по данному произведенію двухъ величинъ, называемыхъ множителями, опредѣляется одинъ изъ сихъ множителей, когда другой извѣстенъ. Можно также опредѣлить дѣленіе дѣйствіемъ, посредствомъ котораго данная величина разлагается на извѣстное число равныхъ частей. Напримѣръ, если бы требовалось разложить число 15 на 3 равныя части, то нашли бы посредствомъ дѣленія, что каждая изъ искомыхъ частей равна 5, ибо $15=3\times5$.

Величина, которую требуется *раздѣлить*, то есть разложить на два множителя, называется *дѣлимымъ* (*dividende*), данный множитель — *дѣлителемъ* (*diviseur*), а искомый множитель — *частнымъ числомъ* (*quotient*). И такъ, въ предыдущемъ примѣрѣ 15 есть *дѣлимое*, 3 *дѣлитель*, а 5 — *частное число*. Когда дѣлитель не будетъ заключаться цѣлое число разъ въ дѣлимомъ, то сверхъ частнаго, получимъ число, называемое *остаткомъ дѣленія* (*reste de la division*). Напримѣръ, раздѣляя 19 на 5, получаемъ частное число 3, и остатокъ 4, ибо $19=3\times5+4$.

Ариѳметическое дѣленіе можно раздѣлить на два рода: на *простое* и на *сложное*. Дѣленіе называется *простымъ*, когда дѣлимое и дѣлитель суть цѣлыя числа, а *сложнымъ*, когда дѣлимое и дѣлитель, или только одно изъ этихъ чиселъ, будетъ заключать въ себѣ дроби.

Чтобы раздѣлить одночленное *алгебрическое* выраженіе на другое, такого же рода, надобно подъ дѣлимымъ провести черту, а подъ нею подписать дѣлитель, потомъ, если можно, сократить дробь. Напримѣръ, дѣленіе количества $2ax$ на bc изобразится слѣдующимъ образомъ: $\frac{2ax}{bc}$, и какъ $2ax$ и bc не имѣютъ никакого общаго дѣлителя, то частное $\frac{2ax}{bc}$ не допуститъ никакого сокращенія. Но если бы требовалось раздѣлить $-6a^2x^3$ на $+3a^2bx$, то написавъ частное въ видѣ дроби $\frac{-6a^2x^3}{+3a^2bx}$, замѣтили бы, что числитель и знаменатель ея дѣлятся на $3a^2x$; сокративъ эту дробь, получимъ выраженіе $-\frac{2x^2}{b}$, изображающее *частное*, происшедшее отъ раздѣленія $-6a^2x^3$ на $+3a^2bx$.

Вообще, когда дѣлимое и дѣлитель будутъ одночленныя количества, то для опредѣленія частнаго надобно руководствоваться слѣдующими правилами: 1°. Частное будетъ съ *плюсомъ* или съ *минусомъ* смотря по тому, имѣетъ ли дѣлимое одинакій или противный знакъ съ дѣлителемъ. 2°. Численный коэффиціентъ дѣлимаго должно раздѣлить на коэффиціентъ дѣлителя по обыкновеннымъ правиламъ Ариѳметики. 3°. Когда дѣлимое и дѣлитель заключаютъ въ себѣ одинакія буквы съ одинакими показателями, то должно ихъ или совсѣмъ уничтожить, или поставить 1 въ числителѣ, когда сей послѣдній по сокращеніи не будетъ заключать въ себѣ никакихъ чиселъ или буквъ. 4°. Когда одна и та же буква, но возвышенная въ различныя степени, входитъ въ дѣлимое и въ дѣлителя, то должно удержать эту букву въ томъ членѣ, въ которомъ она имѣетъ бо́льшій показатель, написавъ на мѣсто сего послѣдняго разность двухъ показателей. Буква съ меньшимъ показателемъ или совсѣмъ откидывается, или замѣняется 1-ею въ числителѣ, когда сей послѣдній по сокращеніи не будетъ заключать въ себѣ никакихъ чиселъ или буквъ.

Для раздѣленія многочленнаго алгебрическаго выраженія на другое, также многочленное, должно прежде всего, для удобности вычисленія, расположить оба выраженія по нисходящимъ степенямъ какой ни есть буквы, общей дѣлимому и дѣлителю. Потомъ, первый членъ дѣлимаго дѣлимъ на первый членъ дѣлителя, и получивъ такимъ образомъ первый членъ частнаго, умножаемъ на него всѣ члены дѣлителя; это произведеніе вычитаемъ изъ дѣлимаго, и получаемъ первый остатокъ. Далѣе, дѣлимъ первый членъ остатка на первый членъ дѣлителя, и находимъ второй членъ частнаго, на который помножаемъ опять всѣ члены дѣлителя; вычтя это произведеніе изъ перваго остатка, получимъ второй остатокъ, съ которымъ поступаемъ точно такъ, какъ съ первымъ. Продолжаемъ дѣйствіе на этомъ основаніи, и когда дойдемъ до остатка, равнаго нулю, то дѣленіе будетъ кончено. Но если получимъ остатокъ, котораго степень относительно буквы, общей дѣлимому и дѣлителю, будетъ ниже степени дѣлителя, то изъ этого заключимъ, что предложенное выраженіе не можетъ быть раздѣлено безъ остатка на данный дѣлитель. Для объясненія приводимъ два примѣра.

Примѣръ 1. *Раздѣлить* $15x^5-10ax^4+14a^2x^3-12a^3x^2+7a^4x-2a^5$ *на* $3x^2-2ax+a^2$.

$$\begin{array}{r|l}
15x^5-10ax^4+14a^2x^3-12a^3x^2+7a^4x-2a^5 & 3x^2-2ax+a^2 \\
\underline{15x^5-10ax^4+5a^2x^3} & 5x^3+3a^2x-2a^3 = \textit{частному.} \\
9a^2x^3-12a^3x^2+7a^4x & \\
\underline{9a^2x^3-6a^3x^2+3a^4x} & \\
-6a^3x^2+4a^4x-2a^5 & \\
\underline{-6a^3x^2+4a^4x-2a^5} & \\
0 &
\end{array}$$

Примѣръ 2. *Раздѣлить* a^4+b^4 *на* $a+b$.

$$\begin{array}{rr|l}
 & a^4+b^4 & a+b \\
 & \underline{a^4+a^3b} & a^3-a^2b+ab^2-b^3 = \textit{частному.} \\
1\ \textit{Остатокъ}: & -a^3b+b^4 & \\
 & \underline{-a^3b-a^2b^2} & \\
2\ \textit{Остатокъ}: & a^2b^2+b^4 & \\
 & \underline{a^2b^2+ab^3} & \\
3\ \textit{Остатокъ}: & -ab^3+b^4 & \\
 & \underline{-ab^3-b^4} & \\
4\ \textit{Остатокъ}: & 2b^4 &
\end{array}$$

Такъ какъ буква a не входитъ въ 4-ый остатокъ, то дѣленіе не можетъ быть продолжено далѣе. И такъ

$$\frac{a^4+b^4}{a+b}=a^3-a^2b+ab^2-b^3+\frac{2b^4}{a+b}.$$

DIVISION ORDONNÉE. (Ариѳ.) **СОКРАЩЕННОЕ ДѢЛЕНІЕ.** *Фурье*, въ сочиненіи своемъ: *Analyse des équations déterminées*, 1831 г., предложилъ весьма удобный способъ для опредѣленія частнаго числа въ томъ случаѣ, когда дѣлимое и дѣлитель заключаютъ въ себѣ значительное число цифръ. Онъ назвалъ это дѣйствіе *division ordonnée*. Способъ Фурье имѣетъ большое преимущество предъ сокращеннымъ дѣленіемъ, изложеннымъ нами въ статьѣ: DÉCIMALE (FRACTION); руководствуясь правиломъ Фурье, мы принимаемъ въ расчётъ только тѣ цифры дѣлителя, которыя имѣютъ вліяніе на послѣдовательные знаки частнаго числа, и, главное, всегда бываемъ увѣрены въ точности каждой найденной цифры въ частномъ числѣ. Вотъ въ какомъ видѣ Фурье предлагаетъ свой способъ.

Прежде всего въ данномъ дѣлителѣ отдѣляемъ по усмотрѣнію нѣсколько изъ первыхъ его цифръ, какъ то: одну, или двѣ, или болѣе. Число, изображенное отдѣленными такимъ образомъ цифрами, принимается за дѣлитель, который назовемъ *сокращеннымъ*; Фурье назвалъ его *diviseur désigné*. Потомъ, данное дѣлимое дѣлимъ на этотъ сокращенный дѣлитель по обыкновенному правилу, отъ котораго отступаемъ только въ одномъ отношеніи. Вотъ въ чёмъ состоитъ отступленіе, о которомъ говоримъ: каждый разъ какъ при дѣленіи сносимъ цифру дѣлимаго къ остатку, получаемому послѣ вычитанія, и составляемъ такимъ образомъ *частное дѣлимое*, должно исправить это дѣлимое, вычтя изъ него нѣкоторое число, опредѣленіе котораго будетъ показано ниже. Найдя по этому правилу *исправленное частное дѣлимое*, ищемъ сколько разъ содержится въ немъ сокращенный дѣлитель; въ частномъ числѣ пишемъ цифру, означающую это число разъ. Произведеніе найденной цифры на сокращенный дѣлитель вычитаемъ изъ исправленнаго частнаго дѣлимаго, и къ остатку сносимъ новую цифру даннаго дѣлимаго. Продолжаемъ дѣйствіе на томъ же основаніи, и находимъ въ частномъ числѣ сколько угодно цифръ, которыя всѣ будутъ вѣрны.

Поправка частнаго дѣлимаго, то есть число, которое должно вычесть изъ этого частнаго дѣлимаго, опредѣляется слѣдующимъ образомъ: пусть будетъ m число уже найденныхъ цифръ; предположивъ, что онѣ написаны въ обратномъ порядкѣ противъ настоящаго, подписываемъ ихъ подъ m цифрами даннаго дѣлителя, непосредственно слѣдующими за послѣднею цифрою сокращеннаго дѣлителя. Умножаемъ потомъ каждую изъ разсматриваемыхъ m цифръ нижняго ряда на соотвѣтствующую ей въ верхнемъ ряду, и получаемъ такимъ образомъ m произведеній; сумма всѣхъ произведеній будетъ искомая *поправка*, то есть число, которое должно вычесть изъ частнаго дѣлимаго. Напримѣръ, если бы данный дѣлитель былъ 35206735...., сокращенный 35, а найденныя цифры въ частномъ числѣ 58264, то слѣдовало бы написать

20673
46285;

сумма произведеній каждыхъ двухъ соотвѣтствующихъ цифръ, именно

$$5\times3+8\times7+2\times6+6\times0+4\times2=91$$

изобразило бы искомую поправку.

Замѣтимъ, что всякій разъ какъ сносимъ цифру дѣлимаго къ остатку, должно смотрѣть, будетъ ли этотъ остатокъ *болѣе*, или по крайней мѣрѣ *равенъ* суммѣ цифръ, уже написанныхъ въ частномъ числѣ. Если это условіе удовлетворяется, то заключаемъ, что написанная въ частномъ числѣ послѣдняя цифра вѣрна.

Когда число цифръ, изъ которыхъ состоитъ сокращенный дѣлитель, окажется слишкомъ малымъ, то приведенное сей-часъ условіе не удовлетворится, то есть, остатокъ послѣдняго дѣйствія будетъ *менѣе* суммы цифръ, уже написанныхъ въ частномъ числѣ: тогда послѣдняя цифра частнаго числа будетъ сомнительна; въ такомъ случаѣ выгодно будетъ увеличить число цифръ сокращеннаго дѣлителя. А чтобы перейти къ другому сокращенному дѣлителю, продолжаемъ сперва дѣйствіе по прежнему правилу, то есть, сносимъ цифру дѣлимаго, и подписываемъ поправку; если нельзя вычесть этой поправки, то заключаемъ, что послѣдняя цифра частнаго числа слишкомъ велика, почему и уменьшаемъ ее единицею. Но ежели поправка менѣе уменьшаемаго числа, то вычтемъ ее, и къ полученной разности спустимъ новую цифру дѣлимаго; такимъ образомъ найдется *новое частное дѣлимое*. Вмѣстѣ съ тѣмъ составляемъ и *новый сокращенный дѣлитель*, прибавивъ къ старому одну цифру. Продолжаемъ дѣйствіе на основаніи прежняго правила, то есть, ищемъ поправку новаго частнаго дѣлимаго написавъ въ обратномъ порядкѣ m найденныхъ цифръ въ частномъ числѣ, и перемноживъ ихъ соотвѣтственно на m цифръ, непосредственно слѣдующихъ за послѣднею цифрою новаго сокращеннаго дѣлителя; сумма всѣхъ этихъ произведеній изобразитъ искомую поправку. Вычтя ее, получимъ исправленное частное дѣлимое, послѣ чего продолжаемъ дѣйствіе какъ показано выше, употребляя уже новый сокращенный дѣлитель. Впрочемъ, въ продолженіи вычисленія можно возвращаться къ прежнему сокращенному дѣлителю, и вообще увеличивать или уменьшать по усмотрѣнію число составляющихъ его цифръ.

Вотъ примѣры *сокращеннаго дѣленія Фурье* со всѣми подробностями вычисленія.

Примѣръ 1-ый.

$\bar{9}5'0'6'8'8'1'2'20566669.....$ | $\bar{8}5\dot{}1\dot{}7\dot{}6\dot{}1\dot{}3\dot{}45942....$
8 | 11 1 6 1 5....
15′ (1 = 1: цифра 1 вѣрна.)   4
5 = 1.5
2-ое испр. частн. дѣлимое 10
8
20′ (2 = 1 + 1: цифра 1 вѣрна.)
6 = 1.1 + 1.5
3-ье испр. частн. дѣлимое .. 14
8
66′ (6 > 1 + 1 + 1: цифра 1 вѣрна.)
13 = 1.7 + 1.1 + 1.5
4-ое испр. частн. дѣлимое 53
48
58′ (5 < 1 + 1 + 1 + 6: цифра 6 сомнительна.)
44 = 1.6 + 1.7 + 1.1 + 6.5
5-ое испр. частн. дѣлимое..... 14 (такъ какъ поправка 44 менѣе уменьшаемаго 58, то заключаемъ, что цифра 6 вѣрна. Продолжаемъ дѣйствіе, удерживая прежній сокращенный дѣлитель 8.)
8
68′ (6 < 1 + 1 + 1 + 6 + 1: цифра 1 сомнительна.)
25 = 1.1 + 1.6 + 1.7 + 6.1 + 1.5
6-ое испр. частн. дѣлимое...... 43 (такъ какъ поправка 25 менѣе 68, то цифра 1 вѣрна.)
40
31′ (3 < 1 + 1 + 1 + 6 + 1 + 5: цифра 5 сомнительна.)
78 = 1.3 + 1.1 + 1.6 + 6.7 + 1.1 + 5.5
(поправка 78 > 31; слѣдовательно цифра 5 слишкомъ велика; пишемъ 4 вмѣсто 5.)
6-ое испр. частн. дѣлимое....... 43
32
112′ (11 < 1 + 1 + 1 + 6 + 1 + 4: цифра 4 сомнительна.)
73 = 1.3 + 1.1 + 1 6 + 6.7 + 1.1 + 4.5
7-ое испр. частн. дѣлимое........ 39 (цифра 4 вѣрна, ибо 73 < 112.) и такъ далѣе.

Въ этомъ примѣрѣ усматриваемъ, что съ четвертой цифры частнаго числа, то есть съ 6, невыгодно употреблять сокращенный дѣлитель $\overline{8}$, ибо дальнѣйшія цифры частнаго числа оказываются сомнительными. И такъ, начиная съ 5-аго исправленнаго частнаго дѣлимаго, вмѣсто сокращеннаго дѣлителя $\overline{8}$, беремъ $\overline{85}$. Вотъ подробности вычисленія въ этомъ новомъ предположеніи:

Примѣръ 2-ой.

95′0′6′8′8′1′2′2′0′566669..... | 85·1·7·6·1·3·4·5·9·42....
8 | 11 1 6 1 4 3 7 7....
15′ (1 = 1 : цифра 1 вѣрна.)
5 = 1.5
2-ое испр. частн. дѣлимое. 10
8
20′ (2 = 1 + 1 : цифра 1 вѣрна.)
6 = 1.1 + 1.5
3-ье испр. частн. дѣлимое.. 14
8
66′ (6 > 1 + 1 + 1 : цифра 1 вѣрна.)
13 = 1.7 + 1.1 + 1.5
4-ое испр. частн. дѣлимое.. 53
48
58′ (5 < 1 + 1 + 1 + 6 : цифра 6 сомнительна.)
44 = 1.6 + 1.7 + 1.1 + 6.5
Новое частное дѣлимое....... 148′ (такъ какъ поправка 44 < 58, то заключаемъ, что цифра 6 вѣрна; но, для избѣжанія сомнительныхъ цифръ, прибавляемъ къ сокращенному дѣлителю одну цифру, и получаемъ 85. Вмѣстѣ съ тѣмъ сносимъ слѣдующую цифру 8 дѣлимаго.)
20 = 1.1 + 1.6 + 1.7 + 6.1
Новое испр. частн. дѣлимое... 128
85
431′ (43 > 1 + 1 + 1 + 6 + 1 : цифра 1 вѣрна.)
53 = 1.3 + 1.1 + 1.6 + 6.7 + 1.1
2-ое новое испр. частн. дѣлимое.. 378
340
382′ (38 > 1 + 1 + 1 + 6 + 1 + 4 : цифра 4 вѣрна.)
55 = 1.4 + 1.3 + 1.1 + 6.6 + 1.7 + 4.1
3-ье новое испр. частн. дѣлимое... 327
255
722′ (72 > 1 + 1 + 1 + 6 + 1 + 4 + 3 : цифра 3 вѣрна.)
55 = 1.5 + 1.4 + 1.3 + 6.1 + 1.6 + 4.7 + 3.1
4-ое новое испр. частн. дѣлимое.... 667
595
720′ (72 > 1 + 1 + 1 + 6 + 1 + 4 + 3 + 7 : цифра 7 вѣрна.)
89 = 1.9 + 1.5 + 1.4 + 6.3 + 1.1 + 4.6 + 3.7 + 7.1
5-ое новое испр. частн. дѣлимое..... 631
595
36 (36 > 1 + 1 + 1 + 6 + 1 + 4 + 3 + 7 + 7 : цифра 7 вѣрна.)
и такъ далѣе.

Предѣлы нашего Лексикона не позволяютъ намъ привести любопытное приложеніе способа сокращеннаго дѣленія къ опредѣленію вещественныхъ корней уравненій какой ни есть степени. Отсылаемъ по сему предмету къ книгѣ Фурье: *Analyse des équations déterminées* (стр. 193).

Доказательство *сокращеннаго дѣленія Фурье* можно основать на разсмотрѣніи разрядовъ единицъ, составляющихъ различныя произведенія, которыя входятъ въ составъ *поправокъ*. Каждая поправка дѣлается съ тою цѣлію, чтобы отнять отъ частнаго дѣлимаго сумму произведеній одинаковаго разряда съ цифрою даннаго дѣлимаго, которую снесли къ остатку. Впрочемъ, читатели найдутъ доказательство этого способа въ книгахъ: Supplemente zu Georg Simon Klügel's Wörterbuche der reinen Mathematik; von J. A. Grunert; zweite Abtheilung, 1836, и въ Grundzüge der Lehre von den höheren numerischen Gleichungen; von M. W. Drobisch, 1834.

DIVISION. (Ариѳ.) *Par division de raison, de proportion*, или просто *dividendo*. Смот. COMPOSITION.

DIVISION. (Геом.) **ДѢЛЕНІЕ.** *Геометрическое дѣленіе* состоитъ въ опредѣленіи линіи, которая равнялась бы частному, получаемому чрезъ раздѣленіе произведенія двухъ линій на одну, или произведенія трехъ линій на произведеніе двухъ, и проч. И такъ, геометрическое дѣленіе приводится къ построенію выраженій $\frac{ab}{c}$, $\frac{abc}{de}$ и проч., въ которыхъ a, b, c, d, e..... изображаютъ данныя линіи. Смот. CONSTRUCTION.

DIVISION. (Лог.) **РАЗДѢЛЕНІЕ, ДѢЛЕНІЕ.** Предложеніе, состоящее въ исчисленіи частей, коихъ совокупность составляетъ какое нибудь цѣлое. И такъ, когда говоримъ, что цѣлыя числа бываютъ *чётныя* или *нечётныя*, то такое *раздѣленіе* вѣрно, ибо нѣтъ ни одного цѣлаго числа, которое бы не было или чётнымъ, или нечётнымъ.

DIX. (Ариѳ.) **ДЕСЯТЬ.** Наименьшее изъ чиселъ, изображаемыхъ двумя знаками въ общепринятой Ариѳметикѣ. — Dixième; десятый. Un dixième, одна десятая. Dix-huit, восемнадцать.

DIXMES (ÉCHELLE DES). (Практ. Геом.) **ДЕСЯТИЧНЫЙ МАСШТАБЪ.** Смот. ÉCHELLE.

DIX-NEUF. ДЕВЯТНАДЦАТЬ.

DIX-SEPT. СЕМНАДЦАТЬ.

Dix-sept cotés (polygone régulier de). Правильный семнадцатиугольникъ. Въ статьѣ BINOMES (ÉQUATIONS) мы показали, что построеніе правильнаго многоугольника объ m сторонахъ зависитъ отъ рѣшенія двучленнаго уравненія m-ой степени. И такъ, для вписанія въ кругѣ *семнадцатиугольника*, надобно рѣшить уравненіе $x^{17}-1=0$, которое, по общей теоремѣ, доказанной *Гауссомъ*, приводится къ рѣшенію четырехъ уравненій 2-ой степени. Смот. ANGULAIRES (SECTIONS).

На основаніи общей теоріи, изложенной въ статьѣ BINOMES (ÉQUATIONS) [Смот.], мы могли бы рѣшить уравненіе $x^{17}-1=0$, или, что всё равно, раздѣлить окружность круга на 17 равныхъ частей. Но такъ какъ выкладки были бы довольно сложны, то мы приведемъ здѣсь простѣйшій способъ, предложенный Гауссомъ, и основанный на извѣстныхъ тригонометрическихъ формулахъ. Этотъ самый способъ читатели найдутъ въ Тригонометріи *Лежандра*.

Пусть будетъ π полуокружность круга при радіусѣ 1, и $\frac{\pi}{17}=\varphi$. Изобразимъ чрезъ P сумму

$$Cos\varphi+Cos3\varphi+Cos5\varphi+Cos7\varphi+Cos9\varphi+Cos11\varphi+Cos13\varphi+Cos15\varphi,$$

и покажемъ сперва, что она равна $\frac{1}{2}$. Для этого помножимъ величину P и равную ей сумму $Cos\varphi+Cos3\varphi+\ldots+Cos15\varphi$ на $2Cos\varphi$, и выразимъ каждое произведеніе двухъ косинусовъ въ простыхъ косинусахъ, употребляя на сей конецъ извѣстную формулу

$$2CosaCosb=Cos(a+b)+Cos(a-b).$$

Найдется

$$2PCos\varphi=1+2Cos2\varphi+2Cos4\varphi+2Cos6\varphi+2Cos8\varphi+2Cos10\varphi+2Cos12\varphi+2Cos14\varphi+Cos16\varphi.$$

Но, по причинѣ $17\varphi=\pi$, имѣемъ

$$Cos\ 2\varphi=Cos(\pi-15\varphi)=-Cos15\varphi$$
$$Cos\ 4\varphi=Cos(\pi-13\varphi)=-Cos13\varphi$$
$$Cos\ 6\varphi=Cos(\pi-11\varphi)=-Cos11\varphi$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Cos14\varphi=Cos(\pi-3\varphi)=-Cos3\varphi$$
$$Cos16\varphi=Cos(\pi-\varphi)=-Cos\varphi;$$

слѣдовательно

$$2PCos\varphi=1-2Cos15\varphi-2Cos13\varphi-2Cos11\varphi-2Cos9\varphi-2Cos7\varphi-2Cos5\varphi-2Cos3\varphi-Cos\varphi,$$

или, вводя во вторую часть уравненія величину P,

$$2PCos\varphi=1-2P+Cos\varphi,\ \text{откуда}\ P=\tfrac{1}{2}.$$

Разлагаемъ теперь сумму $P=\frac{1}{2}$ на слѣдующія двѣ части:

$$x=Cos3\varphi+Cos5\varphi+Cos7\varphi+Cos11\varphi$$
$$y=Cos\varphi+Cos9\varphi+Cos13\varphi+Cos15\varphi.$$

И такъ, $x+y=\frac{1}{2}$; для опредѣленія x и y надобно имѣть еще одно уравненіе. Для этого, перемножаемъ между собою послѣднія формулы, и, какъ выше, замѣняемъ произведенія косинусовъ простыми косинусами. Такимъ образомъ получимъ

$$xy = 2(Cos2\varphi+Cos4\varphi+Cos6\varphi+\ldots+Cos16\varphi)$$
$$= -2(Cos15\varphi+Cos13\varphi+Cos11\varphi+\ldots+Cos\varphi)$$
$$= -2P = -1.$$

Изъ уравненій $x+y=\frac{1}{2}$ и $xy=-1$ выводимъ

$$x=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\sqrt{17},\quad y=\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\sqrt{17}.$$

Разлагаемъ опять каждую изъ суммъ x и y на двѣ части, полагая

$$x=s+t \qquad y=u+v$$
$$s=Cos3\varphi+Cos5\varphi \qquad u=Cos\varphi+Cos13\varphi$$
$$t=Cos7\varphi+Cos11\varphi \qquad v=Cos9\varphi+Cos15\varphi,$$

и ищемъ, подобно предыдущему, произведенія st и uv; найдемъ $st=-\frac{1}{4}$ и $uv=-\frac{1}{4}$. И такъ, для опредѣленія четырехъ величинъ s, t, u и v, надобно будетъ рѣшить два уравненія второй степени.

Наконецъ, для опредѣленія $Cos\varphi$, пусть будетъ $Cos\varphi=w$ и $Cos13\varphi=z$. Мы уже имѣемъ одно уравненіе $w+z=u$; чтобы найти другое, составляемъ произведеніе wz. Найдемъ послѣдовательно

$$wz = Cos\varphi.Cos13\varphi$$
$$= \tfrac{1}{2}(Cos14\varphi+Cos12\varphi)$$
$$= -\tfrac{1}{2}(Cos3\varphi+Cos5\varphi)$$
$$= -\tfrac{1}{2}s.$$

Изъ двухъ уравненій

$$w+z=u \quad \text{и} \quad wz=-\tfrac{1}{2}s,$$

въ которыхъ u и s извѣстны, опредѣляемъ окончательно посредствомъ новаго уравненія 2-ой степени величины w и z. Но $w=Cos\varphi$ $=Cos\frac{\pi}{17}$, слѣдовательно сторона правильнаго *семнадцатиугольника*, вписаннаго въ кругѣ, коего радіусъ предполагается равнымъ 1, будетъ $2Sin\varphi=2\sqrt{1-Cos^2\varphi}=2\sqrt{1-w^2}$. Такъ какъ для опредѣленія величины w мы рѣшали только уравненія 2-ой степени, то и заключаемъ, что построеніе правильнаго многоугольника объ семнадцати сторонахъ возможно *геометрически*, то есть, при употребленіи одной линейки и циркуля.

Легко довести до конца обозначенное выше вычисленіе количествъ $Cos\varphi$, $Cos2\varphi$, $Cos3\varphi$, ... Приведемъ одну изъ сихъ величинъ, напримѣръ $Cos2\varphi=Cos\frac{2\pi}{17}$. Вотъ эта формула:

$$Cos\frac{2\pi}{17}=-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}$$
$$-\frac{1}{8}\sqrt{\left[(17+3\sqrt{17})-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right]}.$$

Въ заключеніе скажемъ, что извѣстный Французскій математикъ *Амперъ*, основываясь на теоріи Гаусса, предложилъ геометрическое построеніе правильнаго семнадцатиугольника.

DIZAINE. (Ариѳ.) **ДЕСЯТОКЪ.**

DO.

DODÉCADIQUE, то же что **DUODÉCIMAL** (Смот.).

DODÉCAÈDRE. (Геом.) **ДВѢНАДЦАТИГРАННИКЪ, ДОДЕКАЭДРЪ.** Тѣло, ограниченное двѣнадцатью правильными, равными между собою пятиугольниками. Двѣнадцатигранникъ есть одинъ изъ пяти правильныхъ многогранниковъ, разсматриваемыхъ въ Элементарной Геометріи. Половина обыкновеннаго правильнаго двѣнадцатигранника изображена въ разверзаніи на черт. 17 (Листъ VII).

Г. Поэнсо (*Poinsot*), въ своемъ *Mémoire sur les Polygones et les Polyèdres*, описалъ *четыре* правильные многогранника, отличные отъ тѣхъ пяти тѣлъ, которыя обыкновенно разсматриваются въ Геометріи. Онъ нашелъ *три* новые двѣнадцатигранника и *одинъ* двадцатигранникъ.

Новые двѣнадцатигранники получаются слѣдующимъ образомъ:

1°. Если въ обыкновенномъ додекаэдрѣ продолжимъ стороны двѣнадцати пятиугольниковъ, то получимъ *звѣздообразный додекаэдръ втораго рода* (*dodécaèdre étoilé de seconde espèce*).

2°. Если въ обыкновенномъ додекаэдрѣ продолжимъ плоскость каждаго пятиугольника до встрѣчи съ пятью плоскостями граней, окружающихъ противоположный пятиугольникъ, то есть, пятиугольникъ, параллельный разсматриваемому, то получимъ *додекаэдръ третьяго рода*, ограниченный обыкновенными правильными пятиугольниками.

3°. Продолживъ стороны двѣнадцати пятиугольниковъ, образующихъ додекаэдръ третьяго рода, составимъ *додекаэдръ четвертаго рода.*

Г. Коши, въ XVI тетради Журнала Политехническаго Училища (1813 г.), въ Разсужденіи подъ заглавіемъ: *Recherches sur les polyèdres*, доказалъ, что сверхъ давно извѣстныхъ пяти правильныхъ многогранниковъ и четырехъ новыхъ, построенныхъ Г. Поэнсо, не можетъ существовать другихъ.

Dodécaèdre gnomonique. Гномоническій додекаэдръ. Двѣнадцатигранникъ, на граняхъ котораго начерчены солнечные часы.

DODÉCAGONE. (Геом.) **ДВѢНАДЦАТИУГОЛЬНИКЪ.** Плоская фигура, имѣющая двѣнадцать сторонъ и столько же угловъ. При равныхъ сторонахъ и углахъ, двѣнадцатиугольникъ называется *правильнымъ* (*dodécagone régulier*).

Построеніе правильнаго двѣнадцатиугольника очень просто: вписываемъ въ кругѣ шестиугольникъ, что весьма легко, ибо сторона его, какъ извѣстно, равна радіусу. Потомъ, дѣлимъ пополамъ каждую изъ дугъ, стягиваемыхъ сторонами шестиугольника, и такимъ образомъ раздѣляемъ окружность круга на 12 равныхъ частей; проведя прямыя отъ каждой точки дѣленія къ смежной съ нею, получимъ правильный двѣнадцатиугольникъ. —

Сверхъ описаннаго сей-часъ правильнаго двѣнадцатиугольника, есть еще другой, называемый *звѣздообразнымъ* (*dodécagone étoilé*). Вотъ его построеніе: раздѣливъ по предыдущему на 12 равныхъ частей окружность круга, и означивъ буквами a, b, c, d,.... (черт. 12 Листъ VIII) точки дѣленія, соединяемъ сіи послѣднія, пропуская каждый разъ четыре смежныя точки. Такимъ образомъ, начиная отъ a идемъ къ f, отъ f къ k, отъ k къ d, отъ d къ i, отъ i къ b, отъ b къ g, отъ g къ l, отъ l къ e, отъ e къ j, отъ j къ c, отъ c къ h, и наконецъ отъ h возвращаемся къ a, и замыкаемъ многоугольникъ.

DODÉCAHÈDRE или DODÉCAÈDRE (Смот.).

DODÉCATÉMORIE. Уст. выраж. Двѣнадцатая часть окружности круга, то есть 30°. Смот. CERCLE, ARC. — Въ древней Астрономіи подъ словомъ *додекатеморія* разумѣли *зодіакальные знаки*, потому что каждый изъ нихъ занимаетъ двѣнадцатую часть зодіака, или 30°.

DOIGT. (Астр.) **ДЮЙМЪ.** Смот. DISQUE.

DOMINICALE (LETTRE). (Календ.) **ВОСКРЕСНАЯ БУКВА, ВЪ-РУЦѢ-ЛѢТО, ВРУЦѢЛѢТІЕ.** Буква, соотвѣтствующая воскресенью въ теченіи цѣлаго года. Въ Греко-Россійскомъ Церковномъ мѣсяцесловѣ недѣльные дни изображаются первыми семью численными буквами Славянскаго алфавита въ слѣдующемъ порядкѣ: З, Ѕ, Є҃, Д, Г, В, А҃. Первому числу Марта мѣсяца соотвѣтствуетъ буква Г, второму — буква В, третьему — А҃, четвертому — З, пятому — Ѕ, шестому — Є, седьмому — Д, осьмому, какъ первому, буква Г, и такъ далѣе. Слѣдовательно, въ продолженіи цѣлаго года, одна и та же буква будетъ показывать одинъ и тотъ же недѣльный день. Напримѣръ, въ 1841 году первое Марта приходится въ субботу; поэтому, въ продолженіи 1841 года, буква Г будетъ означать субботы, буква В воскресенья, А҃ — понедѣльники, З — вторники, Ѕ — среды, Є҃ — четверги, и наконецъ Д — пятницы. И такъ, *Воскресная буква* 1841 года будетъ В.

Опредѣленіе Воскресной буквы для даннаго года показано въ статьѣ: CALENDRIER, къ которой и отсылаемъ читателей.

DONNÉ. **ДАННЫЙ. — ИЗВѢСТНЫЙ, ОПРЕДѢЛЕННЫЙ.** *Quantité donnée en fonction d'une autre*; *количество, данное въ функціи другаго. Une droite donnée de longueur et de position*; *линія, данная по длинѣ своей и по направленію. Un cercle donné de grandeur*; *даннаго, извѣстнаго радіуса кругъ. Courbes données d'espèces*; *даннаго вида кривыя*, и проч.

DONNÉES. **ДАННЫЯ ВЕЛИЧИНЫ, ДАННЫЯ, ДАННОСТИ.** Величины, которыя при рѣшеніи какой либо задачи предполагаются извѣстными. Данныя служатъ для опредѣленія неизвѣстныхъ величинъ. — *Les données du probléme*; *данныя задачи. Ces données sont insuffisantes pour resoudre le question*; *этихъ данныхъ недостаточно для рѣшенія вопроса.* Смот. DATA, ÉLÉMENS D'UNE QUESTION.

DONNER. **ДАТЬ.** *Les trois côtés d'un triangle étant donnés, trouver les angles*; *по даннымъ тремъ сторонамъ треугольника, опредѣлить углы.*

DORMANT. (Практ. Мех.) **СТОЙКА — ЛЕЖЕНЬ.** *Стойками* вообще называются неподвижные брусья, деревянные или металлическіе, стоящіе въ вертикальномъ положеніи. Когда же брусья утверждены горизонтально, то они принимаютъ названіе *лежней*.

DOUBLE. ДВОЙНОЙ, УДВОЕННЫЙ, ВДВОЕ БОЛЬШІЙ. — ДВОЯКІЙ. Величина бываетъ *вдвое болѣе* данной величины, когда послѣдняя содержится въ ней два раза. *Double produit de deux quantités*; *удвоенное произведеніе двухъ количествъ*; таково, напримѣръ, произведеніе $2ab$ относительно двухъ величинъ a и b. *Quantité sous-double*; *половинное количество.* — *Courbe à double courbure*; *кривая двоякой кривизны.* Смот. COURBE.

Raison double. Двукратное содержаніе. Когда первый членъ даннаго отношенія *вдвое болѣе* втораго его члена, какъ напримѣръ въ отношеніи $10:5$, то такое содержаніе называется *двукратнымъ*.

Raison sous-double. Половинное содержаніе. Если первый членъ даннаго отношенія *вдвое менѣе* втораго его члена, то такое содержаніе называется *половиннымъ*. Таково содержаніе $5:10$.

DOUBLE (SÉRIE). (Анал.) **ДВОЙНОЙ РЯДЪ.** Такъ называется рядъ

$$\begin{array}{l} u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \\ u_1' + u_2' + u_3' + \dots + u_n' + \dots \\ u_1'' + u_2'' + u_3'' + \dots + u_n'' + \dots \\ u_1''' + u_2''' + u_3''' + \dots + u_n''' + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_1^{(m)} + u_2^{(m)} + u_3^{(m)} + \dots + u_n^{(m)} + \dots \end{array}$$

составленный изъ безконечнаго числа горизонтальныхъ рядовъ $u_1+u_2+u_3+\dots$, $u_1'+u_2'+u_3'+\dots$, $u_1''+n_2''+u_3''+\dots$, и проч. и вертикальныхъ $u_1+u_1'+u_1''+\dots$, $u_2+u_2'+u_2''+\dots$, $u_3+u_3'+u_3''+\dots$ и проч. Общій членъ такого ряда будетъ $u_n^{(m)}$.

Для нѣкоторыхъ подробностей объ этомъ родѣ рядовъ, отсылаемъ читателей къ статьѣ SÉRIE нашего Лексикона, а также къ VII примѣчанію сочиненія *Г. Коши*: Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique; 1-ère Partie, *Analyse Algébrique*, 1821.

DOUBLE SIGNE. (Алг.) **ДВОЯКІЙ, ДВОЙНОЙ ЗНАКЪ.** Знакъ $\pm$ или $\mp$ (*плюсъ-минусъ* или *минусъ-плюсъ*), употребляемый во многихъ случаяхъ, и преимущественно передъ корнями чётной степени. Напримѣръ, рѣшивъ уравненіе второй степени $x^2+px+q=0$, найдемъ $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$. Подъ этимъ выраженіемъ разумѣемъ, что неизвѣстная x имѣетъ два значенія: одно, $-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, а другое, $-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$; но, для краткости, соединяемъ оба въ одну формулу, употребляя въ ней *двоякій знакъ* $\pm$. — *Cette quantité doit être affectée du double signe*; *это количество должно быть принимаемо съ двоякимъ знакомъ.* Смот. AMBIGU.

DOUBLE SIGNE (RÈGLE DU). (Алг.) **ПРАВИЛО ДВОЙНАГО ЗНАКА.** Смот. FOURIER (Analyse des équations déterminées par).

DOUBLE (POINT). (Геом.) **ДВОЙНАЯ ТОЧКА.** Точка, въ которой двѣ вѣтви кривой линіи пересѣкаются. Очевидно, что для двойной точки кривая имѣетъ *двѣ* касательныя, а для простой, только *одну*. Это самое и составляетъ отличительный признакъ двойной точки.

Вотъ примѣры: кривая, изображенная на чертежѣ 23 (Листъ IV), и опредѣляемая уравненіемъ $y^2=x^2(x+c)$, имѣетъ двойную точку въ началѣ координатъ. Равнымъ образомъ *конхоида* (черт. 17, Листъ IV) имѣетъ двойную точку въ своемъ полюсѣ, когда высота ея a болѣе параметра b. Смот. CONCHOÏDE.

Что касается до разысканія двойныхъ, и вообще кратныхъ точекъ, то отсылаемъ читателей къ статьѣ POINTS SINGULIERS.

DOUBLE CADRAN или Cadran double. (Гном.) **ДВОЙНОЙ КВАДРАНЪ.** Особеннаго устройства солнечные часы, изобрѣтенные *Угхтредомъ* (*Oughtred*). Они названы *двойными*, потому что имѣли два гномона.

DOUBLE RÉFRACTION. (Физ.) **ДВОЙНОЕ ПРЕЛОМЛЕНІЕ.** Смот. RÉFRACTION.

DOUBLÉ. (Ариѳ.) *Raison doublée*; *квадратное содержаніе.* Отношеніе между квадратами данныхъ количествъ. И такъ, *квадратное содержаніе* числа 3 къ 4, будетъ 9 : 16. Выраженіе *en raison doublée* нынѣ мало употребляется, а говорятъ преимущественно *en raison des carrés.* — *En raison sous-doublée*, или, употребительнѣе, *en raison des racines carrées*; *въ содержаніи корней квадратныхъ.* Такъ напримѣръ, *содержаніе корней квадратныхъ* изъ чиселъ 9 и 16 будетъ $\sqrt{9}:\sqrt{16}$ или 3 : 4.

DOUBLEMENT. ДВОЯКО, ВДВОЙНѢ. *Nombre doublement pair*, или, употребительнѣе, *nombre pairement pair*; *чётно-чётное число.* Число, дѣлящееся на-цѣло на 4, какъ напримѣръ 4, 12, 20 и проч. Подъ *нечётно-чётнымъ* (*nombre impairement pair*) разумѣютъ такое число, которое, по раздѣленіи на 2, даетъ въ частномъ нечётное число; таковы напримѣръ числа 2, 6, 10 и проч. — *Fonction doublement périodique* или *fonction à double période*; *двояко-періодическая функція.* Смот. PÉRIODIQUE. — Удвоеніе.

DOUBLER. УДВОИТЬ. *Doubler un cube*; *удвоить кубъ.* Смот. DUPLICATION DU CUBE.

DOUELLE. (Разр. Камн.) **ГРАНЬ, ПОВЕРХНОСТЬ КЛИНА.** Смот. VOUSSOIR.

DOUILLE. (Прикл. Мех.) **ГНѢЗДО, ПОДПЯТКА, ГЛАЗОКЪ.** Смот. CHAPE.

DOUTEUX (CAS). СОМНИТЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ. Смот. AMBIGUITÉ.

DOUZAINE. (Ариѳ.) **ДЮЖИНА.**

DOUZE. (Ариѳ.) **ДВѢНАДЦАТЬ.** — Douzième; двѣнадцатый. Un douzième; одна двѣнадцатая.

DR.

DRACONTIQUE или **DRACONITIQUE (MOIS).** (Астр.) **ДРАКОНИЧЕСКІЙ МѢСЯЦЪ.** Промежутокъ времени, равный 27.^{д}21214, протекающій между двумя послѣдовательными возвращеніями луны къ восходящему ея узлу, который прежніе астрономы называли *драконовою головою* (*caput draconis*). Драконическій мѣсяцъ почти не употребляется въ новѣйшей Астрономіи.

DRAPEAU D'ARPENTAGE. (Практ. Геом.) **ВѢХА СЪ ЦѢЛЬЮ.** Шестъ длиною отъ 8 до 10 футовъ, и болѣе, съ вкладною, а иногда неподвижною въ верхней его части жестяною доскою, имѣющею видъ прямоугольника. Чтобы можно было видѣть цѣль по возможности съ бо́льшаго разстоянія, то жестяную доску раздѣляютъ горизонтальною чертою на двѣ половины, изъ которыхъ одну покрываютъ обыкновенно бѣлою краскою, а другую, красною. — **РЕЙКА.** Смот. LEVÉE DE PLANS, NIVELLEMENT.

DROIT. (Геом.) **ПРЯМОЙ.** *Angle, cône droit*; *прямой уголъ, конусъ.* Смот. ANGLE, CONE. *Sinus droit*; *прямой синусъ* или просто *синусъ.* Въ этомъ случаѣ прилагательное *прямой* употребляется для отличенія обыкновеннаго синуса отъ *обращеннаго* (*sinus-verse*). Смот. SINUS.

DROITE. (Геом.) **ПРЯМАЯ, ПРЯМАЯ ЛИНІЯ.** Смот. COURBE. *Équation d'une droite*; *уравненіе прямой.*

Выведемъ сперва уравненіе прямой линіи, отнесенной къ двумъ пересѣкающимся координатнымъ осямъ, въ плоскости которыхъ она заключается. Пусть будетъ LK (черт. 13 Листъ VIII) эта прямая, $X'X$, $Y'Y$ координатныя оси, а O начало координатъ. Изъ точки A пересѣченія данной прямой съ осью ординатъ OY проводимъ линію AB, параллельную оси абсциссъ OX. Означимъ чрезъ α и β углы BAK, KAY, составляемые направленіемъ LK съ положительными полуосями OX, OY, а чрезъ b извѣстную длину $\overline{OA}$. Если возьмемъ какую ни есть точку M на данной прямой LK, и проведемъ MP параллельно оси OY, то длина $\overline{OP}$ изобразитъ абсциссу, а $\overline{PM}$ ординату разсматриваемой точки. Пусть будетъ $\overline{OP}=x$, $\overline{PM}=y$. Изъ треугольника AQM найдется

$$\overline{MQ}:\overline{AQ}=Sin\,\alpha:Sin\,\beta,$$

откуда

$$\overline{MQ}=\frac{Sin\,\alpha}{Sin\,\beta}\cdot\overline{AQ};$$

но $\overline{MQ}=\overline{MP}-\overline{QP}=\overline{MP}-\overline{AO}=y-b$, $\overline{AQ}=\overline{OP}=x$; слѣдовательно

$$y-b=\frac{Sin\,\alpha}{Sin\,\beta}x,$$

или

$$y=\frac{Sin\,\alpha}{Sin\,\beta}x+b. \qquad (1)$$

Вотъ уравненіе прямой линіи, отнесенной къ косоугольнымъ координатнымъ осямъ. Если положимъ, что эта прямая проходитъ чрезъ точку, опредѣляемую координатами x_0 и y_0, то получимъ

$$y_0 = \frac{Sin\,\alpha}{Sin\,\beta} x_0 + b\,;$$

вычтя это равенство изъ формулы (1), найдемъ уравненіе

$$y - y_0 = \frac{Sin\,\alpha}{Sin\,\beta}(x - x_0),$$

изъ котораго выводимъ слѣдующее:

$$\frac{x - x_0}{Sin\,\beta} = \frac{y - y_0}{Sin\,\alpha},$$

симетрическое относительно обѣихъ координатъ x и y.

Замѣтимъ, что когда прямая проходитъ чрезъ начало координатъ, то послѣднее уравненіе принимаетъ простѣйшій видъ. Дѣйствительно, въ такомъ предположеніи можно принять $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, въ слѣдствіе чего получаемъ просто

$$\frac{x}{Sin\,\beta} = \frac{y}{Sin\,\alpha} \quad \text{или} \quad y = \frac{Sin\,\alpha}{Sin\,\beta} x.$$

Положимъ теперь, что координатныя оси пересѣкаются подъ прямымъ угломъ; въ такомъ случаѣ $\alpha + \beta = 90^0$, почему $Sin\,\beta = Cos\,\alpha$, и уравненіе (1) приметъ видъ

$$y = tang\,\alpha . x + b\,;$$

положивъ для краткости $tang\,\alpha = a$, будетъ

$$y = ax + b.$$

Когда прямая проходитъ чрезъ начало координатъ, то получаемъ въ одно время $x = 0$ и $y = 0$; слѣдовательно и $b = 0$, почему $y = ax$.

Мы не будемъ останавливаться на рѣшеніи разныхъ задачъ, относящихся къ прямымъ линіямъ. Вообще, такого рода вопросы не представляютъ никакого затрудненія. Ограничимся рѣшеніемъ одной задачи, состоящей въ опредѣленіи угла, составляемаго двумя прямыми, которыя даны по ихъ уравненіямъ. Пусть будутъ

$$y = ax + b \quad \text{и} \quad y' = a'x' + b'$$

уравненія двухъ прямыхъ AB, CD (черт. 14 Листъ VIII), отнесенныхъ къ одной и той же системѣ прямоугольныхъ координатныхъ осей. Вспомнимъ теперь, что величина a изображаетъ тригонометрическій тангенсъ угла, составляемаго прямою AB съ положительною полу-осью x-овъ. То же самое можно сказать о величинѣ a', входящей въ уравненіе прямой CD. Слѣдовательно, прямыя KL и $K'L'$, проходящія чрезъ начало координатъ, и соотвѣтственно параллельныя направленіямъ AB и CD, опредѣляются уравненіями

$$y = ax \quad \text{и} \quad y' = a'x'.$$

Уголъ LOL' будетъ равенъ углу $BO'D$, подъ которымъ данныя прямыя AB и CD пересѣкаются. Означимъ этотъ уголъ чрезъ φ. Если радіусомъ Om, равнымъ единицѣ, опишемъ дугу mm', и на хорду mm' опустимъ изъ точки O перпендикуляръ Oq, то длина этого перпендикуляра изобразитъ косинусъ половины угла LOL', то есть косинусъ $\frac{1}{2}\varphi$, а mq, синусъ $\frac{1}{2}\varphi$. Сверхъ того, положивъ $Op = x$, $pm = y$, $Op' = x'$, $p'm' = y'$, получимъ изъ прямоугольныхъ треугольниковъ Omp, $Om'p'$,

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{и} \quad x'^2 + y'^2 = 1.$$

Но, изъ уравненій прямыхъ KL и $K'L'$, выводимъ

$$y^2 = a^2x^2 \quad \text{и} \quad y'^2 = a'^2x'^2\,;$$

слѣдовательно

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \quad y = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}},$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1+a'^2}}, \quad y' = \frac{a'}{\sqrt{1+a'^2}}.$$

Съ другой стороны, изъ прямоугольнаго треугольника $mm'r$ имѣемъ

$$\overline{mm'}^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2,$$

или

$$\overline{mm'}^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - 2(xx' + yy')$$
$$= 1 + 1 - 2(xx' + yy').$$

Но $\overline{mm'} = 2Sin\frac{1}{2}\varphi$, почему и получимъ

$$4Sin^2\tfrac{1}{2}\varphi = 2 - 2(xx' + yy'),$$

откуда

$$xx' + yy' = 1 - 2Sin^2\tfrac{1}{2}\varphi = Cos\,\varphi.$$

Подставляя на мѣсто x, x', y, y' выведенныя выше значенія для этихъ количествъ, найдемъ окончательно

$$Cos\,\varphi = \frac{1 + aa'}{\sqrt{1+a^2}.\sqrt{1+a'^2}}.$$

Такъ какъ a и a' изображаютъ данныя величины, то косинусъ угла φ будетъ извѣстенъ; по извѣстному же косинусу, найдемъ посредствомъ тригонометрическихъ таблицъ и самый уголъ φ.

Когда разсматриваемыя двѣ прямыя линіи взаимно перпендикулярны, то $\varphi = 90^\circ$, и $Cos\,\varphi = 0$;

слѣдовательно $1+aa'=0$, или $a'=-\frac{1}{a}$. Вотъ условіе, называемое обыкновенно *условіемъ перпендикулярности*.

Переходимъ теперь къ уравненіямъ прямой линіи, разсматриваемой въ пространствѣ. Отнесемъ данную прямую KL (черт. 15 Листъ VIII) къ тремъ прямоугольнымъ координатнымъ плоскостямъ XY, XZ, YZ, и пусть будутъ $\overline{OP}=x$, $\overline{PN}=y$, $\overline{NM}=z$ координаты какой ни есть точки M, взятой на этой прямой. Если изъ какой ни есть другой точки n линіи KL опустимъ перпендикуляръ mn на плоскость XY, и соединимъ потомъ прямою линіею точки N и n, то Nn будетъ *проэкціею* предложенной прямой на плоскости XY. Очевидно, что плоскость, перпендикулярная къ координатной XY, и проходящая чрезъ Nn, будетъ заключать прямую KL. Означимъ эту плоскость чрезъ Mn. Подобнымъ образомъ, опустивъ перпендикуляры $M\mu$ и $m\nu$ на плоскость YZ, и проведя потомъ чрезъ прямую $\mu\nu$ плоскость, перпендикулярную къ координатной YZ, увидимъ, что эта новая плоскость, которую назовемъ $M\nu$, заключаетъ предложенную прямую KL. Геометрическое мѣсто пересѣченія двухъ плоскостей Mn и $M\nu$ будетъ предложенная прямая линія KL. На этомъ основаніи можемъ заключить, что совокупность уравненій, опредѣляющихъ плоскости Mn и $M\nu$, принадлежитъ разсматриваемой прямой KL. Уравненіе первой плоскости, или, что всё равно, уравненіе ея слѣда Nn, будетъ $y=ax+b$, разумѣя подъ a тангенсъ угла PTN, составляемаго направленіемъ nN съ положительною полу-осью OX, а подъ b разстояніе точки пересѣченія прямой nN съ осью y-овъ отъ начала координатъ O. Уравненіе плоскости $M\nu$ будетъ $z=a'y+b'$, гдѣ a' и b' имѣютъ соотвѣтственно тѣ же значенія въ разсужденіи координатныхъ осей y-овъ и z-овъ. Смот. PLAN, PROJECTION. Мы употребили въ уравненіяхъ первой и второй плоскости одну и ту же перемѣнную y потому что всѣ точки прямой KL находятся въ одно время на обѣихъ плоскостяхъ, въ слѣдствіе чего координаты этихъ точекъ должны быть одинаковы для обѣихъ плоскостей Mn и $M\nu$.

И такъ, уравненія прямой KL, разсматриваемой въ пространствѣ, будутъ

$$y=ax+b \quad \text{и} \quad z=a'y+b'.$$

Если исключимъ y изъ этихъ уравненій, то получимъ

$$z=a''x+b'',$$

гдѣ $a''=aa'$, $b''=ba'+b'$. Совокупность двухъ какихъ ни есть изъ трехъ уравненій

$$(2) \qquad y=ax+b, \quad z=a'y+b', \quad z=a''x+b''$$

во всякомъ случаѣ опредѣлитъ прямую, отнесенную къ тремъ координатнымъ плоскостямъ. Отсюда можемъ заключить, что всякая прямая, отнесенная къ тремъ прямоугольнымъ координатнымъ плоскостямъ, опредѣляется посредствомъ двухъ своихъ проэкцій на двѣ какія ни есть изъ трехъ плоскостей XY, YZ, XZ.

Совокупность двухъ какихъ ни есть изъ уравненій (2) можно замѣнить двойнымъ равенствомъ, симетрическимъ относительно всѣхъ трехъ координатъ x, y, z. Для этого изобразимъ чрезъ x_0, y_0, z_0 координаты какой ни есть опредѣленной точки разсматриваемой прямой, напримѣръ, точки m (черт. 15), а чрезъ α, β, γ углы, составляемые направленіемъ KL, или, что всё равно, линіею OS, параллельною KL, съ тремя положительными полу-осями OX, OY, OZ. Сверхъ того, пусть будетъ r длина $\overline{mM}$. Проэкція линіи $\overline{mM}$ на ось OX будетъ длина $\overline{pP}$, которая, какъ извѣстно изъ Тригонометріи, равна $r\,Cos\,\alpha$; съ другой стороны $\overline{pP}=x-x_0$, почему $r\,Cos\,\alpha=x-x_0$. Точно такимъ образомъ найдемъ $r\,Cos\,\beta=y-y_0$ и $r\,Cos\,\gamma=z-z_0$. Изъ этихъ равенствъ получимъ $r=\frac{x-x_0}{Cos\,\alpha}$, $r=\frac{y-y_0}{Cos\,\beta}$, $r=\frac{z-z_0}{Cos\,\gamma}$. Слѣдовательно

$$\frac{x-x_0}{Cos\,\alpha}=\frac{y-y_0}{Cos\,\beta}=\frac{z-z_0}{Cos\,\gamma}.$$

Это двойное равенство опредѣляетъ прямую линію, отнесенную къ тремъ прямоугольнымъ координатнымъ плоскостямъ.

Разсматриваніе одной или нѣсколькихъ прямыхъ въ пространствѣ приводитъ къ многимъ вопросамъ, которые легко рѣшаются посредствомъ уравненій сихъ прямыхъ. Приведемъ рѣшеніе одной задачи, состоящей въ опредѣленіи условія, которое должно удовлетворяться, чтобы двѣ прямыя, данныя по ихъ уравненіямъ, пересѣкались, или, что всё равно, находились въ одной плоскости. Пусть будутъ

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x-x_0}{Cos\,\alpha_0}=\dfrac{y-y_0}{Cos\,\beta_0}=\dfrac{z-z_0}{Cos\,\gamma_0} \\ \dfrac{X-x_1}{Cos\,\alpha_1}=\dfrac{Y-y_1}{Cos\,\beta_1}=\dfrac{Z-z_1}{Cos\,\gamma_1} \end{array} \right.$$

уравненія данныхъ двухъ прямыхъ. Если онѣ пересѣкаются, то для точки взаимнаго ихъ пересѣченія будетъ $X=x$, $Y=y$, $Z=z$. Въ этомъ предположеніи, изобразивъ чрезъ r_0 каждую изъ трехъ первыхъ дробей, а чрезъ r_1 каждую изъ трехъ вторыхъ, получимъ

$$x=x_0+r_0 Cos\,\alpha_0,\ y=y_0+r_0 Cos\,\beta_0,\ z=z_0+r_0 Cos\,\gamma_0$$
$$x=x_1+r_1 Cos\,\alpha_1,\ y=y_1+r_1 Cos\,\beta_1,\ z=z_1+r_1 Cos\,\gamma_1;$$

слѣдовательно

$$x_1-x_0=r_1 Cos\,\alpha_1-r_0 Cos\,\alpha_0$$
$$y_1-y_0=r_1 Cos\,\beta_1-r_0 Cos\,\beta_0$$
$$z_1-z_0=r_1 Cos\,\gamma_1-r_0 Cos\,\gamma_0.$$

Если помножимъ первое уравненіе на λ, второе на μ, третье на ν, и сложимъ, то получимъ

$$\lambda(x_1-x_0)+\mu(y_1-y_0)+\nu(z_1-z_0)= r_1(\lambda Cos\,\alpha_1+\mu Cos\,\beta_1+\nu Cos\,\gamma_1) -r_0(\lambda Cos\,\alpha_0+\mu Cos\,\beta_0+\nu Cos\,\gamma_0).$$

Опредѣлимъ теперь λ, μ, ν такъ, чтобы

$$\lambda Cos\,\alpha_0+\mu Cos\,\beta_0+\nu Cos\,\gamma_0=0$$
$$\lambda Cos\,\alpha_1+\mu Cos\,\beta_1+\nu Cos\,\gamma_1=0;$$

найдется двойное равенство

$$\frac{\lambda}{Cos\,\beta_0 Cos\,\gamma_1-Cos\,\gamma_0 Cos\,\beta_1}=\frac{\mu}{Cos\,\gamma_0 Cos\,\alpha_1-Cos\,\alpha_0 Cos\,\gamma_1} =\frac{\nu}{Cos\,\alpha_0 Cos\,\beta_1-Cos\,\beta_0 Cos\,\alpha_1},$$

въ слѣдствіе котораго, уравненіе

$$\lambda(x_1-x_0)+\mu(y_1-y_0)+\nu(z_1-z_0)=0$$

приметъ видъ

$$(4)\quad \left\{ \begin{array}{l} (x_1-x_0)(Cos\,\beta_0 Cos\,\gamma_1-Cos\,\gamma_0 Cos\,\beta_1) \\ +(y_1-y_0)(Cos\,\gamma_0 Cos\,\alpha_1-Cos\,\alpha_0 Cos\,\gamma_1) \\ +(z_1-z_0)(Cos\,\alpha_0 Cos\,\beta_1-Cos\,\beta_0 Cos\,\alpha_1) \end{array} \right\}=0.$$

Вотъ уравненіе, которое должно удовлетворяться, чтобы разсматриваемыя двѣ прямыя пересѣкались. Впрочемъ, необходимо замѣтить, что оно удовлетворяется и въ томъ случаѣ, когда прямыя параллельны между собою, ибо, въ этомъ предположеніи, найдется

$$Cos\,\beta_0 Cos\,\gamma_1-Cos\,\gamma_0 Cos\,\beta_1=0$$
$$Cos\,\gamma_0 Cos\,\alpha_1-Cos\,\alpha_0 Cos\,\gamma_1=0$$
$$Cos\,\alpha_0 Cos\,\beta_1-Cos\,\beta_0 Cos\,\alpha_1=0.$$

Два какія ни есть изъ сихъ трехъ уравненій выражаютъ условіе *параллельности* двухъ разсматриваемыхъ прямыхъ. Легко удостовѣриться, что третье уравненіе есть слѣдствіе двухъ остальныхъ.

Когда, вмѣсто формулъ (3), употребимъ уравн. (2) для изображенія двухъ прямыхъ, то получимъ

для первой прямой: $x=az+b$, $y=a'z+b'$

для второй прямой: $x=Az+B$, $y=A'z+B'$.

Исключая x, y, z изъ сихъ четырехъ уравненій, найдется условіе

$$(A-a)(B'-b')=(A'-a')(B-b),$$

равнозначущее съ (4), но представляющееся въ простѣйшемъ видѣ.

DROITE. (Мех.) **ПРЯМАЯ. — ПРУТЪ.** *Droite flexible*, *rigide*, *extensible*, *inextensible* и проч. *Гибкая*, *твердая*, *растяжимая*, *нерастяжимая прямая*. Смот. FLEXIBLE, RIGIDE, EXTENSIBLE, INEXTENSIBLE и проч.

DU.

DUCTIBILITÉ или **DUCTILITÉ, MALLÉABILITÉ.** (Физ.) **ТЯГУЧЕСТЬ, КОВКОСТЬ.** Способность нѣкоторыхъ тѣлъ, и въ особенности металловъ, тянуться въ проволоку и превращаться въ тонкіе листы отъ дѣйствія сильнаго давленія или ударовъ молота. Первое свойство преимущественно называется *ductilité* (*тягучесть*), а второе, *malléabilité* (*ковкость*). Степень тягучести и ковкости различныхъ металловъ опредѣляется тонкостію получаемыхъ изъ нихъ проволокъ и листовъ. Впрочемъ, должно замѣтить, что способность одного и того же металла тянуться въ проволоку и коваться въ листъ не всегда одинакова; напримѣръ, желѣзо тянется въ весьма тонкую проволоку, а не можетъ быть превращено въ такой же по соразмѣрности тонкій листъ.

DUCTIBLE или **DUCTILE, MALLÉABLE. ТЯГУЧІЙ, КОВКІЙ.** Смот. выше.

DUODÉCADIQUE или **DUODÉCIMAL.** (Ариѳ.) **ДВѢНАДЦАТЕРИЧНЫЙ.** *Système duodécimal*; *двѣнадцатеричная система*. *Progression duodécimale*; *двѣнадцатеричная прогрессія*, то есть, геометрическая прогрессія

$1,\ 12,\ 12^2,\ 12^3,\ 12^4$ и проч.

Arithmétique duodécimale. Двѣнадцатеричная, двѣнадцатицифренная, двѣнадцатизначная Ариѳметика. Ариѳметическая система счисленія, въ которой упо-

*

требляютъ двѣнадцать знаковъ. Основаніемъ двѣнадцатеричной Ариѳметики служитъ геометрическая прогрессія

$1,\ 12,\ 12^2 = 144,\ 12^3 = 1728,\ 12^4 = 20736$, и проч.

такъ что 1 на второмъ мѣстѣ (считая отъ правой руки къ лѣвой) изображаетъ *двѣнадцать*, на третьемъ, *сто сорокъ четыре*, на четвертомъ, *тысячу семь сотъ двадцать восемь*, и такъ далѣе.

Для изображенія первыхъ девяти чиселъ по двѣнадцатеричной системѣ, можно удержать цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Но для означенія *десяти* и *одинадцати* должно ввести особенные знаки; пусть *десять* $= a$, *одинадцать* $= b$. Сверхъ того, сохранимъ знакъ 0 (нуль), который, какъ и въ десятичной Ариѳметикѣ, будемъ употреблять для означенія отсутствія единицъ различныхъ разрядовъ. При такихъ условіяхъ, послѣдовательныя числа изобразятся по двѣнадцатеричной системѣ слѣдующимъ образомъ:

По двѣнадцатеричной системѣ		По десятичной системѣ	По двѣнадцатеричной системѣ		По десятичной системѣ
1	=	1	1a	=	22
2	=	2	1b	=	23
3	=	3	20	=	24
.....			....		
9	=	9	26	=	30
a	=	10	....		
b	=	11	42	=	50
10	=	12	....		
11	=	13	84	=	100
12	=	14	100	=	144
....			6b4	=	1000
18	=	20	1000	=	1728
19	=	21	и проч.		

Что касается до перехода отъ десятичной системы къ двѣнадцатеричной, то этотъ вопросъ рѣшается точно такъ, какъ объяснено въ статьѣ BINAIRE (ARITHMÉTIQUE) для *діадической системы.* Только, въ настоящемъ случаѣ, вмѣсто дѣлителя 2, слѣдуетъ употребить число *двѣнадцать*, и, при полученіи остатка, равнаго *десяти* или *одинадцати*, писать a или b. Для перехода же отъ двѣнадцатеричной системы къ десятичной, надобно предварительно составить таблицу послѣдовательныхъ степеней числа 12; потомъ уже, чрезъ простое сложеніе, получаемъ число, которое имѣли въ виду выразить по десятичной системѣ.

Замѣтимъ, что основаніе двѣнадцатицифренной системы, то есть число *двѣнадцать*, имѣетъ четыре дѣлителя 2, 3, 4 и 6, между тѣмъ какъ основаніе общепринятаго счисленія, именно число *десять*, разлагается только на два множителя 2 и 5. Въ этомъ отношеніи двѣнадцатеричная система имѣетъ часто преимущество передъ десятичною. Такъ напримѣръ дуги $35^0\ 15'\ 25''$, $46^0\ 10'\ 50''$, выражающіяся по десятичной системѣ безконечными десятичными дробями........ $35^0,2569444...$ и $46^0,1805555....$ изобразятся конечными двѣнадцатеричными дробями $26^0,31$ и $3a^0,22$, которыя проще первыхъ.

Въ заключеніе приводимъ по одному примѣру первыхъ четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій по системѣ двѣнадцатеричной.

Примѣръ сложенія:

$$\begin{array}{r} a123574ab \\ 6787787a \\ 123567a1 \\ ba5ab1a2 \\ 178bab1 \\ \hline b90528a21 \end{array}$$

Примѣръ вычитанія:

$$\begin{array}{r} 1400b5a63 \\ 9ab0639a \\ \hline 611ab685 \end{array}$$

Примѣръ умноженія:

$$\begin{array}{r} 73a0b6a \\ 8a3b \\ \hline 6862a732 \\ 19b62a86 \\ 61249784 \\ 4a687868 \\ \hline 54a38681792 \end{array}$$

Примѣръ дѣленія:

$$\begin{array}{r|l} 72b930a8b & 36a70b \\ \cline{2-2} 71921a & 2041 \\ \cline{1-1} 12712a8 & \\ 1236438 & \\ \cline{1-1} 36a70b & \\ 36a70b & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

DUODÉCUPLE и
DUODÉNAIRE. ДВѢНАДЦАТЕРИЧНЫЙ. Смот. DUODÉCIMAL.

DUPLICATION. (Ариѳ. и Геом.) **УДВОЕНІЕ.** Дѣйствіе, посредствомъ котораго удвояемъ, то есть помножаемъ на 2 какую нибудь величину.

DUPLICATION DU CUBE (PROBLÊME DE LA) или PROBLÊME DÉLIAQUE. **ЗАДАЧА ОБЪ УДВОЕНІИ КУБА** или Делійская задача состоитъ въ опредѣленіи стороны такого куба, который, по объёму своему, былъ бы вдвое болѣе другаго, даннаго куба.

По преданіямъ древней Греческой Миѳологіи, задача объ удвоеніи куба получила свое происхожденіе по поводу слѣдующаго случая: чума опустошала Аттику; бѣдствующіе Аѳиняне послали на островъ Делосъ вопросить оракула о мѣрахъ, которыя надлежало имъ принять для прекращенія моровой заразы. Прорицатель отвѣчалъ, что для этого они должны *удвоить алтарь* храма, посвященнаго Аполлону въ Аѳинахъ; алтарь, на который указывалъ оракулъ, былъ правильнаго кубическаго вида. Требованіе показалось маловажнымъ: но нѣсколько неудачныхъ попытокъ вскорѣ удостовѣрили Аѳинянъ, что рѣшеніе предложенной имъ задачи не такъ просто, какъ они сначала полагали. Въ недоумѣніи, они обратились къ Греческимъ геометрамъ, въ числѣ которыхъ былъ Платонъ, знаменитѣйшій изъ нихъ. По этому баснословному преданію, о которомъ повѣствуетъ одинъ древній писатель, *Филоппонъ* (*Philopponus*), задача объ удвоеніи куба получила свое происхожденіе за IV вѣка до Р. Х. на островѣ Делосѣ, и вотъ почему она и теперь часто называется *Делійскою*.

Эратосѳенъ приводитъ другое обстоятельство, по поводу котораго будто-бы возникъ вопросъ объ удвоеніи куба. Онъ разсказываетъ, что какой-то трагикъ ввелъ на сцену Царя Миноса, воздвигающаго надгробный памятникъ сыну своему Главку. Монументъ былъ кубическаго вида, и имѣлъ сто пальмъ во всѣ стороны. Размѣры памятника показались Миносу слишкомъ незначительными, и онъ велѣлъ удвоить его. Этотъ вопросъ былъ предложенъ всѣмъ геометрамъ того времени, и ни одинъ изъ нихъ не могъ найти его рѣшенія.

Каково бы ни было происхожденіе Делійской задачи, но можно сказать утвердительно, что она относится къ временамъ весьма отдаленнымъ. Древніе пытались рѣшить сей вопросъ *геометрически*, то есть, помощію линейки и циркуля, или, что всё равно, употребляя только прямую линію и кругъ. Но съ этой стороны всѣ ихъ усилія остались безплодными, что и весьма естественно, ибо рѣшеніе Делійской задачи приводитъ къ построенію кубичнаго корня, которое не можетъ быть произведено посредствомъ прямыхъ и круговыхъ линій, опредѣляющихъ пересѣченіемъ своимъ только корни квадратныхъ уравненій. Однакожъ, несмотря на признанную невозможность *геометрическаго* рѣшенія, есть еще и теперь мечтатели-математики, которые не теряютъ надежды найти это рѣшеніе. —

Сколько извѣстно, *Гиппократъ Хіосскій*, жившій около середины V вѣка до Р. Х., первый занимался Делійскою задачею. Онъ показалъ, что ея рѣшеніе приводится къ построенію двухъ среднихъ геометрическихъ между стороною даннаго куба и тою же стороною удвоенною. И такъ, если положимъ, что сторона даннаго куба равна a, и изобразимъ чрезъ x и y искомыя двѣ среднія, то получимъ двѣ пропорціи...... $a:x=x:y$ и $x:y=y:2a$, изъ которыхъ выведемъ $x^4=2a^3x$ или $x=\sqrt[3]{2a^3}$. Слѣдовательно, первая изъ двухъ среднихъ пропорціональныхъ будетъ искомая сторона удвоеннаго куба.

Вскорѣ послѣ Гиппократа, эта задача обратила на себя особенное вниманіе Греческихъ геометровъ. *Платонъ* изобрѣлъ особаго рода инструментъ для построенія двухъ среднихъ геометрическихъ, и слѣдовательно рѣшилъ *механически* Делійскую задачу. *Архитъ*, другъ Платона, *Евдокій*, *Менехмъ* и другіе геометры того времени, предложили свои рѣшенія, вообще основанныя на построеніи коническихъ и другихъ кривыхъ. Одинъ изъ способовъ Менехма, состоящій въ употребленіи двухъ параболъ, объясненъ въ нашемъ Лексиконѣ въ статьѣ: CONSTRUCTION DES ÉQUATIONS, къ которой и отсылаемъ читателей. Другой, его же, основанъ на построеніи обыкновенной параболы и равносторонней иперболы, отнесенной къ своимъ ассимптотамъ. Параметръ параболы равенъ сторонѣ даннаго куба; вершина ея совпадаетъ съ центромъ иперболы, а ось, съ одною изъ ассимптотъ. Степень иперболы опредѣляется произведеніемъ стороны даннаго куба на ту же удвоенную сторону. Легко показать, что ордината точки пересѣченія разсматриваемыхъ двухъ кривыхъ, изобразитъ сторону удвоеннаго куба. Дѣйствительно, если означимъ чрезъ a сторону даннаго куба, то уравненіе параболы будетъ $y^2 = ax$, а иперболы $xy = 2a^2$; исключая x, найдемъ $y^3 = 2a^3$ или $y = \sqrt[3]{2a^3}$.

Послѣ Платона и современныхъ ему геометровъ, задача объ удвоеніи куба часто была предметомъ болѣе или менѣе удачныхъ попытокъ. *Никомедъ* (въ III столѣтіи до Р. Х.) изобрѣлъ *конхоиду* (Смот. CONCHOÏDE), посредствомъ которой легко могутъ быть построены корни уравненій 3-ей и 4-ой степени. *Эратосѳену*, жившему около того же времени, приписываютъ изобрѣтеніе инструмента, извѣстнаго подъ названіемъ *мезолабіи* (Смот. MÉSOLABE), и посредствомъ котораго рѣшалась *механически* задача объ удвоеніи куба. Знаменитый *Аполлоній*, жившій за два столѣтія до Р. Х., рѣшилъ Делійскую задачу посредствомъ пересѣченія круга съ иперболою. *Геронъ Александрійскій* (въ серединѣ II вѣка до Р. Х.), *Филонъ* и нѣкоторые другіе геометры, жившіе до Р. Х., предложили также свои рѣшенія. Александрійскій геометръ *Паппъ* (*Pappus*) (въ V вѣкѣ по Р. Х.), въ извѣстномъ сочиненіи своемъ *Alexandrini Collectiones mathematicae*, предложилъ остроумный способъ для построенія двухъ среднихъ пропорціональныхъ. Впослѣдствіи *Діоклъ*, Греческій же геометръ, изобрѣтеніемъ *циссоиды* усовершенствовалъ способъ *Паппа*. Въ статьѣ CISSOÏDE нашего Лексикона читатели найдутъ рѣшеніе Делійской задачи посредствомъ циссоиды. Наконецъ скажемъ, что многіе математики послѣднихъ столѣтій занимались также этимъ вопросомъ. Знаменитый *Декартъ*, создавъ Аналитическую Геометрію, приложилъ свой анализъ и къ Делійской задачѣ: предложенныя имъ рѣшенія приводятъ къ опредѣленію пересѣченій круга съ одною изъ коническихъ кривыхъ.

Въ заключеніе приведемъ весьма простое построеніе двухъ среднихъ геометрическихъ между двумя данными линіями. Предлагаемое рѣшеніе, требующее только описанія круга и обыкновенной параболы, заключаетъ въ себѣ какъ частный случай задачу объ удвоеніи куба.

Пусть будутъ a и b (черт. 16 Листъ VIII) данныя двѣ линіи; проведемъ прямоугольныя координатныя оси OX, OY, и отъ точки O отложимъ линію $\overline{OA} = \frac{1}{2}a$; потомъ возставивъ изъ A перпендикуляръ $\overline{AC}$, равный $\frac{1}{2}b$, принимаемъ C за центръ, изъ котораго радіусомъ....... $\overline{CO} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ описываемъ кругъ $ODEFG$. Далѣе, строимъ обыкновенную полу-параболу OKL такъ, чтобы вершина ея совпадала съ началомъ координатъ O, а ось, съ осью обсциссъ OX; параметръ параболы беремъ равнымъ данной прямой a. Въ этомъ предположеніи, координаты точки пересѣченія M круга съ параболою, изобразятъ искомыя двѣ среднія пропорціональныя, именно: ордината $\overline{PM}$ будетъ равняться первой средней пропорціональной $\sqrt[3]{a^2b}$, а абсцисса $\overline{OP}$ — второй $\sqrt[3]{ab^2}$. Дѣйствительно, уравненіе разсматриваемаго круга будетъ

$$(x-\tfrac{1}{2}a)^2+(y-\tfrac{1}{2}b)^2 = (\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2})^2,$$

или

$$x^2-ax+y^2-by=0;$$

что касается до параболы, то она, какъ извѣстно, опредѣляется уравненіемъ

$$y^2 = ax.$$

Исключая y изъ этихъ двухъ уравненій, получимъ для координатъ точки пересѣченія M

$$x = \overline{OP} = \sqrt[3]{ab^2} \quad \text{и} \quad y = \overline{PM} = \sqrt[3]{a^2b},$$

что и имѣли въ виду доказать.

Для рѣшенія Делійской задачи положимъ, что сторона даннаго куба $= a$. Если примемъ $b = 2a$, то ордината $\overline{PM}$ изобразитъ сторону искомаго куба, ибо въ этомъ предположеніи найдется

$$\overline{PM} = \sqrt[3]{a^2.2a} = \sqrt[3]{2a^3}.$$

Нѣтъ сомнѣнія, что самый точный способъ для графическаго рѣшенія задачи объ удвоеніи куба состоитъ въ ариѳметическомъ опредѣленіи кубичнаго корня изъ 2; можно произвести это извлеченіе съ какою угодно точностію. Такъ, напримѣръ, найдя что $\sqrt[3]{2}=1,2599\ldots$, стоитъ только къ сторонѣ a даннаго куба прибавить $0,2599\ldots$ часть отъ a, что легко можетъ быть сдѣлано посредствомъ десятичнаго масштаба; найденная такимъ образомъ линія изобразитъ сторону удвоеннаго куба. —

Для дальнѣйшихъ подробностей объ Делійской задачѣ отсылаемъ читателей къ 1-му тому *Histoire des Mathématiques par Montucla* и преимущественно къ сочиненію того же автора: *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle etc. avec une addition concernant les problêmes de la duplication du cube et de la trisection de l'angle.*

DUPLICITÉ D'IMAGES. (Опт.) **ДВОЙСТВЕННОСТЬ ИЗОБРАЖЕНІЯ.** *Ce verre cause une duplicité d'objets*; *это стекло показываетъ предметы вдвойнѣ.*

DURÉE. (Мех.) **ПРОДОЛЖЕНІЕ, ВРЕМЯ.** *Pendant la durée du mouvement*; *въ продолженіе движенія. Durée de l'oscillation d'un pendule*; *время качанія, размаха маятника.*

DURETÉ. ЖЕСТКОСТЬ. Смот. ниже.

DURS (CORPS). (Физ.) **ЖЕСТКІЯ ТѢЛА.** Свойство твердаго тѣла, изъявляющаго сопротивленіе къ перемѣщенію своихъ составныхъ частицъ, называется *жесткостію.* Жесткія тѣла одарены способностію чертить и полировать другія, более мягкія тѣла. Изъ всѣхъ извѣстныхъ тѣлъ самое жесткое есть *алмазъ.*

DY.

DYADIQUE или **BINAIRE. ДІАДИЧЕСКІЙ.** Смот. BINAIRE (ARITHMÉTIQUE).

DYNAME. (Прикл. Мех.) **ДИНАМА.** Терминъ, предложенный нѣкоторыми авторами, занимавшимися Прикладною Механикою, и подъ которымъ они разумѣли единицу количества непрерывнаго дѣйствія. За динаму принимали *вѣсъ 100 килограммовъ, поднятый на высоту одного метра въ одну секунду времени.* Смот. MACHINE.

DYNAMÈTRE или DYNAMOMÈTRE. По Нѣмецки Dynameter. **ДИНАМЕТРЪ,** динамометръ. Оптическій инструментъ. Смот. DYNAMOMÈTRE.

DYNAMIE или **UNITÉ DYNAMIQUE.** (Прикл. Мех.) **ДИНАМІЯ, ДИНАМИЧЕСКАЯ ЕДИНИЦА.** Подъ этимъ наименованіемъ нѣкоторые авторы разумѣютъ единицу количества производимой работы. Такъ какъ величина, называемая въ Прикладной Механикѣ *работою* или *дѣйствіемъ* опредѣляется произведеніемъ нѣкотораго вѣса на опредѣленную длину, то эту величину и выражаютъ въ частяхъ извѣстныхъ единицъ, напримѣръ килограммовъ и метровъ. Для удобности при измѣреніи количествъ дѣйствія условились принять особенную единицу, которую назвали *динаміею*; она выражается *вѣсомъ 1000 килограммовъ, поднятымъ на высоту одного метра.* Этой самой единицѣ *Г. Коріолисъ**) предлагаетъ дать названіе *динамоды* (*dynamode*), более свойственное потому, что Греческая этимологія этого слова заключаетъ въ себѣ понятія о силѣ и о пространствѣ. — При измѣреніи малыхъ количествъ дѣйствія употребляютъ нынѣ во Франціи вмѣсто динамоды другую единицу, названную *килограмметромъ* (*kilogrammètre*). Килограмметръ составляетъ тысячную часть динамоды, и слѣдовательно равенъ *вѣсу одного килограмма, поднятому на высоту одного метра.*

DYNAMIQUE. ДИНАМИКА, СИЛОУЧЕНІЕ. Отъ Греческ. *δύναμις, сила, могущество.* Наука, занимающаяся законами дѣйствія силъ на какую ни есть систему въ предположеніи что разсматриваемыя силы не уничтожаются взаимно, а производятъ движеніе. Лейбницъ употребилъ первый наименованіе *Динамики*, разумѣя подъ этимъ терминомъ науку о движеніи.

§ 1. Динамика, въ ряду наукъ математическихъ, должна занять мѣсто возлѣ Геометріи, ибо она заимствуется началами и Чистаго Анализа, и Геометріи. Въ наукѣ о движеніи допускаютъ существованіе пространства, вещества и времени, несмотря на возраженія, которымъ бытіе сихъ трехъ элементовъ подвергалось со стороны философовъ. Динамика, не входя въ разбирательство сихъ возраженій, предоставляетъ этотъ трудъ Метафизикѣ, и довольствуется одними указаніями чувствъ и здраваго разсудка. Невозможно сдѣлать опредѣленія пространству, веществу и времени: понятія о нихъ принадлежатъ къ числу первоначальныхъ, и слѣдователь-

*) *Du calcul de l'effet des machines*, par Coriolis. Paris 1829 г. стр. 33.

по не могутъ быть приведены къ простѣйшимъ.

Непосредственное наблюденіе показываетъ, что отдѣльныя части вещества, называемыя *тѣлами*, перемѣняютъ свое положеніе однѣ въ разсужденіи другихъ. Такъ какъ понятіе о взаимномъ положеніи тѣлъ есть чисто геометрическое, то и понятіе о перемѣнѣ положенія не можетъ представлять ничего тёмнаго нашему уму. Положеніе измѣняется, когда опредѣляющія его данныя измѣняются сами; напротивъ того, оно не перемѣняется, когда данныя остаются однѣ и тѣ же. Если тѣло A перемѣняетъ свое положеніе въ разсужденіи другаго тѣла B, то говоримъ, что первое движется въ отношеніи ко второму; напротивъ того, если A не перемѣняетъ своего положенія въ разсужденіи B, то говоримъ, что A находится въ покоѣ относительно B. И такъ, понятія о движеніи и о покоѣ, какъ зависящія отъ идеи, которую мы составляемъ себѣ о взаимномъ положеніи тѣлъ, должны быть вразумительны для насъ. Покой и движеніе нельзя назвать свойствами тѣлъ: они скорѣе означаютъ взаимныя соотношенія сихъ послѣднихъ. Нельзя также сказать, чтобы эти два состоянія были противоположны одно другому, ибо очень можетъ случиться, что тѣло перемѣняетъ свое положеніе въ разсужденіи другаго тѣла, а не перемѣняетъ въ отношеніи къ третьему. Въ такомъ случаѣ разсматриваемое тѣло будетъ въ одно время и въ движеніи и въ покоѣ.

§ 2. Древніе имѣли самыя ограниченныя понятія о законахъ движенія: по всей вѣроятности имъ были извѣстны только общія свойства равномѣрнаго движенія. Динамика, какъ ученіе самостоятельное, есть созданіе новѣйшихъ временъ. Знаменитый Флорентинецъ *Галилей* положилъ первыя основанія сей науки въ сочиненіи своемъ: *Discorsi e dimostrazioni mathematiche intorno a due nuove scienze*, изданномъ въ первый разъ въ Лейденѣ 1638 года. Онъ нашелъ законъ ускоренія свободно падающихъ тяжелыхъ тѣлъ, и распространилъ его на движеніе по наклонной плоскости. Это былъ первый, и, можно сказать, самый важный шагъ въ Динамикѣ. Онъ же усмотрѣлъ начало самодѣйственности, и первый употребилъ въ Механикѣ правило совокупленія скоростей, приложивъ его къ опредѣленію законовъ параболическаго движенія брошенныхъ тѣлъ. Свойство маятника, по которому этотъ приборъ можетъ быть употребленъ для измѣренія времени, замѣчено также Галилеемъ; См. CHUTE DES GRAVES, BALISTIQUE, PENDULE. *Торричелли*, ученикъ его, тщательно изучившій открытія своего наставника, напечаталъ въ 1644 году книгу: *De motu gravium naturaliter accelerato*, въ которой заключаются примѣчательныя изслѣдованія о паденіи тяжелыхъ тѣлъ и новыя предложенія о параболическомъ ихъ движеніи. Изъ числа любопытныхъ истинъ, выведенныхъ имъ, приведемъ слѣдующее свойство: если изъ опредѣленной точки, но подъ разными наклоненіями относительно горизонта, будутъ брошены тѣла съ одинаковыми начальными скоростями, направленія которыхъ заключаются въ одной вертикальной плоскости, то кривая, обертывающая всѣ параболы, описанныя тѣлами, будетъ также парабола. Вершина обертывающей параболы будетъ находиться на вертикальной линіи, проходящей чрезъ точку метанія, а фокусъ совпадетъ съ этою точкою; длина параметра опредѣлится удвоивъ вертикальную высоту, на которую поднимется тѣло, когда ему сообщена будетъ начальная скорость, общая всѣмъ бросаемымъ тѣламъ.

Около того же времени знаменитый Французскій философъ *Декартъ* и Англійскій геометръ *Валлисъ* предложили свои умозрѣнія о Динамикѣ. Но въ этомъ отношеніи труды Декарта были вообще неудовлетворительны. Его теорія соударенія тѣлъ, которою онъ въ особенности занимался, была основана на началѣ ошибочномъ. Валлисъ первый предложилъ истинныя понятія о сообщеніи движенія при соудареніи тѣлъ.

Гугенсъ, родившійся въ 1626 а умершій въ 1695 году, усовершенствовалъ всѣ открытія Галилея въ Динамикѣ, и значительно обогатилъ эту науку собственными трудами. Онъ предложилъ теорію движенія маятника и вообще тяжелыхъ тѣлъ по даннымъ кривымъ. Основываясь на своей теоріи, онъ доказалъ примѣчательное свойство *тавтохронизма* циклоиды; Смот. CYCLOIDE, TAUTOCHRONISME. Онъ же первый рѣшилъ извѣстный вопросъ о *центрѣ качанія*; Смот. PENDULE COMPOSÉ.

Но самая важная заслуга Гугенса въ наукѣ о движеніи есть, безъ сомнѣнія, его теорія центральныхъ силъ, разсматриваемыхъ въ кругѣ. Это открытіе напечатано въ его сочиненіи *Horologium oscillatorium*, изданномъ въ 1673 году.

Совокупленіе теоріи центральныхъ силъ въ кругѣ съ теоріею эволютъ, придуманною также Гугенсомъ, легко могло привести къ общему закону центральныхъ силъ, разсматриваемыхъ при движеніи по какимъ ни есть кривымъ. Но это обобщеніе ускользнуло отъ проницательности Гугенса, а впослѣдствіи было усмотрѣно *Нютономъ*. Сей великій геометръ, въ сочиненіи своемъ *Philosophiae naturalis principia mathematica*, предложилъ рѣшеніе множества динамическихъ задачъ, относящихся преимущественно къ движенію небесныхъ тѣлъ. Самое важное ученіе, изложенное Нютономъ въ его *Началахъ*, есть теорія всеобщаго тяготѣнія, выведенная на основаніи трехъ законовъ, найденныхъ въ началѣ XVII вѣка *Кеплеромъ* посредствомъ наблюденій. Смот. ATTRACTION, KEPLER (LOIS DE). Появленіе безсмертнаго творенія Нютона составляетъ блистательнѣйшую эпоху какъ въ лѣтописяхъ Чистой Математики, такъ и Динамики.

Съ конца XVII столѣтія наука о движеніи сдѣлалась постояннымъ предметомъ занятій для всѣхъ первостепенныхъ геометровъ. Трудами *Лейбница*, братьевъ *Бернулли*, маркиза *де Л'Опиталь*, *Германа*, *Маклорена*, *Даніила Бернулли*, *Эйлера*, *Клеро*, *Д'Аламберта*, *Лагранжа*, *Лапласа*, *Остроградскаго*, Динамика, можно сказать, достигла теперь степени точной науки, дальнѣйшіе успѣхи которой зависятъ только отъ усовершенствованія математическаго анализа.

Мы умалчиваемъ объ ея ходѣ въ концѣ XVII и въ продолженіи первой трети XVIII столѣтія; въ этотъ промежутокъ времени она постепенно обогащалась отдѣльными теоріями, но не составляла еще цѣлаго, самостоятельнаго ученія. Математики, рѣшеніемъ многочисленныхъ динамическихъ задачъ, заготовляли обильный запасъ для новыхъ дѣлателей. Читатели найдутъ во многихъ статьяхъ нашего Лексикона историческія подробности и рѣшеніе разныхъ динамическихъ задачъ. Смот. ATTRACTION, CAPILLAIRE (ACTION), COEXISTANCE DES PETITES OSCILLATIONS, CHOC, CORPS (PROBLÈME DES TROIS), FORCE, HYDRODYNAMIQUE, INERTIE, PENDULE, ROTATION, и проч. и проч.

Приводимъ въ короткихъ словахъ труды Эйлера, Д'Аламберта, Лагранжа, Лапласа и Остроградскаго, поставившіе Динамику на ту степень совершенства, которой эта наука достигла въ наше время.

§ 3. Эйлеръ обогатилъ послѣдовательно всѣ части Динамики. Сверхъ огромнаго числа Разсужденій, напечатанныхъ имъ въ *Комментаріяхъ Петербургской Академіи* и въ *Берлинскихъ Запискахъ*, онъ издалъ два отдѣльныя сочиненія, въ которыхъ изложилъ рѣшеніе важнѣйшихъ динамическихъ вопросовъ. Первый трактатъ его*) содержитъ въ себѣ полную теорію движенія матеріальной точки; онъ въ особенности примѣчателенъ по множеству помѣщенныхъ въ немъ частныхъ примѣровъ. Во второмъ трактатѣ**) разсматривается движеніе твердаго тѣла. Ясность изложенія и особенная легкость способовъ ставятъ это сочиненіе на ряду съ самыми примѣчательными изъ твореній, которыми Эйлеръ обогатилъ всѣ отрасли математическихъ наукъ.

§ 4. Въ 1743 году вышла въ свѣтъ Динамика Д'Аламберта***). Появленіе этого сочиненія безъ сомнѣнія имѣло счастливое вліяніе на успѣхи Динамики. Д'Аламбертъ, въ своемъ трактатѣ, предложилъ общій способъ для приведенія въ уравненіе всякой динамической задачи, или, правильнѣе, показалъ какимъ образомъ посредствомъ особеннаго правила, рѣшеніе всякаго вопроса о движеніи можетъ быть приведено къ вопросу о равновѣсіи. Авторъ приложилъ свое правило, къ рѣшенію многихъ динамическихъ задачъ, и между прочимъ къ вопросу о предвареніи равноденствій****). Для большей удобности

*) *Mechanica sive motus scientia analytice*, exposita Leonhardo Eulero. Petropoli, 1736 г. 2 тома in-4°.

**) *Theoria motus corporum seu regidorum.* Leonhardo Eulero, Rostoch, 1765.

***) *Traité de Dynamique* par D'Alembert, Paris 1743 г. 1 томъ in-4°. Второе изданіе этого трактата напечатано въ 1758 году. Оно содержитъ въ себѣ значительныя прибавленія противъ перваго. Послѣднее изданіе напечатано 1796 г.

****) *Recherches sur la précession des équinoxes*, 1 томъ *in*-4°, 1749 г.

въ приложеніяхъ, новѣйшіе математики измѣнили форму *Д'Аламбертова правила*; но сущность осталась безъ перемѣны. Мы думаемъ, что читатели прочтутъ не безъ любопытства изложеніе начала, о которомъ говоримъ, въ томъ видѣ, въ какомъ оно было предложено самимъ Д'Аламбертомъ. Приводимъ слова автора въ буквальномъ переводѣ *).

Общая Задача.

„*Пусть будетъ система тѣлъ, произвольно расположенныхъ одни въ разсужденіи другихъ; положимъ, что каждому изъ сихъ тѣлъ сообщаютъ особое движеніе, которому оно не можетъ повиноваться, по причинѣ дѣйствія другихъ тѣлъ системы. Найти движеніе, принимаемое каждымъ тѣломъ.*"

Рѣшеніе.

„Пусть будутъ m, m', m'' и проч. тѣла, составляющія систему; положимъ, что имъ сообщены движенія u, u', u'' и проч., которыя, по причинѣ взаимодѣйствія сихъ тѣлъ, должны измѣниться въ v, v', v'' и проч. Очевидно, что движеніе u, впечатлѣнное тѣлу m, можно разсматривать какъ бы составленнымъ изъ движенія v, которое m дѣйствительно принимаетъ, и другаго движенія p; равнымъ образомъ, можно разсматривать движенія u', u'' и проч. соотвѣтственно составленными изъ движеній v', p'; v'', p''; и проч. Отсюда слѣдуетъ, что взаимное движеніе тѣлъ m, m', m'' и проч. не измѣнится, когда, вмѣсто движеній u, u', u''...., имъ будутъ впечатлѣны совокупныя движенія v, p; v', p'; v'', p'';..... Но, по предположенію, тѣла m, m', m'' и проч., по причинѣ существующей между ними взаимной связи, приняли движенія v, v', v'' и проч.; слѣдовательно, движенія p, p', p'' и проч. должны быть такого свойства, что они нисколько не препятствуютъ движеніямъ v, v', v''....., то есть: когда тѣламъ m, m', m''.... будутъ сообщены движенія p, p', p''....., то эти самыя движенія должны взаимно уничтожаться, а система оставаться въ покоѣ."

„Отсюда выводимъ слѣдующее правило для опредѣленія движенія какого ни есть числа тѣлъ, дѣйствующихъ одни на другія: *разложить движенія* u, u', u''...., *впечатлѣнныя тѣламъ* m, m', m''.... *каждое на два другія* v, p; v', p'; v'', p'';...... *такого свойства, чтобы* 1°. *тѣла* m, m', m''...., *получивъ только движенія* v, v', v''...., *сохранили бы сіи движенія не препятствуя одно другому, и* 2°. *чтобы система оставалась въ равновѣсіи, когда тѣламъ* m, m', m''... *будутъ сообщены только движенія* p, p', p''.... Очевидно, что v, v', v''.... изображаютъ движенія, дѣйствительно принимаемыя тѣлами въ слѣдствіе взаимнаго ихъ дѣйствія, *что́ и надлежало опредѣлить.*"

Замѣтимъ, что подъ *движеніемъ* Д'Аламбертъ разумѣетъ *движущую силу*, то есть, произведеніе массы тѣла на приложенную къ нему ускорительную силу, принимая въ соображеніе и направленіе сей послѣдней.

Мы сказали выше, что для удобности, правило Д'Аламберта обыкновенно выражаютъ другимъ образомъ. Пусть будутъ m, m', m''.... массы, составляющія данную систему, а α, α', α''.... ихъ скорости въ концѣ времени t. Положимъ что силы, дѣйствующія на систему, сообщили бы по собственнымъ своимъ направленіямъ, въ элементъ времени dt, скорости udt, $u'dt$, $u''dt$..... массамъ m, m', m''....., если бы сіи послѣднія были совершенно свободны. Но по причинѣ связей, существующихъ въ системѣ, массы m, m', m''.... не получатъ скоростей udt, $u'dt$, $u''dt$....., а пріобрѣтутъ, въ элементъ времени dt, разумѣется сверхъ первоначальныхъ скоростей α, α', α''...., нѣкоторыя другія скорости vdt, $v'dt$, $v''dt$..... Означимъ теперь чрезъ pdt, $p'dt$, $p''dt$..... потерянныя или пріобрѣтенныя скорости массами m, m', m''....; vdt и pdt будутъ составляющими скорости udt; $v'dt$ и $p'dt$ то же въ разсужденіи $u'dt$, и проч. И такъ, вмѣсто силъ mp, $m'p'$, $m''p''$......, которыя должны взаимно уравновѣшиваться, можно будетъ разсматривать составляющія каждой изъ нихъ. Но, очевидно, что сила mp есть равнодѣйствующая силы mu, взятой по собственному ея направленію, и силы mv, принимаемой въ противную сторону; слѣдовательно, *въ разсматриваемой системѣ количества движенія* mu, $m'u'$, $m''u''$...,

*) Смот. второе изданіе Д'Аламбертовой Механики, стран. 73.

сообщенныя массамъ m, m', m''....., *должны уравновѣшиваться съ дѣйствительными количествами движенія* mv, $m'v'$, $m''v''$..... *системы, взятыми въ противную сторону направленія скоростей* vdt, $v'dt$, $v''dt$.....

Въ этомъ измѣненномъ видѣ Д'Аламбертово правило представляетъ ту выгоду, что руководствуясь имъ, не имѣемъ надобности разсматривать потерянныхъ или пріобрѣтенныхъ скоростей, а составляемъ прямо условныя уравненія равновѣсія между данными силами mu, $m'u'$, $m''u''$... и неизвѣстными mv, $m'v'$, $m''v''$....

§ 5. И такъ, посредствомъ Д'Аламбертова правила, динамическіе вопросы приводятся къ вопросамъ о равновѣсіи. Для рѣшенія сихъ послѣднихъ, еще до появленія въ свѣтъ Д'Аламбертовой Динамики, было открыто *Иваномъ Бернулли* общее правило, извѣстное подъ названіемъ *начала возможныхъ скоростей*; Смот. VIRTUELLES (PRINCIPE DES VITESSES). Очень вѣроятно, что Д'Аламбертъ не воспользовался симъ открытіемъ потому что ни Иванъ Бернулли, ни его послѣдователи не показали, какимъ образомъ это начало должно быть употребляемо при рѣшеніи всѣхъ вопросовъ о равновѣсіи. Мысль о совокупленіи начала Д'Аламберта съ началомъ возможныхъ скоростей принадлежитъ Лагранжу. На этомъ основаніи, въ Разсужденіи своемъ о либраціи луны, онъ составилъ уравненія движенія сего спутника около его центра тяжести*). Въ 1788 году Лагранжъ напечаталъ свою *Аналитическую Механику* **). Въ этомъ твореніи знаменитый геометръ предложилъ общую формулу, выражающую начало возможныхъ скоростей, и основалъ на ней рѣшеніе статическихъ и динамическихъ задачъ, руководствуясь одними аналитическими пріёмами, безъ пособія чертежей и соображеній геометрическихъ или механическихъ. Этимъ трудомъ Лагранжъ поставилъ Механику на степень новой отрасли чистаго анализа.

§ 6. Лапласъ, которому чистый и прикладной анализъ обязаны столькими важными теоріями, съ особеннымъ пристрастіемъ и постоянствомъ занимался Физическою Астрономіею. Результатомъ его трудовъ было знаменитое твореніе — *Небесная Механика* *). Въ ней авторъ подвелъ подъ общую точку воззрѣнія всѣ астрономическія теоріи, разбросанныя по разнымъ сочиненіямъ и по отдѣльнымъ трактатамъ, и которыя въ совокупности обнимаютъ всѣ слѣдствія, проистекающія изъ закона всеобщаго тяготѣнія для нашей солнечной системы. Рѣшеніе многихъ важнѣйшихъ вопросовъ изъ Физической Астрономіи предложены въ Небесной Механикѣ въ усовершенствованномъ или даже въ совершенно новомъ видѣ. Изъ числа примѣчательнѣйшихъ теорій, изложенныхъ въ этомъ твореніи, можно указать на слѣдующія: *о фигурѣ земли*, и преимущественно *объ опредѣленіи сжатія земли посредствомъ вѣковыхъ неравностей луны*; *объ неизмѣнности среднихъ разстояній планетъ отъ земли*; *объ неравностяхъ среднихъ движеній Юпитера и Сатурна*; *о вѣковомъ уравненіи луны*; *о приливѣ и отливѣ*. Здѣсь мѣсто упомянуть и о другомъ важномъ трудѣ Лапласа, относящемся также къ Механикѣ: мы разумѣемъ сочиненіе: *Exposition du Systême du Monde* **), которое заключаетъ въ себѣ изложеніе главнѣйшихъ результатовъ Небесной Механики, объясненныхъ безъ пособія аналитическихъ формулъ.

§ 7. Для полноты представленнаго здѣсь бѣглаго очерка успѣховъ Динамики, должно хотя въ короткихъ словахъ указать на то, чѣмъ эта наука одолжена нашему соотечественнику Г. Остроградскому. Послѣ появленія въ свѣтъ Аналитической Механики Лагранжа, первостепенные математики занимались составленіемъ уравненій движенія системы тѣлъ, связанныхъ между собою условіями, измѣняющимися вмѣстѣ съ временемъ. Но, должно сознаться, что труды ихъ въ этомъ отношеніи были весьма неудовлетворительны, и что до сихъ поръ недоставало

*) *Mémoires de Berlin*, 1780.

**) *Mécanique analytique*, Paris, 1788. Второе изданіе съ значительными прибавленіями напечатано въ двухъ томахъ: первый въ 1811, а второй въ 1815 году.

*) *Traité de Mécanique céléste*, 2 тома, in-4⁰, 1798 г. Третій томъ напечатанъ въ 1803, четвертый — въ 1805, пятый — въ 1825 году.

**) Первое изданіе въ двухъ томахъ in-8⁰ напечатано въ 1796 году. Впослѣдствіи вышло нѣсколько изданій, исправленныхъ авторомъ.

строгаго и вмѣстѣ съ тѣмъ яснаго доказательства уравненій, о которыхъ говоримъ. Въ 1834 году *) Г. Остроградскій предложилъ нѣкоторыя соображенія, которыя много пояснили вопросъ. Въ примѣчательномъ же Разсужденіи: *Mémoire sur les déplacemens instentanés des systémes assujetis à des conditions variables* **), онъ истощилъ этотъ важнѣйшій предметъ Динамики, выведя строгимъ образомъ самыя общія уравненія движенія. И такъ, можно сказать, что основная задача науки о движеніи, въ полномъ ея объёмѣ, рѣшена въ первый разъ Г. Остроградскимъ.

Предѣлы лексиконной статьи не позволяютъ намъ изложить анализа, на которомъ Русскій геометръ основалъ выводъ общихъ уравненій движенія. Разборъ условій, доставляемыхъ сущностію системы, завлекъ бы насъ слишкомъ далёко, и мы отсылаемъ по сему предмету къ Разсужденію, о которомъ сей-часъ упомянули. Здѣсь ограничимся изложеніемъ главныхъ свойствъ движенія, при-чемъ по возможности будемъ сообразоваться съ воззрѣніемъ Г. Остроградскаго. Мы не будемъ говорить о дѣйствіи силъ на одну матеріальную точку, потому что эта теорія объяснена подробно въ статьѣ CURVILIGNE (MOUVEMENT), къ которой могутъ обратиться читатели. Переходимъ прямо къ движенію системы точекъ, связанныхъ между собою извѣстнымъ образомъ, и побуждаемыхъ какими ни есть данными силами.

§ 8. Изобразимъ чрезъ $m, m', m''\ldots$ массы точекъ, составляющихъ данную систему, и положимъ что къ этимъ массамъ соотвѣтственно приложены силы $P, P', P''\ldots$ Вопросъ состоитъ въ томъ, чтобы опредѣлить движеніе каждой точки системы. Для этого изобразимъ чрезъ $v, v', v''\ldots$ скорости точекъ $m, m', m''\ldots$, соотвѣтствующія времени t. На основаніи сказаннаго въ статьѣ о криволинейномъ движеніи, выраженія

$$-m\frac{d(v\,Cos\,\omega)}{dt},\quad -m'\frac{d(v'\,Cos\,\omega')}{dt},\quad -m''\frac{d(v''\,Cos\,\omega'')}{dt},\ldots$$

будутъ изображать проэкціи силъ инерціи, относящихся къ массамъ $m, m', m''\ldots$, на направленія $A, A', A''\ldots$, соотвѣтственно составляющія углы $\omega, \omega', \omega''\ldots$ съ скоростями $v, v', v''\ldots$ Означимъ чрезъ $P\,Cos\,\alpha$, $P'\,Cos\,\alpha'$, $P''\,Cos\,\alpha''\ldots$ проэкціи силъ $P, P', P''\ldots$ на тѣ же направленія $A, A', A''\ldots$ Проэкціи равнодѣйствующихъ движущихъ силъ и силъ инерціи, также на линіи $A, A', A''\ldots$, будутъ

$$(1)\quad\left\{\begin{array}{l} m\left(P\,Cos\,\alpha-\frac{d(v\,Cos\,\omega)}{dt}\right)\\ m'\left(P'\,Cos\,\alpha'-\frac{d(v'\,Cos\,\omega')}{dt}\right)\\ m''\left(P''\,Cos\,\alpha''-\frac{d(v''\,Cos\,\omega'')}{dt}\right)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Эти силы должны уничтожаться взаимно, то есть, онѣ не должны производить никакого перемѣщенія сверхъ того, которое система дѣйствительно имѣетъ. И въ самомъ дѣлѣ, если бы онѣ могли произвести какое либо передвиженіе, то проэкціи силъ инерціи не выражались бы чрезъ

$$-m\left(P\,Cos\,\alpha-\frac{d(v\,Cos\,\omega)}{dt}\right),\ -m'\left(P'\,Cos\,\alpha'-\frac{d(v'\,Cos\,\omega')}{dt}\right),$$

что противно предположенію. И такъ, опредѣленіе движенія массъ $m, m', m''\ldots$ приводится къ разысканію условій равновѣсія силъ (1) и еще къ нахожденію нѣкоторыхъ другихъ условій, проистекающихъ изъ самаго свойства данной системы. Послѣднія получаются скорѣе изъ соображеній чисто геометрическихъ, чѣмъ механическихъ.

Силы (1), какъ не производящія никакого дѣйствія, называются *потерянными силами* (*forces perdues*). Чтобы выразить условія ихъ равновѣсія, мы воспользуемся однимъ извѣстнымъ началомъ Статики. Оно состоитъ въ томъ, что для равновѣсія какихъ угодно силъ, надобно чтобы полный ихъ моментъ равнялся *нулю* или былъ *отрицательнымъ* для всѣхъ перемѣщеній возможныхъ, то есть совмѣстныхъ съ свойствомъ системы. И такъ, если допустимъ, что направленія $A, A', A''\ldots$, которыя совершенно произвольны, совпадаютъ съ направленіями возможныхъ перемѣщеній системы, то пол-

*) Смот. Разсужденіе Г. Остроградскаго подъ заглавіемъ: *Considérations générales sur les momens des forces*, напечатанное въ Mémoires de l'Acad. Imp. des Sciences de St. Pétersbourg, Sciences Math. Phys. et Natur. T. III. 1835 г. стр. 129.

**) Mémoires de l'Acad. Imp. des Sciences de St. Pétersbourg, Sciences Math. Phys. et Natur. T. III, 1838 г. стр. 565.

ный моментъ выразится суммою

$$m\left(PCos\alpha-\frac{d(vCos\omega)}{dt}\right)\delta s+m'\left(P'Cos\alpha'-\frac{d(v'Cos\omega')}{dt}\right)\delta s'+m''\left(P''Cos\alpha''-\frac{d(v''Cos\omega'')}{dt}\right)\delta s''+\ldots,$$

въ которомъ δs, $\delta s'$, $\delta s''$.... изображаютъ какую ни есть совокупность возможныхъ перемѣщеній массъ m, m', m''..... Слѣдовательно, условія равновѣсія потерянныхъ силъ выражаются формулою

$$(2)\quad m\left(PCos\alpha-\frac{d(vCos\omega)}{dt}\right)\delta s+m'\left(P'Cos\alpha'-\frac{d(v'Cos\omega')}{dt}\right)\delta s'+m''\left(P''Cos\alpha''-\frac{d(v''Cos\omega'')}{dt}\right)\delta s''+\ldots<0,$$

относящеюся ко всѣмъ перемѣщеніямъ, совмѣстнымъ съ сущностію системы. Эта формула не исключаетъ и случая равенства.

§ 9. Мы уже сказали, что не будемъ входить въ разборъ условій, проистекающихъ изъ свойства разсматриваемой системы. Повторяемъ, читатели найдутъ всѣ желаемыя подробности объ этомъ предметѣ въ Разсужденіи, о которомъ упомянули выше. Въ немъ доказано, что если замѣнимъ какія ни есть возможныя перемѣщенія δs, $\delta s'$, $\delta s''$..... перемѣщеніями дѣйствительными vdt, $v'dt$, $v''dt$....., то первая часть формулы (2) обратится въ *нуль*. Но такъ какъ въ этомъ предположеніи $\omega=0$, $\omega'=0$, $\omega''=0$...., а α, α', α''.... изображаютъ углы, составляемые силами P, P', P''.... съ направленіями скоростей v, v', v''...., то и получимъ

$$(3)\quad mvdv+m'v'dv'+m''v''dv''+\ldots = mPvCos\alpha dt+m'P'v'Cos\alpha'dt+m''P''v''Cos\alpha''dt+\ldots.$$

Первая часть уравн. (3) равна дифференціалу выраженія $\frac{1}{2}(mv^2+m'v'^2+m''v''^2+\ldots)$, извѣстнаго подъ названіемъ *живой силы системы* (*force vive du systême*). Въ извѣстномъ преніи о живыхъ силахъ, возникшемъ между геометрами прошедшаго столѣтія, условились называть *живою силою точки* произведеніе ея массы на квадратъ ея скорости, а сумму подобныхъ произведеній, относящихся ко всѣмъ матеріальнымъ точкамъ системы — *живою силою системы*. Позже замѣтили, что половинная сумма сихъ произведеній встрѣчается несравненно чаще чѣмъ полная; поэтому полезно было дать какое нибудь названіе выраженію $\frac{1}{2}(mv^2+m'v'^2+m''v''^2+\ldots)$, и, чтобы не вводить новаго термина, согласились эту половинную сумму называть *живою силою системы*. И такъ, живая сила въ прежнемъ значеніи, равна удвоенной живой силѣ принимаемой въ томъ смыслѣ, въ какомъ нынѣ употребляютъ это наименованіе.

Когда вторая часть уравн. (3) будетъ полнымъ дифференціаломъ, то, посредствомъ интегрированія, прямо получится живая сила системы. Въ такомъ случаѣ интегралъ второй части будетъ зависѣть только отъ координатъ, опредѣляющихъ положеніе системы. Изобразивъ чрезъ x, y, z; x', y', z';..... координаты точекъ m, m'....., получимъ

$$\tfrac{1}{2}(mv^2+m'v'^2+\ldots)=C+\varphi(x, y, z, x', y', z',\ldots),$$

разумѣя подъ C постоянную произвольную величину. Если означимъ чрезъ β, β'.... скорости, а чрезъ a, b, c; a', b', c';.... координаты массъ m, m'...., соотвѣтствующія опредѣленному мгновенію, то предыдущее уравненіе приметъ видъ

$$(4)\quad \tfrac{1}{2}(mv^2+m'v'^2+\ldots)-\tfrac{1}{2}(m\beta^2+m'\beta'^2+\ldots) = \varphi(x, y, z, x', y', z',\ldots)-\varphi(a, b, c, a', b', c',\ldots).$$

Формула (4) показываетъ, что разность между живыми силами системы, соотвѣтствующими двумъ опредѣленнымъ мгновеніямъ, зависитъ единственно отъ положенія системы въ эти два мгновенія, а нисколько не зависитъ отъ промежуточныхъ ея положеній. Этотъ законъ движенія имѣетъ многоразличныя и весьма полезныя приложенія. Руководствуясь имъ однимъ, можно рѣшить почти всѣ задачи изъ теоріи машинъ.

Когда силы, дѣйствующія на систему, происходятъ отъ взаимнаго притяженія или отталкиванія массъ m, m', m'',...., и когда, сверхъ того, эти силы выражаются функціями взаимныхъ разстояній между точками m, m', m''..... то вторая часть уравн. (3) будетъ полнымъ дифференціаломъ нѣкоторой функціи сихъ разстояній. И такъ, если означимъ чрезъ r, r', r''.... взаимныя разстоянія тѣлъ m, m', m''.... а чрезъ $d\varphi(r, r', r''\ldots)$ полный дифференціалъ, составляющій вторую часть уравн. (3), то получимъ чрезъ интегрированіе

$$\tfrac{1}{2}(mv^2+m'v'^2+m''v''^2+\ldots)=C+\varphi(r, r', r''\ldots).$$

Изобразимъ, какъ и выше, чрезъ β, β', β''... скорости массъ m, m', m''...., соотвѣтствующія какому нибудь опредѣленному мгновенію θ, отличному отъ t, и означимъ чрезъ ϱ, ϱ', ϱ''.... значенія разстояній r, r', r''...., относящіяся къ тому же мгновенію θ. Найдемъ

$$\tfrac{1}{2}(mv^2+m'v'^2+m''v''^2+\ldots)-\tfrac{1}{2}(m\beta^2+m'\beta'^2+m''\beta''^2+\ldots)$$
$$=\varphi(r,\ r',\ r''\ldots.)-\varphi(\varrho,\ \varrho',\ \varrho''\ldots.).$$

Если случится, что въ два опредѣленныя мгновенія t и θ, взаимныя разстоянія тѣлъ системы будутъ одни и тѣ же, то предыдущее уравненіе доставитъ

$$\tfrac{1}{2}(mv^2+m'v'^2+m''v''^2+\ldots)=\tfrac{1}{2}(m\beta^2+m'\beta'^2+m''\beta''^2+\ldots).$$

И такъ, въ этомъ случаѣ, живая сила системы будетъ одна и та же въ два различныя мгновенія. Эта теорема имѣетъ непосредственное приложеніе къ соударенію упругихъ тѣлъ. Смот. CHOC.

§ 10. Случается часто, что предположивъ перемѣщенія δs, $\delta s'$, $\delta s''\ldots.$ равными и параллельными между собою, первая часть формулы (2) обращается въ нуль. Въ этомъ случаѣ, раздѣливъ на δs, получимъ

$$m\frac{d(vCos\omega)}{dt}+m'\frac{d(v'Cos\omega')}{dt}+\ldots=mPCos\alpha+m'P'Cos\alpha'+\ldots$$

Если допустимъ теперь, что направленіе A остается неизмѣннымъ, то первая часть этого уравненія дѣлается полнымъ дифференціаломъ суммы $mvCos\omega+m'v'Cos\omega'+\ldots.$ Но, по свойству центра тяжести, выраженіе $mvCos\omega+m'v'Cos\omega'+\ldots.$ равняется суммѣ массъ m, $m'\ldots.$, помноженной на скорость центра тяжести системы, проэктированную на линію A. И такъ, изобразивъ чрезъ V скорость центра тяжести, а чрезъ Ω уголъ, составляемый сею скоростію съ направленіемъ A, получимъ

$$MVCos\Omega=mvCos\omega+m'v'Cos\omega'+\ldots,$$

гдѣ для краткости положили $m+m'+\ldots=M$ Дифференцированіе этого уравненія доставитъ

$$M\frac{d(VCos\Omega)}{dt}=m\frac{d(vCos\omega)}{dt}+m'\frac{d(v'Cos\omega')}{dt}+\ldots$$
$$=mPCos\alpha+m'P'Cos\alpha'+\ldots.$$

Но извѣстно, что сумма $mPCos\alpha+m'P'Cos\alpha'+\ldots$ изображаетъ проэкцію на направленіе A равнодѣйствующей силъ mP, $m'P'\ldots.$, перенесенныхъ параллельно самимъ себѣ въ какую ни есть точку, напримѣръ, въ центръ тяжести системы. И такъ, если означимъ чрезъ R равнодѣйствующую о которой говоримъ, а чрезъ λ уголъ, составляемый ея направленіемъ съ A, то получимъ

$$M\frac{d(VCos\Omega)}{dt}=RCos\lambda. \quad (5)$$

Сличеніе этого уравненія съ формулою (A), выведенною въ статьѣ CURVILIGNE (MOUVEMENT) для одной вещественной точки, покажетъ, что центръ тяжести системы движется точно такъ, какъ если бы всѣ массы были сосредоточены въ этомъ центрѣ, а силы, дѣйствующія на систему, перенесены параллельно самимъ себѣ въ эту же точку. Очевидно впрочемъ, что всѣ эти силы могутъ быть замѣнены ихъ равнодѣйствующею R. Въ этомъ предложеніи состоитъ законъ движенія центра тяжести. Изъ него можно вывести другіе, менѣе общіе законы; мы считаемъ излишнимъ приводить ихъ. Замѣтимъ только, что когда силы mP, $m'P'\ldots.$ будутъ такого свойства, что по перенесеніи ихъ въ одну точку параллельно собственнымъ ихъ направленіямъ, онѣ уничтожатся взаимно, то равнодѣйствующая ихъ $R=0$, почему и $d(VCos\Omega)=0$, откуда, чрезъ интегрированіе, $VCos\Omega=Пост.$ Это уравненіе показываетъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ проэкція скорости центра тяжести на какое ни есть направленіе будетъ величина постоянная; слѣдовательно, центръ тяжести системы движется равномѣрно по прямой линіи. Такъ, напримѣръ, центръ тяжести солнечной системы (не принимая въ соображеніе дѣйствія неподвижныхъ звѣздъ и другихъ тѣлъ, чуждыхъ нашей системѣ) можетъ только имѣть прямолинейное равномѣрное движеніе, потому что планеты, спутники ихъ, кометы и солнце подвержены дѣйствію взаимно притягательныхъ силъ, которыя по-двѣ равны и прямопротивны. Подобнымъ образомъ, при соудареніи какихъ ни есть тѣлъ, движеніе центра тяжести нисколько не измѣняется отъ удара, потому что въ такомъ случаѣ обнаруживаются только силы, которыя, будучи разсматриваемы по-двѣ, равны и прямопротивны.

§ 11. Нерѣдко случается, что формула (2) обращается въ нуль, когда замѣняемъ перемѣщенія δs, $\delta s'$, $\delta s''\ldots.$ безконечно малыми движеніями, относящимися къ вращенію системы около какой ни есть неподвижной оси, и когда, при вращеніи системы, взаимныя разстоянія точекъ m, m', $m''\ldots.$, а равно и разстоянія ихъ отъ оси вращенія, не измѣняются. Изобразивъ чрезъ $\delta\varepsilon$ элементарный уголъ вращенія, а чрезъ r, r',

$r''\ldots$ разстоянія точекъ m, m', $m''\ldots$ отъ оси вращенія, получимъ равенства

$$\delta s = r\delta\varepsilon,\ \delta s' = r'\delta\varepsilon,\ \delta s'' = r''\delta\varepsilon\ldots.,$$

въ слѣдствіе которыхъ формула (2) приметъ видъ

$$(6)\quad mr\left(P\,Cos\,\alpha - \frac{d(v\,Cos\,\omega)}{dt}\right) + m'r'\left(P'\,Cos\,\alpha' - \frac{d(v'\,Cos\,\omega')}{dt}\right) + \ldots = 0.$$

Въ этомъ уравненіи α и ω изображаютъ углы, составляемые силою P и скоростію v съ направленіемъ передвиженія $r\delta\varepsilon$; то же значеніе имѣютъ количества α' и ω' въ разсужденіи силы P' и скорости v', разсматриваемыхъ относительно направленія передвиженія $r'\delta\varepsilon$, и проч.

Примемъ теперь въ соображеніе дифференціалъ $d(v\,Cos\,\omega)$; сказанное объ немъ можно будетъ распространить и на выраженія $d(v'\,Cos\,\omega')$, $d(v''\,Cos\,\omega'')\ldots$ Проведемъ чрезъ радіусъ векторъ r и чрезъ направленіе перемѣщенія $r\delta\varepsilon$ плоскость, которую примемъ за одну изъ координатныхъ, напримѣръ за плоскость (x, y)-овъ. Въ такомъ случаѣ можно предположить, что ось z-овъ совпадаетъ съ осью вращенія. Косинусы угловъ, составляемыхъ направленіемъ $r\delta\varepsilon$ съ тремя координатными осями x-овъ, y-овъ, z-овъ, будутъ соотвѣтственно $-\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, 0; направленіе скорости v составляетъ съ тѣми же осями углы, коихъ косинусы, какъ извѣстно, выражаются отношеніями $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, разумѣя подъ ds элементъ кривой, описываемой точкою m. Слѣдовательно

$$Cos\,\omega = \frac{xdy - ydx}{rds},$$

откуда, по причинѣ $v = \frac{ds}{dt}$,

$$v\,Cos\,\omega = \frac{xdy - ydx}{rdt}.$$

Дифференцируя это уравненіе въ предположеніи $\frac{x}{r}$ и $\frac{y}{r}$ постоянныхъ, получимъ

$$\frac{d(v\,Cos\,\omega)}{dt} = \frac{xd^2y - yd^2x}{rdt^2}.$$

Подобнымъ образомъ найдется

$$\frac{d(v'\,Cos\,\omega')}{dt} = \frac{x'd^2y' - y'd^2x'}{r'dt^2}$$

$$\frac{d(v''\,Cos\,\omega'')}{dt} = \frac{x''d^2y'' - y''d^2x''}{r''dt^2}$$

....

Сверхъ того, если изобразимъ чрезъ X, Y, Z; X', Y', Z';.... проэкціи силъ P, P'. . . на три координатныя оси, то получимъ

$$P\,Cos\,\alpha = \frac{xY - yX}{r}$$

$$P'\,Cos\,\alpha' = \frac{x'Y' - y'X'}{r'}$$

....

Подставленіе этихъ величинъ въ формулу (6), приведетъ ее къ виду

$$m.\frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2} + m'.\frac{x'd^2y' - y'd^2x'}{dt^2} + \ldots\ldots$$
$$= m(xY - yX) + m'(x'Y' - y'X') + \ldots.$$

Но, извѣстно изъ Геометріи *), что $xdy - ydx$ изображаетъ удвоенную элементарную площадь, описанную въ элементъ времени dt проэкціею радіуса вектора на плоскость (x, y)-овъ. Означивъ чрезъ pdt эту удвоенную площадь, получимъ

$$\frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2} = \frac{dp}{dt},$$

и, подобнымъ образомъ,

$$\frac{x'd^2y' - y'd^2x'}{dt^2} = \frac{dp'}{dt}$$

....

Слѣдовательно

$$m\frac{dp}{dt} + m'\frac{dp'}{dt} + m''\frac{dp''}{dt} + \ldots\ldots =$$
$$m(xY - yX) + m'(x'Y' - y'X') + m''(x''Y'' - y''X'') + \ldots.$$

Это уравненіе тожественно съ тѣмъ, которое имѣетъ мѣсто для неизмѣняемой системы. Подобныя уравненія найдутся въ разсужденіи всякой плоскости, воображаемой въ пространствѣ. Когда силы P, P', $P''\ldots$ такого свойства, что предположивъ на время данную систему неизмѣняемою, онѣ взаимно уничтожатся, то вторая часть послѣдней формулы обратится въ нуль. Въ этомъ случаѣ, взявъ интегралъ, получимъ

$$(7)\qquad mp + m'p' + m''p'' + \ldots = \textit{Пост}.$$

И такъ, сумма элементарныхъ площадей, проэктированныхъ на какую ни есть плоскость, и соотвѣтственно помноженныхъ на массы разсматриваемой системы, равна постоянной величинѣ. Въ этомъ свойствѣ движенія состоитъ *законъ сохраненія площадей.* Замѣтимъ, что правильнѣе было бы назвать его *закономъ сохраненія проэкцій площадей.*

---

*) Смот. стр. 167 и 316 перваго тома сего Лексикона.

§ 12. Когда условія системы даны посредствомъ уравненій, и когда, сверхъ того, разсматриваются только возможныя перемѣщенія δs, $\delta s'$...., то, на основаніи формулы (2), найдется

$$\Sigma m\left[P\,Cos\,\alpha-\frac{d(vCos\omega)}{dt}\right]\delta s=0,$$

разумѣя подъ Σ суммовой знакъ. Измѣнивъ δs въ ds, получимъ, какъ въ параграфѣ 9,

$$\Sigma mvdv=\Sigma mPvCos\alpha dt.$$

Въ этой формулѣ мы удержали букву α; но не должно терять изъ виду, что она въ настоящемъ случаѣ изображаетъ уголъ, составляемый направленіемъ элемента ds съ направленіемъ силы P.

Означимъ произведеніе $vCos\alpha dt$ чрезъ dp; dp изобразитъ проэкцію перемѣщенія $ds=vdt$ на направленіе силы P. Слѣдовательно

$$\Sigma mvdv=\Sigma mPdp,$$

и если $\Sigma mPdp$ будетъ полнымъ дифференціаломъ, то интегрированіе доставитъ уравненіе

$$\tfrac{1}{2}\Sigma mv^2=C+\int\Sigma mPdp,$$

которое, какъ извѣстно, выражаетъ законъ живыхъ силъ.

Пусть будетъ δp проэкція перемѣщенія δs на направленіе силы P. Найдется

$$\Sigma m\frac{d(vCos\omega)}{dt}\delta s=\Sigma mP\delta p;$$

если возьмемъ варіацію уравненія, выражающаго законъ живыхъ силъ, то получимъ

$$\Sigma mv\delta v=\Sigma mP\delta p,$$

и слѣдовательно

(8) $$\Sigma m\left[\frac{d(vCos\omega)}{dt}\delta s-v\delta v\right]=0.$$

Въ этой формулѣ, какъ и во всѣхъ предыдущихъ, выраженіе $d(vCos\omega)$ не изображаетъ полнаго дифференціала. Но оно можетъ быть замѣнено полнымъ дифференціаломъ количества $vCos\omega$, сложеннымъ съ разностію $vCos\omega\frac{d\delta s}{\delta s}-\frac{ds\delta v}{\delta s}$ *). И такъ

$$d(vCos\omega)=d(vCos\omega)+vCos\omega\frac{d\delta s}{\delta s}-\frac{ds\delta v}{\delta s};$$

выраженіе $d(vCos\omega)$ во второй части этого уравненія означаетъ полный дифференціалъ. Далѣе имѣемъ

$$d(vCos\omega)\delta s=d(vCos\omega\delta s)-ds\delta v,$$

въ слѣдствіе чего уравн. (8) приметъ видъ

$$\Sigma m\left[\frac{d(vCos\omega\delta s)}{dt}-2v\delta v\right]=0.$$

Помноживъ это уравненіе на dt, и взявъ потомъ интегралъ, получимъ

$$\left[\Sigma mvCos\omega\delta s\right]_T-\left[\Sigma mvCos\omega\delta s\right]_0$$
$$=\Sigma 2m\int v\delta vdt=\delta\Sigma m\int v^2dt.$$

Если положимъ, что перемѣщеніе δs, относящееся къ времени $t=0$ и къ конечному времени $t=T$, обращается въ нуль, то найдемъ

(9) $$\delta\int_0^T dt\Sigma mv^2=0.$$

*) Извѣстно, что $d(vCos\omega)$ только тогда означаетъ полный дифференціалъ, когда направленіе δs неизмѣнно. Въ противномъ же случаѣ, такъ какъ дифференціалъ долженъ быть взятъ считая это направленіе постояннымъ, то $d(vCos\omega)$ уже не будетъ полнымъ дифференціаломъ. Изобразимъ чрезъ dx, dy, dz и δx, δy, δz проэкціи ds и δs на три координатныя оси; получимъ

$$Cos\omega=\frac{dx\delta x+dy\delta y+dz\delta z}{ds\delta s},$$

откуда

$$vCos\omega=\frac{dx\delta x+dy\delta y+dz\delta z}{\delta sdt}.$$

При дифференцированіи этой величины для $vCos\omega$, должно принимать $\frac{\delta x}{\delta s}$, $\frac{\delta y}{\delta s}$, $\frac{\delta z}{\delta s}$ постоянными; означивъ характеристикою d' дифференцированіе, произведенное въ такомъ предположеніи, получимъ

$$d'(vCos\omega)=\frac{d^2x\delta x+d^2y\delta y+d^2z\delta z}{\delta sdt}.$$

Взявъ же полный дифференціалъ, найдемъ

$$d(vCos\omega)=d'(vCos\omega)+\frac{dxd\delta x+dyd\delta y+dzd\delta z}{\delta sdt}-\frac{dx\delta x+dy\delta y+dz\delta z}{\delta sdt}\cdot\frac{d\delta s}{\delta s}.$$

Но

$$\frac{dxd\delta x+dyd\delta y+dzd\delta z}{\delta sdt}=\frac{1}{2}\frac{\delta(dx^2+dy^2+dz^2)}{\delta sdt}=\frac{1}{2}\frac{\delta(ds^2)}{\delta sdt}=\frac{ds\delta ds}{\delta sdt}=\frac{ds\delta v}{\delta s},$$

$$\frac{dx\delta x+dy\delta y+dz\delta z}{\delta sdt}=vCos\omega;$$

слѣдовательно

$$d(vCos\omega)=d'(vCos\omega)+\frac{ds\delta v}{\delta s}-vCos\omega\frac{d\delta s}{\delta s};$$

откуда выводимъ равенство

$$d'(vCos\omega)=d(vCos\omega)+vCos\omega\frac{d\delta s}{\delta s}-\frac{ds\delta v}{\delta s},$$

которое и имѣли въ виду доказать.

Слѣдовательно, интегралъ $\int_0^T dt\Sigma mv^2$ изобразитъ вообще *наименьшую* величину; Смот VARIATIONS (CALCUL DES). То же самое можно сказать и объ интегралѣ $\int_0^T \Sigma mvds$ по причинѣ $vdt = ds$. Въ этомъ свойствѣ и состоитъ такъ называемое *начало наименьшаго дѣйствія*. Лагранжъ предлагалъ назвать законъ, о которомъ говоримъ, *началомъ наибольшей или наименьшей живой силы* (*principe de la plus grande ou de la plus petite force vive*). Но сей великій геометръ не замѣтилъ, что *maximum* никогда не имѣетъ мѣста. И такъ, по причинѣ $\int_0^T dt\Sigma mv^2 = minimum$, интегралъ $\int_0^T dt \frac{\Sigma mv^2}{2}$ будетъ также *наименьшій*, то есть, сумма элементарныхъ живыхъ силъ будетъ всегда наименьшая.

§ 13. Послѣдніе четыре параграфа содержатъ въ себѣ изложеніе четырехъ законовъ движенія, извѣстныхъ подъ наименованіями *динамическихъ началъ*: 1°. *Начало сохраненія живыхъ силъ* (*principe de la conservation des forces vives*). 2°. *Начало сохраненія движенія центра тяжести* (*principe de la conservation du mouvement du centre de gravité*). 3°. *Начало сохраненія площадей* (*principe de la conservation des aires*) и 4°. *Начало наименьшаго дѣйствія* (*principe de la moindre action*). Наименованіе *законовъ* было бы свойственнѣе для этихъ четырехъ динамическихъ предложеній.

Первый изъ сихъ законовъ найденъ *Гугенсомъ*; онъ предложилъ его въ видѣ менѣе общемъ и нѣсколько отличномъ отъ того, въ которомъ впослѣдствіи стали употреблять это предложеніе. *Иванъ Бернулли*, воспользовавшійся теоремою Гугенса для рѣшенія нѣкоторыхъ динамическихъ вопросовъ, назвалъ ее *началомъ сохраненія живыхъ силъ*. Позже, *Даніилъ Бернулли* придалъ болѣе общности этому началу, и употребилъ его для опредѣленія движенія жидкостей, заключенныхъ въ сосудахъ. Наконецъ, въ *Запискахъ Берлинской Академіи* за 1748 годъ, онъ же распространилъ законъ, о которомъ говоримъ, показавъ приложеніе его къ опредѣленію обстоятельствъ движенія тѣлъ, подверженныхъ взаимному притяженію, или притягиваемыхъ къ неподвижнымъ центрамъ силами, выражающимися какими ни есть функціями разстояній тѣлъ отъ сихъ центровъ.

Законъ сохраненія движенія центра тяжести открытъ *Нютономъ*, и изложенъ въ началѣ его творенія *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Впослѣдствіи Д'Аламбертъ далъ этому предложенію видъ болѣе общій.

Трѐтій законъ открытъ, какъ полагаютъ, въ одно время *Даніиломъ Бернулли*, *Эйлеромъ* и *Д'Арси*. Даніилъ Бернулли изложилъ его въ первой части *Записокъ Берлинской Академіи* за 1746 годъ, а Эйлеръ, въ томъ же году, въ первомъ томѣ своихъ *Opuscules*. Д'Арси представилъ свое открытіе Парижской Академіи Наукъ въ 1747 году; но оно было напечатано только 1752 года. Впрочемъ, должно замѣтить, что *законъ сохраненія площадей*, для силъ центральныхъ, былъ уже найденъ Нютономъ.

Наконецъ четвертый законъ, извѣстный подъ наименованіемъ *начала наименьшаго дѣйствія*, найденъ Французскимъ геометромъ *Мопертюи*, который вывелъ изъ него законы отраженія и преломленія свѣта, также теорію соударенія тѣлъ. Первое Разсужденіе его объ этомъ предметѣ представлено въ Парижскую Академію Наукъ 1744 года, а второе, въ Берлинскую, въ 1746 году. Но Мопертюи предложилъ начало наименьшаго дѣйствія какъ результатъ метафизическаго умозрѣнія, и это самое могло вселить нѣкоторыя сомнѣнія на счётъ справедливости и степени общности его вывода. Эйлеръ, въ своемъ трактатѣ *объ изопериметрахъ*, напечатанномъ въ Лозаннѣ 1744 года, первый предложилъ строгое доказательство этого закона при движеніи матеріальной точки. Впослѣдствіи Лагранжъ, основываясь на законѣ сохраненія живыхъ силъ, распространилъ начало наименьшаго дѣйствія на случай какой ни есть системы силъ.

§ 14. На основаніи сказаннаго въ предыдущихъ параграфахъ можно составить дифференціальныя уравненія движенія какой ни есть данной системы. Но главное затрудненіе будетъ состоять въ интегрированіи сихъ уравненій. Мы предложимъ здѣсь нѣкоторыя понятія объ общемъ способѣ, которымъ руководствуются для достиженія этой цѣли. Что касается до подробностей упоминаемаго способа, то читатели найдутъ ихъ въ примѣчательномъ Разсужденіи Англійскаго математика *Гамильтона* *). Отсылаемъ также по сему же предмету къ трудамъ *Г. Якоби* и *Г. Поассона* **).

Предметомъ этого послѣдняго параграфа будетъ приложеніе теоріи, о которой говоримъ, къ движенію системы совершенно свободной; этотъ случай преимущественно имѣетъ мѣсто въ природѣ. И дѣйствительно, всѣ тѣла предполагаются составленными изъ отдѣльныхъ частицъ, взаимно побуждаемыхъ притягательными и отталкивающими силами. Изобразимъ чрезъ m, m', m''.... массы, составляющія данную систему, чрезъ x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'';.... прямоугольныя ихъ координаты, а чрезъ X, Y, Z; X', Y', Z'; X'', Y'', Z'';.... движущія силы, параллельныя тремъ координатнымъ осямъ, и побуждающія массы m, m', m''.... Найдется

$$
\begin{array}{lll}
m\dfrac{d^2x}{dt^2}=X, & m\dfrac{d^2y}{dt^2}=Y, & m\dfrac{d^2z}{dt^2}=Z,\\
m'\dfrac{d^2x'}{dt^2}=X', & m'\dfrac{d^2y'}{dt^2}=Y', & m'\dfrac{d^2z'}{dt^2}=Z'\\
m''\dfrac{d^2x''}{dt^2}=X'', & m''\dfrac{d^2y''}{dt^2}=Y'', & m''\dfrac{d^2z''}{dt^2}=Z''.\\
\ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

Если положимъ, что массы m, m', m''.... подвержены дѣйствію притягательныхъ и отталкивающихъ силъ, пропорціональныхъ нѣкоторымъ функціямъ взаимныхъ разстояній сихъ массъ, то легко будетъ показать, что всѣ величины X, Y, Z; X', Y', Z';.... выразятся посредствомъ частныхъ производныхъ нѣкоторой функціи V, взятыхъ по измѣняемости перемѣнныхъ x, y, z; x', y', z';.... На этомъ основаніи будетъ

$$
(10)\left\{
\begin{array}{lll}
m\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{dV}{dx}, & m\dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{dV}{dy}, & m\dfrac{d^2z}{dt^2}=\dfrac{dV}{dz}\\
m'\dfrac{d^2x'}{dt^2}=\dfrac{dV}{dx'}, & m'\dfrac{d^2y'}{dt^2}=\dfrac{dV}{dy'}, & m'\dfrac{d^2z'}{dt^2}=\dfrac{dV}{dz'}\\
m''\dfrac{d^2x''}{dt^2}=\dfrac{dV}{dx''}, & m''\dfrac{d^2y''}{dt^2}=\dfrac{dV}{dy''}, & m''\dfrac{d^2z''}{dt^2}=\dfrac{dV}{dz''}\\
\ldots & \ldots & \ldots
\end{array}\right.
$$

Дѣйствительно, изобразивъ знакоположеніями (m, m'), (m, m''), (m', m''),..... взаимныя разстоянія массъ m и m', m и m'', m' и m'',.... и означивъ чрезъ $mm'f(m, m')$, $mm''f(m, m'')$,.... $mm'''f(m, m''')$,..... движущія силы, происходящія отъ взаимнаго дѣйствія массы m на m', той же массы m на m'', m на m'''....., получимъ

$$X=mm'f(m,m')\frac{x'-x}{(m,m')}+mm''f(m,m'')\frac{x''-x}{(m,m'')}$$
$$+mm'''f(m,m''')\frac{x'''-x}{(m,m''')}+\ldots\ldots$$
$$Y=mm'f(m,m')\frac{y'-y}{(m,m')}+mm''f(m,m'')\frac{y''-y}{(m,m'')}$$
$$+mm'''f(m,m''')\frac{y'''-y}{(m,m''')}+\ldots\ldots$$
$$Z=mm'f(m,m')\frac{z'-z}{(m,m')}+mm''f(m,m'')\frac{z''-z}{(m,m'')}$$
$$+mm'''f(m,m''')\frac{z'''-z}{(m,m''')}+\ldots\ldots$$
$$X'=mm'f(m,m')\frac{x-x'}{(m,m')}+m'm''f(m',m'')\frac{x''-x'}{(m',m'')}$$
$$+m'm'''f(m',m''')\frac{x'''-x'}{(m',m''')}+\ldots\ldots$$
$$Y'=mm'f(m,m')\frac{y-y'}{(m,m')}+m'm''f(m',m'')\frac{y''-y'}{(m',m'')}$$
$$+m'm'''f(m',m''')\frac{y'''-y'}{(m',m''')}+\ldots\ldots$$
$$Z'=mm'f(m,m')\frac{z-z'}{(m,m')}+m'm''f(m',m'')\frac{z''-z'}{(m',m'')}$$
$$+m'm'''f(m',m''')\frac{z'''-z'}{(m',m''')}+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Замѣтимъ, что нѣтъ необходимости, чтобы функція f была вездѣ одна и та же: она можетъ быть не одинакова для разныхъ массъ.

Изобразивъ интегралъ $\int f(m, m')\,d(m, m')$ чрезъ $F(m, m')$, получимъ $F'(m, m')=f(m, m')$; и такъ

$$\frac{dF(m,m')}{dx}=F'(m,m')\frac{x'-x}{(m,m')}=f(m,m')\frac{x'-x}{(m,m')},$$

*) Разсужденіе Гамильтона помѣщено во второй части *Philosophical Transactions* за 1834 годъ подъ заглавіемъ: *On a general Method in Dynamics*.

**) Разсужденія Г. Якоби напечатаны въ XVII томѣ (за 1837 годъ) изданія: Journal für die reine und angewandte Mathematik, von A. L. Crelle. Заглавіе перваго изъ нихъ: Zur Theorie der Variations-Rechnung und der Differential-Gleichungen (стр. 68), а втораго: Ueber die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Zahl Variabeln auf die Integration eines einzigen Systemes gewöhnlicher Differentialgleichung (стр. 97). Эти два Разсужденія переведены на Французскій языкъ, и напечатаны въ Journal de Mathématiques pures et appliquées, publié par Joseph Liouville (томъ III, 1838 годъ, Февраль и Апрѣль мѣсяцы). Трудъ Г. Поассона, подъ заглавіемъ: *Remarques sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique*, помѣщенъ въ томъ же Журналѣ *Г. Ліувилля* (Томъ II, 1837 годъ, Сентябрь мѣсяцъ).

въ слѣдствіе чего найдется:

$$X=\frac{d}{dx}\Big\{mm'F(m,m')+mm''F(m,m'')+mm'''F(m,m''')+\ldots\Big\}.$$

Подобнымъ образомъ получимъ:

$$Y=\frac{d}{dy}\Big\{mm'F(m,m')+mm''F(m,m'')+mm'''F(m,m''')+\ldots\Big\}$$
$$Z=\frac{d}{dz}\Big\{mm'F(m,m')+mm''F(m,m'')+mm'''F(m,m''')+\ldots\Big\}$$
$$X'=\frac{d}{dx'}\Big\{mm'F(m,m')+mm''F(m,m'')+mm'''F(m,m''')+\ldots\Big\}$$
$$Y'=\frac{d}{dy'}\Big\{mm'F(m,m')+mm''F(m,m'')+mm'''F(m,m''')+\ldots\Big\}$$
$$Z'=\frac{d}{dz'}\Big\{mm'F(m,m')+mm''F(m,m'')+mm'''F(m,m''')+\ldots\Big\}$$

....

Если положимъ для краткости

$$\begin{aligned}V=mm'F(m,m')+m\,m''F(m,m'')+m\,m'''F(m,m''')+\ldots\\ +m'm''F(m',m'')+m'm'''F(m',m''')+\ldots\\ +m''m'''F(m'',m''')+\ldots\\ +\ldots\end{aligned}$$

то предыдущія уравненія обратятся въ слѣдующія:

$$X=\frac{dV}{dx},\quad Y=\frac{dV}{dy},\quad Z=\frac{dV}{dz}$$
$$X'=\frac{dV}{dx'},\quad Y'=\frac{dV}{dy'},\quad Z'=\frac{dV}{dz'}$$

....

непосредственно доставляющія формулы (10).

Означимъ чрезъ n число массъ системы. Число всѣхъ уравненій (10) будетъ $3n$; они имѣютъ $6n$ интеграловъ, которые заключаютъ въ себѣ во первыхъ $6n$ величинъ: x, y, z; x', y', z';.... $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$; $\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}$;....., а во вторыхъ, время t и $6n$ постоянныхъ произвольныхъ величинъ, вводимыхъ интегрированіемъ. Изобразимъ сіи постоянныя чрезъ a, b, c....., и положимъ для сокращенія $\frac{dx}{dt}=u$, $\frac{dy}{dt}=v$, $\frac{dz}{dt}=w$; $\frac{dx'}{dt}=u'$, $\frac{dy'}{dt}=v'$, $\frac{dz'}{dt}=w'$;.... Если станемъ разсматривать $6n$ интеграловъ, о которыхъ сей-часъ упомянули, просто какъ $6n$ условныхъ уравненій между величинами x, y, z; x', y', z';.... u, v, w;.... u', v', w';.... t, a, b, c...., коихъ число равно $12n+1$, то сіи условныя уравненія можно будетъ употребить нетолько въ смыслѣ интеграловъ формулъ (10), но и въ другихъ значеніяхъ. Эти уравненія будутъ выражать интегралы только въ томъ случаѣ, когда предположимъ a, b, c..... постоянными. Если же, такъ сказать, забудемъ происхожденіе упомянутыхъ $6n$ уравненій, а будемъ разсматривать ихъ въ значеніи извѣстныхъ отношеній между $12n+1$ количествами x, y, z; x'.... u, v, w; u'...., t, a, b, c... , то они получатъ несравненно бо̀льшую степень общности, и часто будутъ относиться къ весьма разнообразнымъ задачамъ.

Принимая a, b, c.... за количества перемѣнныя, мы можемъ быть приведены посредствомъ различныхъ преобразованій къ слѣдствіямъ, весьма примѣчательнымъ въ отношеніи интегрированія уравненій (10). Напримѣръ, если бы какое либо преобразованіе привело насъ къ уравненію, не заключающему въ себѣ дифференціаловъ da, db, dc... , то такое уравненіе могло бы служить интеграломъ формулъ (10); для этого стоило бы только принимать въ немъ a, b, c.... за величины постоянныя.

Положимъ теперь, что найдено k интеграловъ уравненій (10); одинъ изъ нихъ, выражающій законъ живыхъ силъ [Смот. § 9], будетъ

$$\Sigma m\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right)=V+h;$$

въ этой формулѣ знакъ Σ означаетъ сумму членовъ вида $m\left(\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right)$, относящуюся ко всѣмъ массамъ m, m', m''.... данной системы, а h произвольную постоянную величину.

Если условимся разсматривать найденные k интеграловъ въ значеніи k уравненій между количествами u, v, w; u'..... x, y, z; x'..... и k величинами a, b, c..... h, то можно будетъ измѣнять всѣ сіи количества принимая k изъ нихъ за перемѣнныя зависимыя, а всѣ остальныя за перемѣнныя независимыя. И такъ, означивъ характеристикою δ дифференцированіе, относящееся къ этому предположенію, получимъ

$$\Sigma\, m\,(u\delta u+v\delta v+w\delta w)=\delta V+\delta h.$$

Допустимъ теперь, что $k=3n+i$. Можно принимать за перемѣнныя зависимыя $3n$ количествъ u, v, w; u', v', w';..... и i величинъ изъ числа постоянныхъ произвольныхъ; остальныя $3n$ постоянныя, въ число которыхъ включимъ h, будемъ считать независимыми перемѣнными, равно какъ и $3n$ количествъ x, y, z; x', y', z';.... Если положимъ, что δ относится послѣдовательно къ дифференцированію по измѣняемости $x, y, z; x' \ldots\ldots h, a, b, c \ldots\ldots$, то получимъ

$$\Sigma m\left(u\frac{du}{dx}+v\frac{dv}{dx}+w\frac{dw}{dx}\right)=\frac{dV}{dx}$$

$$\Sigma m\left(u\frac{du}{dy}+v\frac{dv}{dy}+w\frac{dw}{dy}\right)=\frac{dV}{dy}$$

$$\Sigma m\left(u\frac{du}{dz}+v\frac{dv}{dz}+w\frac{dw}{dz}\right)=\frac{dV}{dz}$$

$$\Sigma m\left(u\frac{du}{dx'}+v\frac{dv}{dx'}+w\frac{dw}{dx'}\right)=\frac{dV}{dx'},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(11)\left\{\begin{aligned}&\Sigma m\left(u\frac{du}{dh}+v\frac{dv}{dh}+w\frac{dw}{dh}\right)=1\\&\Sigma m\left(u\frac{du}{da}+v\frac{dv}{da}+w\frac{dw}{da}\right)=0\\&\Sigma m\left(u\frac{du}{db}+v\frac{dv}{db}+w\frac{dw}{db}\right)=0\\&\Sigma m\left(u\frac{du}{dc}+v\frac{dv}{dc}+w\frac{dw}{dc}\right)=0\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right.$$

Формулы (11) суть не иное что̀, какъ условныя уравненія между количествами $x, y, z; x' \ldots u, v, w; u' \ldots a, b, c \ldots$ и h. Эти уравненія будутъ принадлежать динамическому вопросу, о которомъ идетъ рѣчь, какъ скоро перестанемъ разсматривать въ нихъ $a, b, c \ldots h$ перемѣнными. Пусть же $a, b, c \ldots h$ будутъ величины постоянныя. Такъ какъ мы имѣемъ $3n+i$ уравненій между $x, y, z; x' \ldots u, v, w; u' \ldots a, b, c \ldots$ и h, то можемъ выразить количества $u, v, w; u' \ldots x, y, z; x' \ldots$ въ функціи постоянныхъ $a, b, c \ldots h$ и $3n-i$ перемѣнныхъ $\xi, \eta, \zeta \ldots$, выбранныхъ надлежащимъ образомъ. Мы вводимъ величины $\xi, \eta, \zeta \ldots$ только для симетріи. Достаточно выразить $u, v, w; u' \ldots$ и i величинъ изъ перемѣнныхъ $x, y, z; x' \ldots$ въ функціи какъ остальныхъ изъ нихъ, такъ и постоянныхъ $a, b, c \ldots h$; поэтому количества $\xi, \eta, \zeta \ldots$ могутъ заключаться, если пожелаемъ, въ числѣ перемѣнныхъ $x, y, z; x', y', z'; x'' \ldots$

Разсмотримъ теперь выраженіе

$$\Sigma m(udx+vdy+wdz);$$

подставивъ въ него на мѣсто $x, y, z; x' \ldots u, v, w; u' \ldots$ величины сихъ перемѣнныхъ, выраженныя чрезъ $\xi, \eta, \zeta \ldots$, оно приметъ видъ

$$Ad\xi+Bd\eta+Cd\zeta+\ldots\ldots$$

Если, въ этомъ видѣ, разсматриваемое выраженіе будетъ полнымъ дифференціаломъ, то можно довести до конца рѣшеніе занимающаго насъ вопроса, то есть, можно найти недостающіе намъ $3n-i$ интеграла, принадлежащіе уравненіямъ (10).

Покажемъ теперь какимъ образомъ получаются интегралы, о которыхъ говоримъ. Пусть будетъ

$$(12)\qquad \Sigma m(udx+vdy+wdz)=dU,$$

разумѣя подъ U извѣстную функцію количествъ $\xi, \eta, \zeta \ldots a, b, c \ldots$ и h. Исключаемъ изъ U $3n-i$ количествъ $\xi, \eta, \zeta \ldots$ и i зависимыхъ постоянныхъ, не теряя изъ виду, что число всѣхъ постоянныхъ равно $3n+i$, изъ которыхъ $3n$ разсматриваются независимыми, а i, зависимыми. Исключеніе, о которомъ говоримъ, должно произвести не вводя величинъ $u, v, w; u' \ldots$, что̀ возможно, ибо имѣетъ $6n$ уравненій

$$u=f_1(\xi, \eta, \zeta\ldots)$$
$$v=f_2(\xi, \eta, \zeta\ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x=F_1(\xi, \eta, \zeta\ldots)$$
$$y=F_2(\xi, \eta, \zeta\ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Для исключенія употребляемъ только послѣднія $3n$ уравненій, почему можно разсматривать функцію U какъ зависящую отъ тѣхъ количествъ, которыя въ формулахъ (11) принимались за перемѣнныя независимыя.

Такъ какъ уравненіе (12) имѣетъ мѣсто каковы бы ни были *независимыя* величины $h, a, b, c \ldots\ldots$, то оно будетъ справедливо и въ томъ случаѣ, когда измѣнимъ h въ $h+dh$, a въ $a+da$, b въ $b+db, \ldots\ldots$ На этомъ основаніи получимъ

$$\Sigma m\left(\frac{du}{dh}dx+\frac{dv}{dh}dy+\frac{dw}{dh}dz\right)=d.\frac{dU}{dh}$$

$$\Sigma m\left(\frac{du}{da}dx+\frac{dv}{da}dy+\frac{dw}{da}dz\right)=d.\frac{dU}{da}$$

$$\Sigma m\left(\frac{du}{db}dx+\frac{dv}{db}dy+\frac{dw}{db}dz\right)=d.\frac{dU}{db}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Послѣднія уравненія имѣютъ мѣсто для какихъ ни есть $d\xi, d\eta, d\zeta \ldots$, а слѣдовательно они справедливы и въ томъ предположеніи, что дифференціалы $d\xi, d\eta, d\zeta \ldots$ относятся къ времени t; въ этомъ случаѣ дифференціалы $dx, dy, dz \ldots, d.\frac{dU}{dh}, d.\frac{dU}{da}, d.\frac{dU}{db}, \ldots$ будутъ также относиться ко времени, почему и найдется $udt = dx$, $vdt = dy$, $wdt = dz$; $u'dt = dx'$,...... И такъ, помноживъ уравненія (11) на dt, получимъ

$$\Sigma m\left(\frac{du}{dh}dx+\frac{dv}{dh}dy+\frac{dw}{dh}dz\right)=dt$$

$$\Sigma m\left(\frac{du}{da}dx+\frac{dv}{da}dy+\frac{dw}{da}dz\right)=0$$

$$\Sigma m\left(\frac{du}{db}dx+\frac{dv}{db}dy+\frac{dw}{db}dz\right)=0$$

....

и слѣдовательно

$$d.\frac{dU}{dh}=dt$$

$$d.\frac{dU}{da}=0$$

$$d.\frac{dU}{db}=0$$

....

Интегрируя послѣднія уравненія относительно t, получимъ

$$(13)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{dU}{dh}=t+C'\\&\frac{dU}{da}=C''\\&\frac{dU}{db}=C'''\end{aligned}\right.$$

....

Уравненій (13) будетъ числомъ $3n$. Такъ какъ они выражаютъ конечныя соотношенія между величинами x, y, z; x'.... a, b.... h и временемъ t, то и послужатъ для окончательнаго рѣшенія вопроса, ибо, сверхъ имѣющихся уже $3n+i$ интеграловъ, получаемъ еще $3n$, и слѣдовательно всего $6n+i$ интеграловъ, изъ которыхъ i будутъ заключаться въ $6n$ остальныхъ. Впрочемъ, должно замѣтить, что интегралы (13), разсматриваемые независимо отъ другихъ, уже рѣшаютъ вопросъ, потому что число ихъ равно $3n$, и, сверхъ того, они не заключаютъ въ себѣ величинъ u, v, w; u'.... Поэтому можно будетъ вывести изъ нихъ количества x, y, z; x'..... въ функціи какъ времени t, такъ и $6n$ постоянныхъ произвольныхъ величинъ h, a, b, c.... C', C'', C'''.....; потомъ, посредствомъ дифференцированія относительно t, опредѣлятся u, v, w; u', v', w'; u''....

Мы пояснимъ изложенную сей-часъ теорію приложивъ ее къ одной динамической задачѣ, состоящей въ опредѣленіи движенія матеріальной точки, движущейся въ плоскости. Предположивъ для простоты, что масса этой точки равна единицѣ, уравненія разсматриваемаго движенія будутъ

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dV}{dx},\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dV}{dy}$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{dV}{dx},\quad \frac{dv}{dt}=\frac{dV}{dy}.$$

Замѣтимъ, что на основаніи закона живыхъ силъ, имѣемъ

$$(14)\qquad \frac{u^2+v^2}{2}=V+h,$$

и если допустимъ, что какимъ либо образомъ нашли другой интегралъ

$$(15)\qquad f(x, y, u, v, a, h)=0,$$

то посредствомъ уравненій (14) и (15) можемъ опредѣлить величины u и v въ функціи x, y, a и h; поставимъ потомъ эти величины въ формулу

$$udx+vdy,$$

которая, въ такомъ случаѣ, обратится въ полный дифференціалъ. Дѣйствительно, разсматривая u и v какъ функціи перемѣнныхъ x и y, окажется, что уравненія движенія примутъ видъ

$$\frac{du}{dx}u+\frac{du}{dy}v=\frac{dV}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx}u+\frac{dv}{dy}v=\frac{dV}{dy}.$$

Дифференцируя теперь уравн. (14) сперва по измѣняемости x, а потомъ по измѣняемости y, получимъ

$$u\frac{du}{dx}+v\frac{dv}{dx}=\frac{dV}{dx}$$

$$u\frac{du}{dy}+v\frac{dv}{dy}=\frac{dV}{dy};$$

слѣдовательно

$$u\frac{du}{dx}+v\frac{dv}{dx}=\frac{du}{dx}u+\frac{du}{dy}v$$

$$u\frac{du}{dy}+v\frac{dv}{dy}=\frac{dv}{dx}u+\frac{dv}{dy}v,$$

откуда получаемъ равенство

$$\frac{dv}{dx}=\frac{du}{dy},$$

выражающее условіе интегрируемости выраженія $udx+vdy$, котораго интегралъ опредѣлитъ количество U въ функціи x, y, a и h. По извѣстному U, найдемъ интегралы

$$\frac{dU}{dh}=t+C$$

$$\frac{dU}{da}=C',$$

разумѣя подъ C и C' постоянныя произвольныя величины. Посредствомъ сихъ двухъ интеграловъ легко будетъ привести къ концу рѣшеніе занимавшаго насъ вопроса.

Рѣшенная сей-часъ задача принадлежитъ къ числу самыхъ простыхъ; и дѣйствительно, когда найдено столько интеграловъ, сколько ихъ нужно для опредѣленія u и v, то рѣшеніе приводится къ концу, потому что выраженіе $udx + vdy$ будетъ полнымъ дифференціаломъ. Въ общемъ же случаѣ недостаточно имѣть $3n$ интеграла, то есть такое число уравненій, посредствомъ которыхъ можно опредѣлить всѣ величины u, v, w; u'..... съ цѣлію обратить выраженіе $\Sigma m(udx + vdy + wdz)$ въ полный дифференціалъ. Чаще всего случится, что это выраженіе не будетъ точнымъ дифференціаломъ функціи объ $3n$ перемѣнныхъ независимыхъ. Но если бы нашли болѣе $3n$ интеграловъ, то получили бы нѣкоторыя отношенія между перемѣнными x, y, z; x'...., и очень могло бы случиться, что формула $\Sigma m(udx + vdy + wdz)$, въ силу найденныхъ отношеній, обратилась бы въ полный дифференціалъ. Въ такомъ предположеніи, рѣшеніе вопроса дѣлается весьма нетруднымъ.

При изложеніи общей теоріи мы предположили, что выраженіе $\Sigma m(udx + vdy + wdz)$ обращается въ полный дифференціалъ въ силу $3n + i$ интеграловъ, то есть въ силу i условныхъ уравненій между перемѣнными x, y, z; x'...... Эти соображенія будутъ полезны до тѣхъ поръ, пока i не превзойдетъ $3n-2$. Но когда $i = 3n-1$, то изложенная теорія не можетъ уже служить никакимъ пособіемъ при интегрированіи дифференціальныхъ уравненій Динамики.

DYNAMIQUE. ДИНАМИЧЕСКІЙ. Свойственный, принадлежащій Динамикѣ; относящійся къ движенію. Смот. выше. *Problême, quèstion dynamique*; *динамическая задача*, *динамическій вопросъ*. *Unité dynamique*; *динамическая единица*; Смот. DYNAMIE. *Électricité dynamique*; *динамическое электричество*.

Sʏsᴛêᴍᴇ ɪʟɪ ᴛʜéᴏʀɪᴇ ᴅʏɴᴀᴍɪǫᴜᴇ. (Физ.) Динамическая система, теорія. Эта теорія была предложена нѣкоторыми Германскими философами въ противоположность теоріи *атомистической* или *частичной*. Въ динамической системѣ дѣлимости вещества не полагаютъ никакихъ предѣловъ, и слѣдовательно отвергаютъ существованіе атомовъ. По этой теоріи вещество разсматривается сплошнымъ, непрерывнымъ, а скважность считается уже случайнымъ свойствомъ тѣлъ. Смот. CORPS, ATOMISTIQUE (SYSTÊME).

DYNAMODE. ДИНАМОДА. Смот. DYNAMIE.

DYNAMOMÈTRE. (Прикл. Мех. и Опт.) **ДИНАМОМЕТРЪ, СИЛОМѢРЪ.** Такъ называется всякій приборъ, служащій для измѣренія напряженія силъ. Динамометръ, изобрѣтенный *Реньеромъ* (*Regnier*) для предпринятыхъ *Бюффономъ* опытовъ надъ силою животныхъ, дѣлается изъ крѣпкой стальной пружины. При употребленіи прибора, пружина, отъ дѣйствія непосредственно приложенной къ ней силы, принимаетъ нѣкоторый погибъ, большая или меньшая степень котораго, указываемая движеніемъ стрѣлки, пробѣгающей по дѣленіямъ лимба, служитъ для опредѣленія величины измѣряемой силы. Употребляемые нынѣ силоизмѣрительные приборы почти всѣ *пружинные*, и слѣдовательно они устроены на одномъ началѣ съ *Реньеровымъ динамометромъ*. — Динамометромъ или Динаметромъ называютъ также инструментъ, изобрѣтенный *Рамсденомъ* (*Ramsden*), и служащій для измѣренія *степени увеличенія* астрономическихъ трубъ. Читатели найдутъ описаніе этого инструмента въ *Astronomisches Jahrbuch*, von Bode, за 1795 годъ, въ статьѣ: Beschreibung und Gebrauch eines zur Bestimmung der Vergrösserungskraft eines Fernrohrs dienenden Werkzeuges, стр. 225.

DYNAMOMÉTRIQUE. ДИНАМОМЕТРИЧЕСКІЙ, силомѣрный, силоизмѣрительный. *Frein dynamométrique*; *динамометрическій тормазъ*, *динамометрическій нажимъ*. Смот. FREIN.

КОНЕЦЪ БУКВЫ **D** и ПЕРВАГО ТОМА.

ОПЕЧАТКИ

ВЪ I ТОМѢ

ЛЕКСИКОНА ЧИСТОЙ и ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ.

Напечатано:	Страница:	Столбецъ:	Строка:	Должно быть:
$abc + abd + bcd$	4	2	снизу 21	$-(abc + abd + bcd)$
нiи	5	1	сн. 10	**нiй**
ломанныя	7	2	сверху 15	**ломаныя**
HYDRODYNAMQUE	12	1	св. 24	HYDRODYNAMIQUE
AJOUTTER	13	2	сн. 13	**AJOUTER**
DÉCARTES	21	1	св. 7	DÉSCARTES
AMBIGENE	22	1	сн. 16	**AMBIGENE (HYPERBOLE)**
$\int^{\varphi}$	23	1	св. 23	$\int_0^{\varphi}$
онъ	23	2	сн. 12	оно
Валлисъ	24	1	сн. 16	*Валъисъ*
иинтегра-	25	1	св. 22	интегра-
магнетизма	26	1	сн. 22	*магнитизма*
крибой	28	2	сн. 16	**кривой**
пластику	29	2	св. 20	пластинку
разуямое	30	2	сн. 10	разуемое
ассиптоту	31	2	сн. 16	ассимптоту
извѣстенъ	38	1	сн. 16	извѣстно
элипсовъ	39	1	св. 7	эллипсовъ
противу-разверзающаяся	39	1	сн. 23 и 22	**противо-разверзающаяся**
APPLANISSEMENT	41	1	сн. 18	**APLANISSEMENT**
applanie	41	1	сн. 14	*aplanie*
силъ	41	2	сн. 12	*силы*
диффе-	50	2	св. 9	диффе-
въ,	51	2	св. 14	въ
слѣдоватeльноz	51	2	св. 15	слѣдовательно
гдѣ x, y,	51	2	св. 25	гдѣ x, y, z
то при $y = 0$	52	1	св. 5	то при $x = 0$
однаго	60	1	св. 2	*одного*
издавшемъ	70	1	св. 4	издавшимъ
измѣненiямъ,	74	2	св. 6	измѣненiямъ, и
сображенiе	76	2	сн. 18	соображенiе
$b < a\left[1-\left(1-{}^{x}\right)\right]$.	85	2	сн. 20	$b < a\left[1-\left(1-\frac{x}{a}\right)^{q}\right]$.
погрѣшностей?	87	2	сн. 19	погрѣшностей?
нринимать	89	1	сн. 15	принимать
AC	93	2	сн. 1	*AC*
Галлилею	96	2	св. 23	*Галилею*
Галлилея	96	2	сн. 22	Галилея
(троп	135	1	сн. 2	(троп.
день, съ	136	2	св. 21	*день, въ*
Вмѣсто страницы 154 выставлена страница 451.				
имѣемъ	156	1	сн. 7	имѣетъ
собразимъ	158	2	св. 1	сообразимъ
трѣтье	159	2	св. 23	третье
INDIVISIBLE	166	1	сн. 23	INDIVISIBLES (MÉTHODE DES)
ости.	182	1	св. 6	ности.
ствуютъэ то умсобытiю	182	1	св. 18	*ствуютъ этому событiю*
$v\ \ t$	188	2	св. 18	$v = gt$
(*vitesse due à la hauteure*)	188	2	св. 21	(*vitesse due à la hauteur e*)
выте	195	2	св. 2	выше
roduits	203	1	сн. 1	*produits*

Напечатано:	Страница:	Столбецъ:	Строка:	Должно быть:
ткаъ	203	2	сн. 1	такъ
$(a_3x^2)^6$	207	1	сн. 4	$(a_3x^3)^6$
5 вер. 5 дн.	218	2	св. 13	5 вер.; 5 дн.
имѣла	222	2	сн. 15	имѣло
пешеходомъ.	223	1	св. 19	пѣшеходомъ.
точки	223	1	сн. 7	точкѣ
четвертая	230	1	св. 20	пятая
разсмариваемыя	240	2	св. 19	*разсматриваемыя*
$\frac{3.3.5.5.7.7.9.9\ldots}{2.4.4.6.6.8.8\ldots}$	246	2	сн. 3	$2.\frac{2}{1}.\frac{2}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{5}.\frac{6}{7}.\frac{8}{7}.\frac{8}{9}\ldots$
$\frac{p_n}{n}=$	248	1	сн. 1	$\frac{p_n}{q_n}=$
$ak=y-b_1$	250	2	сн. 1	$ak=y_1-b_1$
дайденное	256	1	св. 16	найденное
$a+\frac{\beta}{+\gamma}$	258		св. 6	$a+\frac{\beta}{b+\gamma}$
s_{n-1}	265	2	сн. 5	s_{m-1}
$x<1$	266	2	св. 2	$x>1$
$\frac{d^2y}{d^2}$	273	1	св. 7	$\frac{d^2y}{dt^2}$
$2\frac{}{a}$	274	2	св. 1	$2\frac{l}{a}$
воздѣлователей	278	2	сн. 3	воздѣлывателей
объясненіе къ по·	292	1	сн. 7	объясненіе къ
рѣшаясь	295	2	сн. 3	рѣшались
ASYMTOTE	297	1	св. 7	ASYMPTOTE
Альфонзъ	309	2	сн. 12	*Альфонсъ*
радіусъ	316	2	св. 21	радіуса
площади.	316	2	сн. 9	площади,
в видѣ:	320	1	сн 1	въ видѣ:
$MQ=a\,Sin\,\varphi$	324	1	св. 2	$Mq=a\,Sin\,\varphi$
поступаетъ	333	1	св. 22	поступаемъ
AB и AD	333	1	сн. 14	AB и BD
DCB	333	1	сн. 13	ACB
$AD:DC=DB:CB$	333	1	сн. 11	$AD:AB=DB:CB$
этом	333	2	сн. 10	этомъ
отсылае	333	2	сн. 8	отсылаемъ
Вмѣсто страницы 357 выставлена страница 356.				
осчитаемъ	357	1	св. 21	*сосчитаемъ*
дв	365	2	св. 9	два
гидростатической	368	1	сн. 3	гидравлической
Фертама	375	2	св. 13	*Фермата*
$u_2=u_1=\Delta u_1$	378	1	св. 11	$u_2-u_1=\Delta u_1$
$e^u-1=-f(x)$	386	1	сн. 2	$e^{\Delta u}-1=-f(x)$
$y^m=2^{m-1},\ z^m=2^{m-1}-1.$	388	1	св. 7	$y_m=2^{m-1},\ z_m=2^{m-1}-1$
онъ	392	1	сн. 22	оно
ходимъ	393	1	св. 1	находимъ
$=\text{пред.}\left\{\frac{Log\left(\ +\frac{i}{x}\right)}{i}\right\}$	400	1	сн. 2	$=\text{пред.}\left\{\frac{Log\left(1+\frac{i}{x}\right)}{i}\right\}$
$\frac{d^6u}{dzdydx^3}=$	408	1	сн. 4	$\frac{d^6u}{dzdy^2dx^3}=$
$du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dx}dy$	410	1	сн. 6	$du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy$
$\frac{b^4}{a+b}$	433	1	св. 4	$\frac{2b^4}{a+b}$
обсциссъ	446	2	св. 16	абсциссъ
родившійся.	448	2	сн. 11	родившійся.